TURING 图灵计算机科学丛书

Pearson

计算机程序设计艺术

卷2：半数值算法

（第3版）

[美] 高德纳（Donald E. Knuth）◎著

巫斌 范明 ◎译

The Art of Computer Programming

Vol 2: Seminumerical Algorithms

Third Edition

中国工信出版集团

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING 图灵计算机科学丛书

计算机程序设计艺术
卷2：半数值算法
（第3版）

[美] 高德纳（Donald E. Knuth）◎著
巫斌 范明 ◎译

The Art of Computer Programming
Vol 2: Seminumerical Algorithms
Third Edition

人民邮电出版社
北京

图书在版编目（CIP）数据

计算机程序设计艺术 : 第3版. 卷2, 半数值算法 / (美) 高德纳 (Knuth, D. E.) 著 ; 巫斌, 范明译. -- 北京 : 人民邮电出版社, 2016.7
（图灵计算机科学丛书）
书名原文: The Art of Computer Programming, Vol 2: Seminumerical Algorithms, Third Edition
ISBN 978-7-115-36069-4

Ⅰ. ①计… Ⅱ. ①高… ②巫… ③范… Ⅲ. ①程序设计②电子计算机－算法分析 Ⅳ. ①TP311.1②TP301.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第086191号

内 容 提 要

《计算机程序设计艺术》系列被公认为计算机科学领域的权威之作，深入阐述了程序设计理论，对计算机领域的发展有着极为深远的影响。本书为该系列的第 2 卷，全面讲解了半数值算法，分“随机数”和“算术”两章。书中总结了主要算法范例及这些算法的基本理论，广泛剖析了计算机程序设计与数值分析间的相互联系。

本书适合从事计算机科学、计算数学等各方面工作的人员阅读，也适合高等院校相关专业的师生作为教学参考书，对于想深入理解计算机算法的读者，是一份必不可少的珍品。

◆ 著 [美] 高德纳（Donald E. Knuth）
译 巫 斌 范 明
责任编辑 傅志红
执行编辑 隋春宁 黄志斌
责任印制 彭志环
排版指导 刘海洋
◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市丰台区成寿寺路11号
邮编 100164 电子邮件 315@ptpress.com.cn
网址 http://www.ptpress.com.cn
固安县铭成印刷有限公司印刷
◆ 开本：787×1092 1/16
印张：38.5
字数：1054千字 2016年7月第1版
印数：1－4 000册 2016年7月河北第1次印刷
著作权合同登记号 图字：01-2009-7276号

定价：198.00元

读者服务热线：(010)51095186转600 印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315
广告经营许可证：京东工商广字第 8052 号

版权声明

前　言

亲爱的奥菲莉娅!
这些数很让我头疼：我不知道自己叹息多少次了.
——《哈姆雷特》（第 2 幕，第 2 场，第 120 行）

本书讨论的算法与数值直接相关. 不过我认为把它们称为*半数值算法*也是恰如其分的，因为它们介于数值计算和符号计算之间. 这些算法不仅仅计算了数值问题的答案，还试图很好地适应数字计算机的内部运算. 读者如果对计算机的机器语言没有一定的了解，很多情况下就无法充分体会到算法之美——相应的机器程序的效率是至关重要的，与算法本身密不可分. 为了寻求计算机处理数值的最佳方法，我们既要考虑数值也要研究策略. 因而本书的内容无疑既属于计算数学，也属于计算机科学.

有些在“较高层次”上从事数值分析工作的人可能会认为本书讨论的是系统程序员做的事情，而那些在“较高层次”上从事系统编程工作的人又会认为这些问题是数值分析人员要去考虑的. 但我希望还是会有一些人愿意认真研究本书中讲解的这些基本方法. 虽然这些方法显得层次较低，但它们是用计算机解决强大的数值问题的基础，因此深入了解这些方法十分重要. 本书着重考虑的是计算数学与计算机程序设计之间的接口，这两类技巧的结合使得本书充满了趣味性.

与这套书的其他各卷相比，本书所讨论的内容中，数学内容所占的比例明显要大很多. 多数情况下，书中数学知识的讨论几乎是从零开始的（或者从第 1 卷的结果开始），但有几个小节仍然需要读者具备一定的微积分知识.

本卷包含整套书中的第 3 章和第 4 章. 第 3 章讨论“随机数”，不仅研究了生成随机序列的各种方法，而且还研究了随机性的统计测试，以及一致随机数到其他类型随机量的转换——后者说明了如何在实践中使用随机数. 此外，我还专门用一节内容介绍了随机性本身的特性. 第 4 章意在介绍经过数百年的发展之后，人们在算术运算上都有哪些美妙的发现. 这一章讨论了多种数值表示系统以及它们之间的相互转换，还介绍了浮点数、高精度整数、有理分式、多项式及幂级数的算术运算，包括因式分解和计算最大公因子的问题.

可以以第 3 章或第 4 章的内容为基础，为大学三年级到研究生层次的学生开设一学期的课程. 目前许多学校都没有关于“随机数”和“算术”的课程，但我相信读者可以从这两章的内容中发现其实际教育价值. 根据我自己的经验，这些课程可以很好地向大学生传授初等概率论和数论知识. 这类导论性课程中涉及的内容几乎都与实际应用有着自然的关联，而这些实际应用对学习和理解相应的理论是非常重要的. 此外，每章都给出了一些涉及更深入问题的提示，可以激发学生进一步从事数学研究的兴趣.

除少数内容与第 1 卷介绍的 MIX 计算机有关之外，本书的大部分内容都是自成一体的. 附录 B 列出了本书用到的数学符号，有些与传统数学书中的符号略有不同.

第 3 版前言

本书的第 2 版完成于 1980 年，它可以说是 TEX 和 METAFONT 这两个电子排版原型系统的第一个重要测试实例. 上一版启发我开发和完善了这两个电子排版系统，现在第 3 版又要问世了，我为这两个电子排版系统的成功感到由衷的高兴. 最终我可以使《计算机程序设计艺术》

的各卷内容保持一致的格式，并能够适应印刷技术和显示技术上的变化．新的设置使得我可以在文字上进行数千处的改进，这是我多年来一直想做的校正．

我对新版的文字逐字进行了认真的审阅，力图在保持原有的蓬勃朝气的同时，加入一些可能更成熟的论断．新版增加了几十道新的习题，并为原有的几十道习题给出了改进的新答案．改动可谓无处不在，但最重要的改动集中在 3.5 节（关于随机性的理论保证）、3.6 节（关于可移植的随机数生成程序）、4.5.2 节（关于二进制最大公因数算法）和 4.7 节（关于幂级数的复合与迭代）．

《计算机程序设计艺术》丛书尚未完稿，而有关半数值算法的研究也还在快速发展．因此书中有些部分还带有“建设中”的图标，以向读者致歉——这部分内容还不是最新的．我电脑中的文件里堆满了重要的材料，打算写进第 2 卷最后壮丽无比的第 4 版中，或许从现在算起还需要 16 年的时间．但我必须先完成第 4 卷和第 5 卷，非到万不得已，我不想拖延这两卷的出版时间．

非常感谢在过去 35 年中帮助我搜集素材和改进内容的数百人．准备这一新版本的大部分艰苦工作是由西尔维奥 · 利维和杰弗里 · 奥尔德姆完成的，利维十分专业地编辑了本书的电子文本，奥尔德姆则几乎把所有的插图都转换成了 METAPOST 格式．我修正了细心的读者在第 2 版中发现的所有错误（还有读者未能察觉的一些错误），并尽量避免在新增内容中引入新的错误．但我猜测可能仍然有一些缺陷，我希望能尽快加以改正．因此，我很乐意向首先发现技术性错误、印刷错误或历史知识错误的人按每处支付 $2.56．下列网页上列出了所有已反馈给我的最新勘误：http://www-cs-faculty.stanford.edu/~knuth/taocp.html.

高德纳

加利福尼亚州斯坦福市

1997 年 7 月

对于一本撰写时间长达 8 年的书而言，需要感谢的同事、打字员、学生、老师和朋友太多了．此外，我不想按常规做法免除他们对于书中错误的责任，他们应该帮我纠正这些错误！有时候，他们甚至需要为一些将来被证明是错误的观点负责．不管怎样，我要对这些共事的伙伴们表示感谢．

——爱德华 · 坎贝尔（小）（1975）

“Defendit numerus”（数值是安全的）是傻瓜的格言；
“Deperdit numerus”（数值有毁灭性）是智者的格言．

——查尔斯 · 科尔顿（1820）

习题说明

这套书的习题既可用于自学，也可用于课堂练习．任何人单凭阅读而不运用获得的知识解决具体问题，进而激励自己思考所阅读的内容，就想学会一门学科，即便可能，也很困难．再者，人们大凡对亲身发现的事物才有透彻的了解．因此，习题是这套书的一个重要组成部分．我力求习题的信息尽可能丰富，并且兼具趣味性和启发性．

很多书会把容易的题和很难的题随意混杂在一起．这样做有些不合适，因为读者在做题前想知道需要花多少时间，不然他们可能会跳过所有习题．理查德·贝尔曼的《动态规划》（*Dynamic Programming*）一书就是个典型的例子．这是一本很重要的开创性著作，在书中某些章后“习题和研究题”的标题下，极为平常的问题与深奥的未解难题掺杂在一起．据说有人问过贝尔曼博士，如何区分习题和研究题，他回答说：“若你能求解，它就是一道习题；否则，它就是一道研究题．”

在我们这种类型的书中，有足够理由同时收录研究题和非常容易的习题．因此，为了避免读者陷入区分的困境，我用等级编号来说明习题的难易程度．这些编号的意义如下所示．

等级	说明
00	极为容易的习题，只要理解了文中内容就能立即解答．这样的习题差不多都是可以“在脑子中”形成答案．
10	简单问题，它让你思考刚阅读的材料，决非难题．你至多花一分钟就能做完，可考虑借助笔和纸求解．
20	普通问题，检验你对正文内容的基本理解，完全解答可能需要 15 到 20 分钟．
30	具有中等难度的较复杂问题．为了找到满意的答案，可能需要两小时以上．要是开着电视机，时间甚至更长．
40	非常困难或者很长的问题，适合作为课堂教学中一个学期的设计项目．学生应当有能力在一段相当长的时间内解决这个问题，但解答不简单．
50	研究题，尽管有许多人尝试，但直到我写书时尚未有满意的解答．你若找到这类问题的答案，应该写文章发表．而且，我乐于尽快获知这个问题的解答（只要它是正确的）．

依据上述尺度，其他等级的意义便清楚了．例如，一道等级为 17 的习题就比普通问题略微简单点．等级为 50 的问题，若是将来被某个读者解决了，可能会在本书以后的版本中标记为 40 等，并发布在因特网上的本书勘误表中．

等级编号除以 5 得到的余数，表示完成这道习题的具体工作量．因此，等级为 24 的习题，比等级为 25 的习题可能花更长的时间，不过做后一种习题需要更多的创造性．等级为 46 及以上的习题是开放式问题，有待进一步研究，其难度等级由尝试解决该问题的人数而定．

作者力求为习题指定精确的等级编号，但这很困难，因为出题人无法确切知道别人在求解时会有多大难度；同时，每个人都会更擅长解决某些类型的问题．希望等级编号能合理地反映习题的难度，读者应把它们看成一般的指导而非绝对的指标．

本书的读者群具有不同程度数学教育和素养，因此某些习题仅供喜欢数学的读者使用．如果习题涉及的数学背景大大超过了仅对算法编程感兴趣的读者的接受能力，那么等级编号前会有一个字母 *M*．如果习题的求解必须用到本书中没有详细讨论的微积分等高等数学知识，那么用两个字母 *HM*．*HM* 记号并不一定意味着习题很难．

某些习题前有个箭头 ▸，这表示问题极具启示性，特别向读者推荐. 当然，不能期待读者或者学生做全部习题，所以我挑选出了看起来最有价值的习题.（这并非要贬低其他习题！）读者至少应该试着解答等级 10 以下的所有习题，再去优先考虑箭头标出的那些较高等级的习题.

书后给出了多数习题的答案. 请读者慎用答案，还未认真求解之前不要求助于答案，除非你确实没有时间做某道习题. 在你得出自己的答案或者做了应有的尝试之后，再看习题答案是有教益和帮助的. 书中给出的解答通常非常简短，因为我假定你已经用自己的方法做了认真的尝试，所以只概述其细节. 有时解答给出的信息比较少，不过通常会给较多信息. 很可能你得出的答案比书后答案更好，你也可能发现书中答案的错误，对此，我愿闻其详. 本书的后续版本会给出改进后的答案，在适当情况下也会列出解答者的姓名.

你做一道习题时，可以利用前面习题的答案，除非明确禁止这样做. 我在标注习题等级时已经考虑到了这一点，因此，习题 $n+1$ 的等级可能低于习题 n 的等级，尽管习题 n 的结果只是它的特例.

编号摘要：			
		00	立即回答
		10	简单（一分钟）
		20	普通（一刻钟）
▸	推荐的	*30*	中等难度
M	面向数学的	*40*	学期设计
HM	需要“高等数学”	*50*	研究题

习题

▸ **1.** [*00*] 等级“*M20*”的含义是什么?

2. [*10*] 教科书中的习题对于读者具有什么价值?

3. [*M34*] 欧拉在 1772 年推测，方程 $w^4+x^4+y^4=z^4$ 没有正整数解，但是诺姆 · 埃尔基斯在 1987 年证明，它存在无穷多个解 [见 *Math. Comp.* **51** (1988), 825–835]. 请找出所有整数解，使得 $0 \le w \le x \le y < z < 10^6$.

4. [*M50*] 证明：当 n 为大于 4 的整数时，方程 $w^n+x^n+y^n=z^n$ 无正整数解 w, x, y, z.

习题是最好的学习方法.

——罗伯特 · 雷科德，*The Whetstone of Witte* (1557)

目　录

第 3 章　随机数

当然，任何想用算术方法生成随机数字的人
都是在犯错.
——冯 · 诺依曼（1951）

给出概率，以免别人怀疑你说假话.
——约翰 · 盖伊（1727）

并不需要什么亮光
引领人们运用他们的随机本领.
——约翰 · 欧文（1662）

3.1　引言

在许多不同类型的应用中，“随机选取的”数都是有用的. 例如：

(a)*仿真*. 使用计算机模拟自然现象时，需要使用随机数使得效果更加逼真. 仿真涵盖许多领域，从核物理研究（粒子服从随机碰撞）到运筹学（例如人们相隔随机的时间间隔到达机场）.

(b)*抽样*. 通常，考察所有可能的情况是不切实际的，但是借助随机样本，我们可以理解“典型”行为.

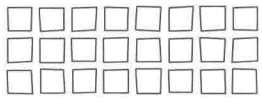
(c) *数值分析*. 人们已经借助随机数，发明了一些精巧的方法，用于解决复杂的数值计算问题. 关于该主题已经出版多部专著.

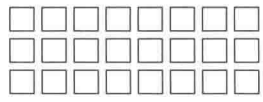
(d) *计算机程序设计*. 为检测计算机算法的有效性，随机值是很好的测试数据. 更重要的是，随机算法离不开随机值，而随机算法常常比确定性算法有用得多. 在这套书中，随机数的这种用法是我们最感兴趣的应用. 正因为如此，我们在第 3 章就研究随机数，然后才介绍其他大部分计算机算法.

(e) *决策*. 据报导，许多管理者都通过掷硬币或投飞镖等来做决定. 谣传有些大学教授也用类似方法给学生打分. 有时，有必要做出完全“无偏的”决定. 在矩阵对策论中，随机性也与最优策略密不可分.

(f) *密码学*. 在多种保密通信方式中，数据需要保密，无偏的二进位源是至关重要的.

(g) *美学*. 少许随机性使得计算机生成的图形和音乐更富有生趣. 例如在某些情况下，下面左边的模式往往比右边的模式更吸引人.［参阅高德纳，*Bull. Amer. Math. Soc.* **1** (1979), 369.］





(h) *娱乐*. 几乎人人都喜欢掷骰子、洗牌、转动轮盘等消遣活动. 鉴于随机数的这种传统用法，人们使用“蒙特卡罗方法”一词来泛指一切使用随机数的算法.

考虑随机数的人总是爱陷于“‘随机’一词的含义是什么”的哲学讨论. 在某种意义下，所谓“一个随机数”根本不存在. 试问，2 是随机数吗？相反，我们说具有特定分布的、独立随

机数的序列，意指每个数都是随机得到的，与该序列中的其他数无关，并且每个数都以特定概率落入任意给定的取值范围.

在有限数集上的均匀分布中，每个可能的数都是等可能的. 除非另作明确说明，否则分布都视为均匀分布.

在一个（均匀的）随机数字序列中，0 到 9 这十个数字的每一个出现的比率都大约是 $\frac{1}{10}$. 每两个固定数字出现比率都大约是 $\frac{1}{100}$，以此类推. 但是，如果我们真的取一个具有一百万位数字的真正随机的序列，那么它并非总是恰好包含 100 000 个 0，100 000 个 1，等等. 事实上，这种可能性相当小，许多个这种序列平均起来才会具有这种性质.

所有一百万位数字的序列都具有相同的可能性. 因此，如果我们随机选取一百万个数字，并且前 999 999 个碰巧都是 0，则在真正随机的情况下，最后一个数字恰好为 0 的可能性仍然只有 $\frac{1}{10}$. 许多人会觉得这些话自相矛盾，但实际上它们并无矛盾.

随机性有很多种严格的抽象定义方法，3.5 节将继续讲解这一有趣的主题. 现在，我们只需要直观地理解这一概念就足够了.

许多年前，需要随机数的科研工作者会从“充分搅匀的桶”中摸球，或者掷骰子，或者抽牌. 1927 年，伦纳德·蒂皮特公布了一张“从人口普查报告中随机抽取”的、超过 40 000 位随机数字的表. 自那以后，人们制造了一些设备用来机械地生成随机数. 1939 年，莫里斯·肯德尔和伯纳德·巴宾顿-史密斯使用第一台这样的机器，产生了 100 000 位随机数字的表. Ferranti Mark I 计算机于 1951 年首次投入使用，它有一条内置指令，使用电阻噪声发生器，把 20 个随机位送入累加器. 此前，图灵曾经建议使用这种做法. 1955 年，美国兰德公司公布了借助另一台特殊设备得到的一百万位随机数字的表，这份数表得到广泛使用. 多年来，英国溢价储蓄债券彩票一直使用著名的随机数生成机器 ERNIE，用来产生中奖号码. [弗洛伦丝·戴维在《游戏、上帝和赌博》(*Games, Gods, and Gambling* (1962)) 中介绍了早期的历史情况. 又见肯德尔和巴宾顿-史密斯，*J. Royal Stat. Soc.* **A101** (1938), 147–166; **B6** (1939), 51–61; 关于 Mark I，见西蒙·拉文顿，*CACM* **21** (1978), 4–12; 关于兰德公司随机数表，见 *Math. Comp.* **10** (1956), 39–43; 关于 ERNIE，见威廉·汤姆森，*J. Royal Stat. Soc.* **A122** (1959), 301–333.]

计算机出现之后不久，人们就开始寻找在计算机程序中得到随机数的高效方法. 可以使用一张随机数表，但是这种方法的效用有限，因为需要内存空间和输入时间，表可能太短，制作和维护随机数表也有点麻烦. 可以把 ERNIE 之类机器连到 Ferranti Mark I 之类计算机上，但是事实证明效果并不令人满意，因为测试程序时，不可能正确地重现计算；此外，这种机器容易出现很难检测的故障. 20 世纪 90 年代，由于技术进步，可以轻松获得十亿个通过测试的随机字节，因此随机数表再次有了实用意义. 1995 年，乔治·马尔萨利亚制作了一张包含 650 兆随机字节的演示盘，帮助随机数表复活. 这些随机字节来自一个噪声二极管电路的输出，混以经过确定扰码的说唱音乐.（他称之为“黑白噪声”.）

由于早期机械方法的不足，人们开始关注如何使用计算机的普通算术运算产生随机数. 大约在 1946 年，冯·诺依曼最先提议使用这种方法. 他的想法是，取前一个随机数的平方，并取出中间几位数字作为新的随机数. 例如，如果我们要生成具有 10 位数字的数，已知前一个数是 5772156649，则我们求它的平方，得到

$$33317792380594909201,$$

于是，下一个数为 7923805949.

这种方法的问题很明显：既然每一个数都完全由前一个数所确定，用这种方法生成的序列怎么可能是随机的？（见本章开始处冯·诺依曼的评述.）答案是：这个序列*不是*随机的，但是它

看上去是. 在一般应用中，前后两个数之间虽然有实际联系，但不具有实际影响，因此，非随机性并没有什么实际缺点. 直观看来，取平方的中间几位数，已经相当充分地扰乱了前一个数.

在深奥的科技文献中，像这类以确定方法生成的序列，通常称作伪随机（pseudorandom）或准随机（quasirandom）序列. 在本书的大部分地方，我们将简单地称它们为随机序列，但要明白它们只是看上去是随机的，反正这或许已经是我们对于随机序列的最高评价了. 在几乎所有的应用中，只要细心选择合适的方法，在计算机上确定地生成的随机数效果都相当好. 当然，确定性序列并非总是正确的解，彩票开奖的时候肯定不应该用它取代 ERNIE.

事实上，业已证明冯·诺依曼最初的“平方取中法”是一种相对较差的随机数源. 危险在于序列容易陷入定式，也就是元素会以短的循环周期重复出现. 例如，假如序列中出现一次零，后面就都是零了.

20 世纪 50 年代早期，一些人曾用平方取中法进行实验. 使用 4 位，而不是 10 位数字，福赛斯尝试了 16 种不同的初值，发现其中 12 种导致序列最终陷入循环 6100, 2100, 4100, 8100, 6100, ...，还有 2 种退化为零. 尼古拉斯·梅特罗波利斯进行了更全面的测试，主要使用二进制记数系统. 结果表明，当使用 20 位数时，平方取中法的序列可能退化为 13 种不同的循环，最长的周期为 142.

如果检测到零，很容易用一个新值重新开始平方取中法；但是长循环没那么容易检测和避免. 习题 6 和 7 讨论了一些有趣方法，使用极少量内存，检测周期序列的循环.

平方取中法的一个理论缺陷在习题 9 和 10 中给出. 另一方面，使用 38 位二进制数，梅特罗波利斯得到了一个大约有 750 000 个数且尚未退化的序列，结果令人满意，这 $750\,000 \times 38$ 位数字通过了随机性的统计检验. [*Symp. on Monte Carlo Methods* (Wiley, 1956), 29–36.] 这一实验表明，平方取中法能够给出有用的结果，但是如果没有精心进行繁复计算，信任这种方法其实相当不稳妥.

在第一次编写本章时，正使用的许多随机数生成器都不太好. 人们习惯于回避研究这样的子程序，不怎么令人满意的老方法在程序员中盲目地代代相传，而用户对方法原来的局限性一无所知. 本章，我们将会看到，尽管必须足够审慎才能避免常见错误，但是关于随机数生成器的最重要事实并不难把握.

发明一个完美的随机数源并不容易. 1959 年，我曾试图用如下方法创建一个想象中的好生成器，因而对此深有体会.

算法 K（“超级随机”数生成器）. 给定一个 10 位十进制数 X，该算法可以把 X 改变成想象中的随机序列中的下一个数. 尽管该算法预期可以产生相当随机的序列，但是下面给出的理由表明它其实并不太好.（读者不必认真研究该算法，只需注意该算法多么复杂，特别是注意步骤 K1 和 K2.）

K1. [选择迭代次数.] 置 $Y \leftarrow \lfloor X/10^9 \rfloor$，$X$ 的最高位有效数字.（步骤 K2~K13 将恰好执行 $Y+1$ 次，也就是说，我们进行随机次随机变换.）

K2. [选择随机步骤.] 置 $Z \leftarrow \lfloor X/10^8 \rfloor \bmod 10$，$X$ 的次高位有效数字. 转到步骤 K$(3+Z)$（即随机跳转到程序的某一步）.

K3. [确保 $\geq 5 \times 10^9$.] 如果 $X < 5000000000$，则置 $X \leftarrow X + 5000000000$.

K4. [平方取中.] 用 $\lfloor X^2/10^5 \rfloor \bmod 10^{10}$，即用 X 的平方的中部，取代 X.

K5. [乘.] 用 $(1001001001\,X) \bmod 10^{10}$ 取代 X.

K6. [求伪补.] 如果 $X < 100000000$，则置 $X \leftarrow X + 9814055677$；否则置 $X \leftarrow 10^{10} - X$.

K7. [两半互换.] X 的低 5 位数字与高 5 位数字互换，即置 $X \leftarrow 10^5(X \bmod 10^5) + \lfloor X/10^5 \rfloor$，也就是 $(10^{10}+1)X$ 的中间 10 位数字.

K8. [乘.] 与步骤 K5 相同.

K9. [数字减 1.] 把 X 的十进制表示的每位非零数字减 1.

K10. [99999 修改.] 如果 $X < 10^5$，则置 $X \leftarrow X^2 + 99999$；否则置 $X \leftarrow X - 99999$.

K11. [规格化.]（此步，X 不可能为零.）如果 $X < 10^9$，则置 $X \leftarrow 10X$，并重复此步骤.

K12. [修改的平方取中.] 用 $\lfloor X(X-1)/10^5 \rfloor \bmod 10^{10}$，即用 $X(X-1)$ 的中间 10 位数字，取代 X.

K13. [重复?] 如果 $Y > 0$，则 Y 减 1，并返回步骤 K2. 如果 $Y = 0$，则算法终止，X 为所求的“随机”值. ∎

（对应于这个算法的机器语言程序刻意设计得极其复杂，以至于没有附加的注释，人们根本不知道它在做什么.）

算法 K 有这么复杂麻烦的步骤，它似乎理应产生几乎无穷多个完全随机的数，是吗？不是的！事实上，当该算法第一次在计算机上运行时，它几乎立即收敛到十位数值 6065038420，由于异乎寻常的巧合，该数被算法 K 变换到自身（见表 1）. 使用另一个初值，序列在 7401 个值后开始重复，循环周期的长度为 3178.

表 1 异乎寻常的巧合：算法 K 把数 6065038420 变换到自身

步骤	X（之后）	
K1	6065038420	
K3	6065038420	
K4	6910360760	
K5	8031120760	
K6	1968879240	
K7	7924019688	
K8	9631707688	
K9	8520606577	
K10	8520506578	
K11	8520506578	
K12	0323372207	$Y = 6$
K6	9676627793	
K7	2779396766	
K8	4942162766	
K9	3831051655	
K10	3830951656	
K11	3830951656	
K12	1905867781	$Y = 5$
K12	3319967479	$Y = 4$
K6	6680032521	
K7	3252166800	
K8	2218966800	
K9	1107855700	
K10	1107755701	
K11	1107755701	
K12	1226919902	$Y = 3$
K5	0048821902	
K6	9862877579	
K7	7757998628	
K8	2384626628	
K9	1273515517	
K10	1273415518	
K11	1273415518	
K12	5870802097	$Y = 2$
K11	5870802097	
K12	3172562687	$Y = 1$
K4	1540029446	
K5	7015475446	
K6	2984524554	
K7	2455429845	
K8	2730274845	
K9	1620163734	
K10	1620063735	
K11	1620063735	
K12	6065038420	$Y = 0$

这件事的教训是：随机数不应该用随机选择的方法生成，应该使用某种理论.

在以下几节，我们将考察比平方取中法和算法 K 更好的随机数生成器. 对应的序列确保具有令人满意的某些随机性质，并且不会出现退化. 我们将详细考察这种看似随机的行为的原由，并且考虑随机数的处理方法，例如探讨如何在计算机程序中模拟纸牌的洗牌.

3.6 节总结本章，并且列举一些参考文献源.

习题

▶ **1.** [*20*] 假设你不使用计算机，想随机地得到一个十进制数字. 下面哪些方法合适?

(a) 将手指随机地伸到一本电话号码簿的某两张纸之间，翻开电话簿，并使用选定页上第一个数的个位数字.

(b) 与 (a) 相同，但使用*页码*的个位数字.

(c) 滚动一个正二十面体骰子，其 20 个面用 0, 0, 1, 1, ..., 9, 9 标记. 当骰子停下不动时，使用顶部数字.（建议使用铺毡的硬桌面滚动骰子.）

(d) 用放射源照射盖革计数器一分钟（实验者要注意防护），并使用计数结果的个位数字. 假设盖革计数器用十进制数显示计数，并且计数初始化为零.

(e) 扫一眼你的手表，如果秒针在 $6n$ 和 $6(n+1)$ 之间，则选择数字 n.

(f) 请一位朋友想一个随机数字，并使用他给出的数字.

(g) 请一位敌人想一个随机数字，并使用他给出的数字.

(h) 假设 10 匹马参加比赛，而你对它们的实力一无所知. 以任意方式对这些马用数字 0 到 9 编号，并使用比赛获胜的马的数字.

2. [*M22*] 在一个一百万位十进制数字的随机序列中，每个可能的数字都恰有 100 000 个的概率是多少?

3. [*10*] 在平方取中法中，1010101010 的下一个数是什么?

4. [*20*] (a) 执行算法 K 的步骤 K11 时，为什么 X 的值不可能为零? 如果 X 的值可能为零，该算法会有什么错误? (b) 使用表 1 推导出，用初值 $X = 3830951656$ 反复使用算法 K 将发生什么.

5. [*15*] 试解释，如果人们事先知道算法 K 产生的任何序列（即便表 1 给出的巧合不出现）最终都会表现出周期性，那么在任何情况下，都不能期望算法 K 提供无限多个随机数?

▶ **6.** [*M21*] 假设我们想产生一个整数序列 $X_0, X_1, X_2, \ldots$，其中 $0 \le X_n < m$. 令 $f(x)$ 是任意函数，使得 $0 \le x < m$ 蕴涵 $0 \le f(x) < m$. 考虑由规则 $X_{n+1} = f(X_n)$ 形成的序列.（例子是平方取中法和算法 K.）

(a) 证明序列最终都是周期的：存在数 λ 和 μ，使得诸值

$$X_0,\ X_1,\ \ldots,\ X_\mu,\ \ldots,\ X_{\mu+\lambda-1}$$

是不同的，但当 $n \ge \mu$ 时 $X_{n+\lambda} = X_n$. 找出 μ 和 λ 的最大和最小的可能值.

(b)（罗伯特 · 弗洛伊德）证明：存在 $n > 0$ 使得 $X_n = X_{2n}$，并且这样的 n 的最小值在区间 $\mu \le n \le \mu + \lambda$ 中. 此外，X_n 的值是唯一的，即如果 $X_n = X_{2n}$，并且 $X_r = X_{2r}$，则 $X_r = X_n$.

(c) 使用 (b) 中的思想设计一个算法，对任意给定的函数 f 和任意给定的 X_0，只用 $O(\mu+\lambda)$ 步和有限多个内存单元，计算 μ 和 λ.

▶ **7.** [*M21*]（理查德 · 布伦特，1977）令 $\ell(n)$ 为小于或等于 n 的 2 的最大幂. 这样，例如 $\ell(15) = 8$，而 $\ell(\ell(n)) = \ell(n)$.

(a) 用习题 6 的记号，证明存在 $n > 0$ 使得 $X_n = X_{\ell(n)-1}$. 找出一个公式，用周期数 μ 和 λ 表示这样的最小的 n.

(b) 使用这一结果设计一个算法，可以与任何 $X_{n+1} = f(X_n)$ 类型的随机数生成器结合使用，防止陷入无限循环. 你的算法应该计算周期长度 λ，并且只使用少量内存空间——不能简单地存储所计算的所有序列值!

8. [*23*] 对于两位十进制数的情况，彻底考察平方取中法. (a) 该过程初始值可以是 100 个可能值 00, 01, ..., 99 中的任意一个. 这些值中有多少个最终导致重复的循环 00, 00, ...? [例如：从 43 开始，得到序列 43, 84, 05, 02, 00, 00, 00, ...] (b) 有多少种可能的最终循环? 最长循环的长度是多少? (c) 哪个或者哪些初始值在序列重复之前将产生最多不同元素?

9. [*M14*] 证明使用 $2n$ 位 b 进制数的平方取中法具有如下缺点：如果在序列中，有一个数的前 n 位数字为 0，则后继数将变得越来越小，直至重复地出现零.

10. [*M16*] 在上一题的假设下，如果 X 的后 n 位数字为零，那么 X 之后的数满足什么结论? 如果后 $n+1$ 位数字为零呢?

▶ **11.** [*M26*] 考虑具有习题 6 所描述形式的随机数生成器的序列. 如果随机地选择函数 $f(x)$ 和 X_0 的值，换言之，如果我们假定 m^m 个可能的函数 $f(x)$ 都是等可能的，m 个可能的 X_0 值也都是等可能的，那么序列最终退化为长度为 $\lambda = 1$ 的循环的概率是多少? [注记：由这一问题的假定，可以自然地设想这种类型的“随机的”随机数生成器. 诸如算法 K 这样的方法可望具有类似表现. 本题的答案可以度量表 1 的偶然性实际上有多大.]

▶ **12.** [*M31*] 在上一题的假设下，最终循环的平均长度是多少? 在出现循环之前，序列的平均长度是多少? (用习题 6 的记号，我们希望考察 λ 和 $\mu + \lambda$ 的平均值.)

13. [*M42*] 如果 $f(x)$ 是在习题 11 意义下随机选定的函数，那么通过改变开始值 X_0 得到的最长循环的平均长度是多少? [注记：在 $f(x)$ 是随机排列情况下，我们已经研究过类似问题，见习题 1.3.3–23.]

14. [*M38*] 如果 $f(x)$ 是在习题 11 意义下随机选定的，那么通过改变开始值可以得到的不同的最终循环的平均个数是多少? [见习题 8(b).]

15. [*M15*] 如果 $f(x)$ 是在习题 11 意义下随机选定的，那么不论如何选择 X_0，最终循环长度不为 1 的概率是多少?

16. [*15*] 一个像习题 6 那样产生的序列最多在产生 m 个值之后开始重复. 假设我们推广这种方法，使得 X_{n+1} 依赖于 X_{n-1} 和 X_n；形式定义为，令 $f(x, y)$ 是一个函数，使得 $0 \le x, y < m$ 蕴涵 $0 \le f(x, y) < m$. 序列用如下方法构造：任意选取 X_0 和 X_1，然后对于 $n > 0$，令

$$X_{n+1} = f(X_n, X_{n-1}).$$

在这种情况下，可能得到的最大周期是多少?

17. [*10*] 推广上一题的情况，使得 X_{n+1} 依赖于它前面的 k 个值.

18. [*M20*] 发明一种类似于习题 7 的方法，找出习题 17 中讨论的一般形式下的随机数生成器的循环.

19. [*HM47*] 对于更一般的情况，即 X_{n+1} 依赖于它前面的 k 个值，m^{m^k} 个函数 $f(x_1, \ldots, x_k)$ 视为等可能的，求解习题 11 到 15 的渐近结果. [注记：产生最大周期的函数个数在习题 2.3.4.2–23 中分析过.]

20. [*30*] 以某些非负数 $X < 10^{10}$ 为初始值，算法 K 最终可以得到表 1 中那个能变换到自身的数. 找出所有这些 X.

21. [*40*] 证明或证伪：算法 K 定义的映射 $X \mapsto f(X)$ 恰有 5 个循环，长度分别为 3178, 1606, 1024, 943 和 1.

22. [*21*] (海因里希 · 罗列斯奇克) 对于随机函数 f，如果使用序列 $f(0), f(1), f(2), \ldots$ 生成随机数，而不是使用 $x_0, f(x_0), f(f(x_0))$ 等，这样做合理吗?

▶ **23.** [*M26*] (多米尼克 · 福阿塔和艾梅 · 富克斯，1970) 证明：习题 6 的 m^m 个函数 $f(x)$ 中的每一个都可以表示成具有如下性质的序列 $(x_0, x_1, \ldots, x_{m-1})$.

(i) $(x_0, x_1, \ldots, x_{m-1})$ 是 $(f(0), f(1), \ldots, f(m-1))$ 的一个排列.
(ii) $(f(0), \ldots, f(m-1))$ 可以唯一地从 $(x_0, x_1, \ldots, x_{m-1})$ 重构.
(iii) 出现在 f 的循环中的元素为 $\{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}\}$，其中 k 是使得 k 个元素互不相同的最大下标.
(iv) $x_j \notin \{x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}\}$ 蕴涵 $x_{j-1} = f(x_j)$，除非 x_j 是 f 的循环中的最小元素.

(v) $(f(0), f(1), \ldots, f(m-1))$ 是 $(0, 1, \ldots, m-1)$ 的一个排列，当且仅当 $(x_0, x_1, \ldots, x_{m-1})$ 表示 1.3.3 节“一种不寻常的对应”的排列的*逆*.

(vi) $x_0 = x_1$ 当且仅当 $(x_1, \ldots, x_{m-1})$ 表示习题 2.3.4.4–18 构造的定向树，其中 x 的父母为 $f(x)$.