概率论与数理统计

学习指导

（第二版）

魏国强　王茂南 • 主编

苏州大学出版社
Soochow University Press

概率论与数理统计学习指导
（第二版）

主　编　魏国强　王茂南
副主编　张景祥　曹菊生
夏明汉　孙曦浩

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习指导／魏国强，王茂南主编
．—2版．—苏州：苏州大学出版社，2016.8
ISBN 978-7-5672-1802-4

Ⅰ.①概… Ⅱ.①魏… ②王… Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 188517 号

概率论与数理统计学习指导(第二版)
魏国强　王茂南　主编
责任编辑　征　慧　周建兰

苏州大学出版社出版发行
(地址：苏州市十梓街1号　邮编：215006)
宜兴市盛世文化印刷有限公司印装
(地址：宜兴市万石镇南漕河滨路58号　邮编：214217)

开本 787×960　1/16　印张 14　字数 266 千
2016 年 8 月第 2 版　2016 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5672-1802-4　定价：24.00 元

苏州大学版图书若有印装错误，本社负责调换
苏州大学出版社营销部　电话：0512—65225020
苏州大学出版社网址 http://www.sudapress.com

前　言

编写本书的目的是帮助读者正确理解和掌握一些基本概念，总结解题方法，提高分析问题、解决问题的能力，并为学生提供一份课外复习资料．本书可供理科、工科、文科各专业学生使用，对研究生入学考试也有很大帮助．

本书共八章，每章分为“基本要求与主要内容”“典型例题解析”“同步练习”“参考答案”四个部分．“基本要求与主要内容”部分列出了教学基本要求，并详细总结了本章的主要内容(包括基本概念、重要定理与公式等)；“典型例题解析”部分精选了各类典型例题，并给出了详尽的解答，指出了解题思路和技巧，有些例题在解答后还提出了应注意的地方；“同步练习”部分配置了一定量的同步练习题；“参考答案”部分给出了同步练习的所有解答．另外，按照通常的教学安排，附录部给出了六份期末测验卷，并提供了解答，可供学生在期末考试前复习测试之用．

本书由魏国强、王茂南、张景祥、曹菊生、夏明汉、孙曦浩编写，全书由曹菊生统稿和审阅．本书在编写过程中得到编者所在单位江南大学理学院的大力支持和帮助，在此表示衷心感谢．

由于编者水平所限，加之时间仓促，书中缺陷和错误在所难免，诚请广大专家、同仁和读者批评指正．

编　者

2015 年 7 月

目 录

第一章 随机事件及其概率

一、基本要求与主要内容

基本要求

1. 理解随机试验、样本空间及随机事件的概念.
2. 掌握随机事件的关系与运算.
3. 了解概率的统计定义、公理化定义及其性质.
4. 会熟练计算古典概率,能计算几何概率.
5. 掌握条件概率的定义、概率的加法公式和乘法公式.
6. 会用全概率公式、贝叶斯公式计算事件的概率.
7. 会利用事件的独立性计算有关事件的概率.

主要内容

(一) 随机事件

1. 随机试验

对客观现象的观察记录过程称为随机试验,简称为试验,用字母 E 表示. 作为概率论的研究对象,随机试验具有以下三个特点:

(1) 重复性　试验可在相同条件下重复进行;

(2) 可知性　试验所有可能出现的结果是已知的;

(3) 不确定性　在试验完成前不能确定哪一个具体结果会出现.

2. 随机事件

把随机试验的每个可能出现的结果称为该试验的随机事件，简称为事件，用字母 $A,B,C,\cdots$ 表示. 将试验的不能分解为其他事件复合的最简单事件称为基本事件或样本点，用字母 ω 表示. 全体样本点组成的集合称为该试验的样本空间，记为 Ω. 事件是样本空间的子集. 事件 A 发生是指 A 所包含的基本事件中至少有一个出现在试验的结果中. 每次试验必然要发生的事件称为必然事件，必然事件包含所有样本点，因而用 Ω 表示. 试验中不可能发生的事件称为不可能事件，它不包含任何样本点，因而用 $\varnothing$ 表示.

3. 事件的关系和运算

(1) 事件的包含和相等.

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 A 包含于事件 B，记作 $A\subset B$. 对于任何事件 A 有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$.

若 $A\subset B$，且 $B\subset A$，则称事件 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

(2) 事件的和.

“事件 A 和事件 B 至少有一个发生”称为事件 A 与 B 的和(或并)，记作 $A+B$(或 $A\cup B$). “事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生”称为这 n 个事件的和(或并)，记作 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$ (或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$). 和的概念还可推广到无穷多个事件的情形.

由定义可得：$A+A=A,A+\varnothing=A,A+\Omega=\Omega,A\subset A+B,B\subset A+B$.

(3) 事件的积.

“事件 A 与事件 B 同时发生”称为事件 A 与 B 的积(或交)，记作 AB(或 $A\cap B$). “事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生”称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积(或交)，记作 $\prod\limits_{i=1}^{n}A_i$ (或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$). 积的概念可推广到无穷多个事件的情形.

由定义可得：$AA=A,A\varnothing=\varnothing,A\Omega=A,AB\subset A,AB\subset B,A\subset B\Leftrightarrow AB=A$.

(4) 事件的差.

“事件 A 发生而事件 B 不发生”称为事件 A 与 B 的差，记作 $A-B$.

由定义可得：$A-B=A-AB,A-B+B=A+B,(A-B)B=\varnothing$.

(5) 对立事件.

“事件 A 不发生”称为事件 A 的对立事件(或逆事件)，记作 $\overline{A}$.

由定义可得：$A+\overline{A}=\Omega,A\overline{A}=\varnothing,\overline{A}=\Omega-A,\overline{A}$ 的对立事件为 A. 两事件相互对立当且仅当每次试验中必须且只能发生其一.

(6) 互不相容(或互斥)事件.

若事件 A 与事件 B 在一次试验中不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互不相容(或互斥).

由定义可得:基本事件必两两互斥;两事件相互对立必互斥，而两事件互斥则未必相互对立.

(7) 完备事件组.

若事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥，且有 $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i=\Omega$，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是一个完备事件组(或样本空间的一个划分).

特别地，A 与 $\overline{A}$ 是一个完备事件组;试验 E 的所有基本事件构成一个完备事件组.

事件的关系和运算与集合论中集合的关系和运算是一致的，用表 1-1 对照说明.

表 1-1　各记号在概率论和集合论中的比较

记号	在概率论中	在集合论中
Ω	必然事件，样本空间	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
ω	基本事件，样本点	元素，单元子集
A	事件	子集
$A\subset B$	事件 A 发生必导致事件 B 发生	A 是 B 的子集
$A=B$	事件 A 与事件 B 是同一事件	A 与 B 相等
$A+B$	事件 A 与事件 B 至少有一个发生	A 与 B 的并集
AB	事件 A 发生且事件 B 发生	A 与 B 的交集
$A-B$	事件 A 发生而事件 B 不发生	A 与 B 的差集
$AB=\varnothing$	事件 A 与事件 B 互斥	A,B 两集合交集为空
$\overline{A}$	事件 A 的对立事件	A 的补集

集合论的有关运算律对于事件的运算仍成立.它们是:

① 交换律　$A+B=B+A,AB=BA$.

② 结合律　$(A+B)+C=A+(B+C),(AB)C=A(BC)$.

③ 分配律　$A(B+C)=AB+AC,A+BC=(A+B)(A+C)$.

④ 对偶律(德·摩根公式)

$$\overline{\sum_{i=1}^{n}A_i}=\prod_{i=1}^{n}\overline{A}_i,\quad \overline{\prod_{i=1}^{n}A_i}=\sum_{i=1}^{n}\overline{A}_i.$$

与集合论中类似,事件的关系和运算都可用文氏图表示.

(二)事件的概率

1. 概率的统计定义

将试验 E 在不变的条件下重复进行了 n 次,事件 A 发生了 m 次,当 n 逐渐增大时,事件 A 发生的频率 $f_n(A)=\dfrac{m}{n}$ 稳定地在某一常数 p 附近摆动,且 n 越大,摆动幅度越小,则称常数 p 为事件 A 的概率,记作 $P(A)$.

2. 古典概型

若试验 E 满足:(1) 样本空间 Ω 是有限集;(2) 每个基本事件发生的可能性相同. 则称试验 E 为古典概型.

对于古典概型,其事件 A 的概率计算式为 $P(A)=\dfrac{m}{n}$,其中 n 为 E 的基本事件总数,m 为事件 A 所包含的基本事件数. 以上概率称为古典概率.

3. 几何概型

设平面区域 Ω 的面积为 S_Ω,质点等可能地落在 Ω 内的任何一点. 区域 Ω_0 是 Ω 的一部分,其面积为 d,则事件 $A=$"点落在区域 Ω_0 内"的概率定义为

$$P(A)=\frac{\Omega_0\text{ 的面积}}{\Omega\text{ 的面积}}=\frac{d}{S_\Omega}.$$

这样定义的概率称为几何概率. 类似地,可在线段及空间区域内定义几何概率.

4. 概率的公理化定义

设试验 E 的样本空间为 Ω,对 E 的每个事件 A 赋予一个实数 $P(A)$,且满足:

(1) 非负性　对每个事件 A,$P(A)\geqslant 0$;

(2) 完备性　$P(\Omega)=1$;

(3) 可列可加性　对于 Ω 中任意可列个两两互斥事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$,有

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i),$$

则称实数 $P(A)$ 为事件 A 的概率. 由此可推出:$P(\varnothing)=0$,$0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

注　概率的统计定义直观具体、易于理解,但不够严谨且需做多次试验才能确定概率的近似值;古典概型与几何概型虽结构简单,但适用范围有限;概率的公理化定义具有一般性,定义抽象而严谨,揭示了概率的本质属性.

5. 条件概率

设 A,B 是两个事件，且 $P(A)>0$，在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的概率称为 B 对 A 的条件概率，记为 $P(B|A)$. 条件概率定义为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

条件概率是随机事件的概率，满足概率公理化定义的三个条件，因而具有一般概率的性质.

(三) 事件的独立性

若事件 A,B 满足 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A 与 B 相互独立. 不难证明：必然事件及不可能事件与任何事件都相互独立.

当 $P(A)>0,P(\overline{A})>0$ 时，有：A,B 相互独立$\Leftrightarrow P(B|A)=P(B|\overline{A})=P(B)$. 可见两事件相互独立的含义是其中任一事件的发生与否不影响另一事件发生的概率.

对于事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，如果它们中任何 $m(2\leqslant m\leqslant n)$ 个事件乘积的概率等于每个事件概率的乘积，则称这 n 个事件相互独立. 例如，三个事件 A,B,C 相互独立，当且仅当：

$$\begin{aligned}&P(AB)=P(A)P(B);P(AC)=P(A)P(C);\\&P(BC)=P(B)P(C);\\&P(ABC)=P(A)P(B)P(C).\end{aligned}$$

注 1　$n(n>2)$ 个事件相互独立，则必两两独立. 但反之不然.

注 2　一组事件相互独立，则将其中任意 $m(1\leqslant m\leqslant n)$ 个事件变为其对立事件后，这 n 个事件仍独立.

注 3　在处理问题的过程中，常根据问题的实际背景来判断事件的独立性. 若一组事件中任一事件发生的可能性大小不受其他任何一个或多个事件发生与否的影响，则该事件组是相互独立的. 当然，若问题中事件组是否独立的情况不明，则就需要作统计分析了.

(四) 概率的计算公式

1. 加法公式

对事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，有

$$P(\sum_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

当 $n=2$ 时,有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

当 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥时,有 $P(\sum_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$,此性质称为概率的有限可加性.

若事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,则求和的概率常用下式:

$$P(\sum_{i=1}^{n}A_i)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n).$$

2. 对立事件概率公式

$$P(A)=1-P(\overline{A}).$$

3. 减法公式

$$P(A-B)=P(A)-P(AB).$$

当 $B\subset A$ 时,有

$$P(A-B)=P(A)-P(B).$$

4. 乘法公式

若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$,则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

5. 全概率公式

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是一完备事件组,且 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$,则有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i).$$

6. 逆概公式

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是一完备事件组,且 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$,又设 $P(B)>0$,则

$$P(A_i\mid B)=\frac{P(A_i)P(B\mid A_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)}.$$

二、典型例题解析

例 1 写出下列随机试验的样本空间及所列事件的样本点.

(1) 将一枚硬币连掷两次,观察出现哪一面. 设 $A=$"第一次出现正面",$B=$"两次出现的是同一面".

(2) 5 件产品中有 2 件是次品,从中任取 2 件. 设 $A=$"2 件中只有 1 件次

品”，B=“2 件都不是次品”.

(3) 在 1,2,3,4 四个数字中可重复地每次取出一个数，共取 2 次. 设 A=“取到的两个数中一个数是另一个数的两倍”.

(4) 对某工厂出厂的一批产品进行检验，合格的盖上“正品”，否则盖上“次品”. 连续查出两个次品或检查完 4 个产品就停止检验，记录检验结果. 设 A=“检查产品个数至多为 3”.

解　(1) 每次投掷有正、反两种可能，两次共有 $2^2=4$ 种可能，用 1,0 分别表示正面向上与反面向上，则样本空间 $\Omega=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$. 其中事件 $A=\{(1,1),(1,0)\}$，$B=\{(0,0),(1,1)\}$.

(2) 以 a_1,a_2 表示 2 件次品，b_1,b_2,b_3 表示 3 件正品，则 Ω 含有 $C_5^2=10$ 个样本点.

$\Omega=\{(a_1,a_2),(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,b_3),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_2,b_3),(b_1,b_2),(b_1,b_3),(b_2,b_3)\}$.

$A=\{(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,b_3),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_2,b_3)\}$.

$B=\{(b_1,b_2),(b_1,b_3),(b_2,b_3)\}$.

(3) $\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$.

$A=\{(1,2),(2,1),(2,4),(4,2)\}$.

(4) 本题的样本空间较复杂，可根据检验产品的个数 N 分类列出样本点. 用 0,1 分别表示验得一产品为次品和正品. 根据题意，N 可取 2,3,4. $N=2$ 的样本点仅有一个(0,0)，$N=3$ 的样本点是(1,0,0)，$N=4$ 时又可分次品个数为 0,1,2,3 来分类考虑. 无次品的是(1,1,1,1)；有 1 个次品的是(0,1,1,1)，(1,0,1,1)(1,1,0,1)，(1,1,1,0)；有 2 个次品的是(1,1,0,0)，(1,0,1,0)，(0,1,0,1)，(0,1,1,0)；有 3 个次品的是(0,1,0,0)，于是有

$\Omega=\{(0,0),(1,0,0),(1,1,1,1),(0,1,1,1),(1,0,1,1),(1,1,0,1),(1,1,1,0),(1,1,0,0),(1,0,1,0),(0,1,0,1),(0,1,1,0),(0,1,0,0)\}$.

$A=\{(0,0),(1,0,0)\}$.

注 1　分析随机试验的样本空间是学习概率论的基础，它有助于许多重要概念和方法的理解.

注 2　分类列举是十分重要的数学方法，尤其是在解决实际问题中应用广泛.

例 2　一名射手连续向某个目标射击 3 次. 事件 A_i 表示该射手第 i 次射击时击中目标($i=1,2,3$). 试用 A_i 表示下列事件：

(1) 仅第 2 次射击击中目标;

(2) 3 次射击中至少有 1 次击中目标;

(3) 3 次射击都击中目标;

(4) 第 2 次击中目标但第 1 次未击中;

(5) 3 次射击中至少有 2 次击中目标;

(6) 3 次射击中至多有 2 次击中目标;

(7) 3 次射击中恰有 2 次击中目标.

解 (1) $\overline{A}_1A_2\overline{A}_3$;(2) $A_1+A_2+A_3$;(3) $A_1A_2A_3$;(4) $\overline{A}_1A_2$;(5) $A_1A_2+A_1A_3+A_2A_3$;(6) $\overline{A_1A_2A_3}$ 或 $\overline{A}_1+\overline{A}_2+\overline{A}_3$,还可表示为 $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3+A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3$;(7) $A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3$.

注 用事件的运算式表示事件,将复杂事件分解为简单事件的组合,是计算事件概率的基础. 读者要通过分析比较掌握这一方法. 例如,在例 2 中,要区别 $\overline{A}_1A_2\overline{A}_3$ 与 A_2;再如,要区别“三事件不同时发生”与“三事件同时不发生”. 此外,对“恰”“至少”“至多”等术语要多加辨析.

例 3 盒中装有 5 件同类产品,其中有 2 件次品,现按下列不同方法抽取:(1) 一次取出 2 件;(2) 每次取出一个,取后不放回,共取 2 次;(3) 每次取出一个,取后再放回,共取 2 次. 求事件 A=“2 件都是正品”,事件 B=“恰有 1 件正品”的概率.

解 (1) 从 5 件产品中任取 2 件的不同取法共有 C_5^2 种,其中 2 件都是正品的取法有 C_3^2 种,1 件正品、1 件次品的不同取法有 $C_2^1C_3^1$ 种,所以

$$P(A)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10},P(B)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\frac{3}{5}.$$

(2) 在无放回抽样时,抽取产品的情形与次序有关. 样本点总数为 A_5^2,事件 A,B 分别含有 A_3^2 和 $C_3^1C_2^1+C_2^1C_3^1$ 个样本点. 从而

$$P(A)=\frac{A_3^2}{A_5^2}=\frac{3}{10},P(B)=\frac{C_3^1C_2^1+C_2^1C_3^1}{A_5^2}=\frac{3}{5}.$$

(3) 在放回抽样时,每次都有 5 种不同取法,从而样本点总数为 5^2,每次取到正品有 3 种取法,故取到 2 件正品有 3^2 种取法,恰有 1 件正品 1 件次品的取法共有 $2C_3^1C_2^1=12$ 种,得

$$P(A)=\frac{3^2}{5^2}=\frac{9}{25},P(B)=\frac{2C_3^1C_2^1}{5^2}=\frac{12}{25}.$$

注 本题中(1)(2)的答案一致不是偶然的,在计算(2)的概率时,也可以不

考虑取出产品的次序，只考虑最终取出两产品的不同组合，这样就采用了与(1)同样的样本空间.

例 4　假设每个人在哪个月份出生的机会均等. 考虑共有 4 个成员的家庭，试求下列事件的概率：A=“从 1 月起到 4 月恰有 1 人生日”，B=“4 人生日在不同月”，C=“4 人中有 2 人生日在 10 月”.

解　每个人出生的月份有 12 种可能情形，故 4 个人共有 12^4 种情形，即样本点数 $N=12^4$，其中 A,B 所含样本点数分别为 A_4^4, A_{12}^4，而 4 人中有 2 人生日在 10 月共有 C_4^2 种可能，余下的 2 人在其余 11 个月，有 11^2 种可能，由乘法原理知 C 所含样本点数为 $C_4^2 11^2$，得

$$P(A)=\frac{4!}{12^4}\approx 0.0012, P(B)=\frac{A_{12}^4}{12^4}\approx 0.5729, P(C)=\frac{C_4^2 11^2}{12^4}\approx 0.035.$$

注　“生日问题”可归结为有放回抽样概率模型. 该模型还包含“n 封信随机投入 N 个信箱”“n 个人分配到 N 个房间”“n 个球落入 N 个空盒”“从 n 个数字中取 N 个可重复数字”等问题，其解法类似.

例 5　两艘轮船都要停靠同一个泊位，它们可能在一昼夜的任意时刻到达. 设两艘船停靠泊位的时间分别为 1h 与 2h，求有一艘船在停靠泊位时必须等待的概率.

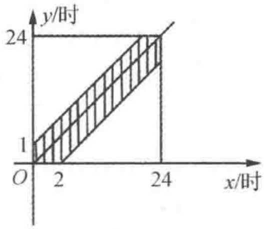

图 1-1

解　以 X 和 Y 分别表示甲、乙两艘船的到达时间，则样本空间为平面区域

$$\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 24, 0\leqslant y\leqslant 24\}.$$

事件 A=“两艘船有一艘需等待泊位”发生的充要条件是

$$0\leqslant X\leqslant Y\leqslant X+1 \text{ 或 } 0\leqslant Y\leqslant X\leqslant Y+2.$$

将图 1-1 中正方形区域和阴影部分区域分别表示为 Ω 和事件 A，则由几何概率的计算式，得

$$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}=\frac{24^2-\frac{1}{2}(23^2+22^2)}{24^2}=\frac{139}{1152}\approx 0.1207.$$

例 6　(蒲丰投针问题)平面上画有等距离的平行线，平行线间的距离为 a $(a>0)$. 向平面内任意投掷一枚长为 $l(0<l<a)$ 的针，试求针与平行线相交的概率.

解　以 x 表示针的中点与最近一条平行线间的距离，θ 表示针与此直线间的交角，则有

$$0\leqslant x\leqslant \frac{a}{2},\ 且\ 0\leqslant \theta\leqslant \pi.$$

即得样本空间为平面区域 $\Omega=\{(\theta,x)\mid 0\leqslant\theta\leqslant\pi,0\leqslant x\leqslant\frac{a}{2}\}$. 而针与平行线相交的充要条件是 $0\leqslant x\leqslant\frac{l}{2}\sin\theta$. 这一不等式确定的区域如图 1-2 所示的阴影部分,于是事件 $A=$"针与平行线相交"的概率为

$$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}=\frac{\int_0^\pi \frac{l}{2}\sin\theta\mathrm{d}\theta}{\pi\cdot\frac{a}{2}}=\frac{2l}{\pi a}.$$

如果 l,a 已知,则以 π 值代入上式即可算得 $P(A)$ 的值. 反过来,如果通过试验求得针与平行线相交的频率 $f_N(A)=\frac{n}{N}$,并用此值代替 $P(A)$,则可得 π 的近似值计算公式:$\pi\approx\frac{2lN}{an}$. 随着计算机科学技术的发展,人们利用计算机模拟所设计的试验,并发展成为新的边缘学科——随机模拟(Simulation),又称蒙特卡洛方法. 此方法现今广泛应用于系统分析设计和管理.

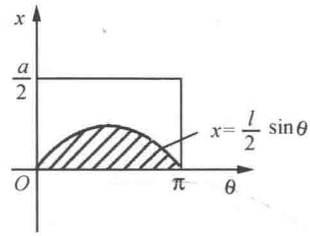

图 1-2

例 7 某城市发行 A,B,C 三种报纸,经调查,订阅 A 报的有 48%,订阅 B 报的有 38%,订阅 C 报的有 30%,同时订阅 A 报和 B 报的有 15%,同时订阅 A 报和 C 报的有 10%,同时订阅 B 报和 C 报的有 8%,同时订阅三种报纸的有 5%. 试求下列概率:

(1) 只订 A 报的;

(2) 只订 A 报和 B 报的;

(3) 只订一种报纸的;

(4) 正好订阅两种报纸的;

(5) 至少订阅一种报纸的;

(6) 至多订阅一种报纸的;

(7) 不订阅这三种报纸的.

解 用 A,B,C 分别表示订阅 A 报、B 报和 C 报的事件,则 $P(A)=0.48$, $P(B)=0.38$, $P(C)=0.30$, $P(AB)=0.15$, $P(AC)=0.10$, $P(BC)=0.08$, $P(ABC)=0.05$.

(1) $P(A\overline{B}\,\overline{C})=P[A(\overline{B+C})]=P[A-A(B+C)]$

$$=P(A)-P(AB)-P(AC)+P(ABC)=0.28.$$

(2) $P(AB\overline{C})=P(AB)-P(ABC)=0.15-0.05=0.10.$

(3) 仿(1)可得 $P(B\overline{A}\,\overline{C})=0.20$,$P(\overline{A}\,\overline{B}C)=0.17$,由(1)可得

$$P(A\overline{B}\,\overline{C}+B\overline{A}\,\overline{C}+C\overline{A}\,\overline{B})=0.28+0.20+0.17=0.65.$$

(4) $P(AC\overline{B})=P(AC)-P(ABC)=0.05$,$P(BC\overline{A})=P(BC)-P(ABC)=0.03$,又由(2)得 $P(AB\overline{C})=0.10$,故 $P(AB\overline{C}+AC\overline{B}+\overline{A}BC)=0.18.$

(5) $P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)=0.88.$

(6) $P(\overline{AB+AC+BC})=1-P(AB+AC+BC)=0.77.$

(7) $P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=1-P(A+B+C)=1-0.88=0.12.$

注　(6)也可这样求:P\{至多订一种报\}$=1-P$\{恰订两种报或三种都订\}$=1-P$\{恰订两种报\}$-P$\{三种都订\}$=1-0.18-0.05=0.77.$

例 8　一批灯泡共 100 只,其中次品率为 10%,从中每次取一只不放回,共取 3 次.求:(1) 第 3 次取得合格品的概率;(2) 第 3 次才取得合格品的概率.

解　(1) 设 A_i="第 i 次取得合格品",$i=1,2,3$.则由古典概型,得

$$P(A_3)=\frac{90\times \mathrm{A}_{99}^2}{\mathrm{A}_{100}^3}=\frac{90\times 99\times 98}{100\times 99\times 98}=0.9.$$

本题也可由抽签原理直接得 $P(A_3)=\frac{90}{100}=0.9.$

(2) 设 A="第 3 次才取得正品",则 $A=\overline{A}_1\,\overline{A}_2\,A_3$,故

$$P(A)=P(\overline{A}_1\,\overline{A}_2\,A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(A_3|\overline{A}_1\,\overline{A}_2)$$
$$=\frac{10}{100}\times\frac{9}{99}\times\frac{90}{98}\approx 0.0083.$$

例 9　为防止意外,在矿内同时设有两种报警系统 A 和 B,每种系统单独使用时,系统 A 有效的概率为 0.92,系统 B 有效的概率为 0.93,在 A 失灵的条件下 B 有效的概率为 0.85,求:

(1) 发生意外时,这两个报警系统至少有一个有效的概率;

(2) 在 B 失灵的条件下 A 有效的概率.

解　设 A="单独使用时系统 A 有效",B="单独使用时系统 B 有效",则 $P(A)=0.92$,$P(B)=0.93$,$P(B|\overline{A})=0.85.$

(1) $P(B|\overline{A})=\frac{P(B\overline{A})}{1-P(A)}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}=0.85,$

即

$$\frac{0.93-P(AB)}{1-0.92}=0.85,$$