数学奥赛辅导丛书

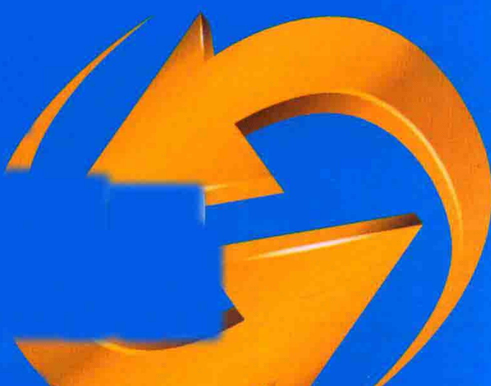
第二辑

概率与期望

Gailü Yu Qiwang

第2版

单 墫 著



中国科学技术大学出版社

数学奥赛

概率与期望

第2版

单 墫 著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书以排列与组合的知识为基础，通过78个问题来阐述概率论的内容、方法及意义，着重介绍概率与期望两个基本概念.

本书问题有趣，叙述深入浅出、语句流畅，是一本极难得的课外读物.

图书在版编目(CIP)数据

概率与期望/单墫著. —2版. —合肥：中国科学技术大学出版社，2012.8

(数学奥赛辅导丛书·第二辑)

ISBN 978-7-312-03074-1

Ⅰ.概…　Ⅱ.单…　Ⅲ.①概率论—高中—教学参考资料　②数学期望—高中—教学参考资料　Ⅳ.G634.663

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第129616号

中国科学技术大学出版社出版发行

地址：安徽省合肥市金寨路96号，230026

网址：http://press.ustc.edu.cn

合肥学苑印务有限公司

全国新华书店经销

*

开本：880 mm×1230 mm　1/32　印张：7.75　字数：172千

2005年4月第1版　2012年8月第2版　2012年8月第2次印刷

定价：19.50元

再版前言

“上帝是掷骰子的吗?”这是爱因斯坦与海森堡、玻尔等人争论时发出的著名疑问.

过去众多科学家(包括爱因斯坦)相信因果决定律.认为凡果必有因,一定的因必然导致一定的果.但量子科学的发展表明偶然的作用也是十分巨大的.

研究偶然就需要概率论与统计学.

这本小册子当然不可能全面介绍概率论与统计学.它的目的在第1版前言中已经说过,只是着重介绍概率与期望两个基本概念.这次再版增加了约1/5的篇幅,由原来的65节扩充到78节,习题也加至108个,凑足“天罡地煞”之数.一些节(如原来第49节“分赌注”)做了大幅度的修改.增加的内容主要在数学期望方面.

概率论中有很多争议,如贝叶斯公式,贝式奇论等.自从柯尔莫哥洛夫建立概率论的公理体系统,这种争议已经大为减少.

这次增加的第74节“改一改”,也是一个颇有争议的问题.对这类问题的讨论,应持宽容态度,不必急于辩证是非.

作　者

前　言

概率论是一个重要的数学分支，应用也极为广泛，所以不仅高等学校理工科必须学习，而且现在它也进入了我国中学教材.

这本小册子，通过问题来阐述概率论的内容、方法与意义，着重介绍两个重要概念：概率、数学期望（简称期望）. 全书共 65 节，也就是至少 65 个问题，此处还附有习题 107 个，习题均有解答.

这本小册子，是一本课外读物，不是教科书，它可以作为教科书的延伸与补充，目的是为了提高学习的兴趣，开拓眼界，有些问题的讨论稍稍深入，可作探索或研究性学习的内容，初读时如觉得困难，可以略去.

我们假定读者具备排列与组合的知识，如果正在学习或已经学过课本上概率部分的内容，当然更好. 不过，课本上已有的内容，我们尽量少说，以免重复.

这本小册子，能否在您手中，是一件随机事件. 我不知道它发生的概率有多大，期望它能够到您的手中，这表明您与它特别有缘.

作　者

目　　次

0　基本知识

本节罗列概率论的一些术语及基本知识，以便读者查阅. 但阅读本书时，并不要求读者预先知道以下知识. 相反的，通过阅读，读者可以逐步学到这些内容，而且不是教条，全是活生生的例子. 牛顿说得好："在一定的意义上，例子比定律更重要". 希望读者喜欢本书的例题，享受读书的愉快.

1. **样本点**：一次试验（例如掷骰子），可能有多种结果，每个结果称为一个样本点，也称为基本事件.

2. **基本事件**：同 1.

3. **样本空间**：样本点的集合，称为样本空间，也就是基本事件的总体. 本书记为 I.

4. **随机事件**：样本空间的子集称为随机事件，简称事件.

5. **事件**：同 4.

6. **必然事件**：在试验中必然发生的事件，即样本空间 I 自身. 它的概率为 1，即 $P(I)=1$.

7. **不可能事件**：不可能发生的事件，即空集 $\varnothing$. 它发生的概率为 0，即 $P(\varnothing)=0$.

8. **互斥事件**：事件 A、B 不能同时发生，即 $A\cap B=\varnothing$，则称 A、B 为互斥事件，也称为互不相容的事件.

9. **互不相容的事件**：同 8.

10. **和事件**：$A\cup B$ 称为事件 A 与 B 的和事件.

11. **积事件**：$A\cap B$ 称为事件 A 与 B 的积事件，也简记为 AB.

12. **概率**：概率是样本空间 I 中的一种测度，即对每一个事件 A，有一实数与它对应，记为 $P(A)$，具有以下三条性质：

(1) $P(A)\geqslant 0$(非负性)；

(2) $P(I)=1$；

(3) 在 A、B 为互斥事件时，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$(可加性).

13. **频率**：在同样的条件下进行 n 次试验，如果事件 A 发生 m 次，那么就说 A 发生的频率为 m/n.

14. **古典概型**：如果试验有 n 种可能的结果，并且每一种结果发生的可能性都相等，那么这种试验称为古典概型，也称为等可能概型，其中每种结果发生的概率都等于 $1/n$.

15. **等可能概型**：同 14.

16. **对立事件**：如果事件 A、B 满足

$$A\cap B=\varnothing,\quad A\cup B=I,$$

那么 A、B 称为对立事件，并将 B 记为 $\bar{A}$. 我们有一个常用公式

$$P(\bar{A})=1-P(A).$$

17. **条件概率**：在事件 A 已发生的条件下，事件 B 发生的概率称为条件概率，记为 $P(B|A)$. 我们有

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A).$$

即

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

注意 $P(B|A)$，$P(B)$，$P(A|B)$的不同. $P(B)$是事件 B 发

生的概率(没有条件);$P(B|A)$是 A 已经发生的条件下,B 发生的概率;$P(A|B)$是 B 已经发生的条件下,A 发生的概率.

18. **独立事件**:如果事件 A 是否发生,对于事件 B 的发生没有影响,即

$$P(B \mid A) = P(B),$$

那么称 A、B 为独立事件.易知这时

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

并且

$$P(A \mid B) = P(A),$$

即 B 是否发生,对于 A 的发生没有影响.所以事件 A、B 是互相独立的.

19. **全概率公式**:如果样本空间 I 可以分拆为 $B_1,B_2,\cdots,B_n$,即

$$B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = I,$$

并且

$$B_i \cap B_j = \varnothing \quad (1 \leqslant i < j \leqslant n),$$

那么事件 A 发生的概率

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)P(B_i).$$

20. **贝叶斯(Bayes)公式**:设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是I 的分拆.在已知所有的 $P(B_i)$与 $P(A|B_i)(i=1,2,\cdots,n)$时,可用公式

$$P(B_j \mid A) = \frac{P(AB_j)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)P(B_i)}$$

求出 $P(B_j|A)(j=1,2,\cdots,n)$.这个公式称为贝叶斯公式.

21. **随机变量**:随机变量 X 是样本空间I 上的函数,即对样

本空间 I 中的每一个样本点 e，有一个确定的实数 $X(e)$ 与 e 对应，$X=X(e)$ 称为随机变量.

22. **数学期望**：设 X 是随机变量，则

$$E(X)=\sum_{e\in I}X(e)P(e)$$

称为 X 的数学期望.其中 e 跑遍样本空间 I 的所有样本点，$P(e)$ 是 e 的概率.

如果 a 是常数，那么

$$E(aX)=aE(X).$$

如果 X、Y 是两个随机变量，那么

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y).$$

1 抛 硬 币

2004 年欧洲杯足球赛，首场是希腊对葡萄牙. 主裁判示意两队队长走近，询问他们谁来猜结果，然后掏出一枚硬币，高高抛起，落下的是正面，正面是希腊队队长猜测的结果. 于是便由希腊选择（上半场）场地. 这场比赛出人意料，希腊以 2∶1 战胜了葡萄牙.

假定硬币是均匀的，出现正面与出现反面的机会应当相等，即一半对一半，也就是说，出现正面与反面的机会都是 1/2.

这里所说的机会，在数学中称为概率（也译作或然率，几率. 后一名称在分子物理学中经常采用）.

如果一个试验有 n 个可能的结果，并且每个结果出现的可能性都相等，而其中有 m 个结果属于事件 A，那么我们就说事件 A 的概率是 m/n，并记为 $P(A)=m/n$，$P(A)$表示事件 A 的概率.

例如在抛硬币时，有两个可能的结果：正面与反面，$n=2$. 用 A 表示出现正面，B 表示出现反面，那么

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{2}.$$

现将一枚硬币抛掷 3 次. 求：

(1) 恰有一次出现正面的概率；

（2）至少有一次出现正面的概率.

*　　*　　*　　*

（1）抛掷3次，共有 $2^3=8$ 种结果，即

正正正　正反正　反正正　反反正

正正反　正反反　反正反　反反反

其中有3种情况恰有一次出现正面，所求概率为3/8.

一般地，抛掷 n 次，有 2^n 种情况，其中正面恰出现 k 次的情况为 C_n^k，所以正面恰出现 k 次的概率为

$$\frac{C_n^k}{2^n}.$$

（2）在上面的8种结果中，只有1种3次都不出现正面，其他7种都有正面出现，所求概率为7/8.

一般地，抛掷 n 次，不出现正面的概率为 $1/2^n$，至少出现一次正面的概率为 $(2^n-1)/2^n$.

上面说掷一次硬币，出现正面与反面的概率都是1/2，并不是说抛一次硬币中，有1/2次是正面，1/2次是反面，次数只能是整数.每抛一次，结果不是正面就是反面，不会有1/2的正面与1/2的反面.但如果抛很多次，那么其中正面与反面出现的次数应当大致相等.这件事，似乎显然，却也有不少认真的人认真地做过试验.例如，法国的文化名人蒲丰（Buffon，1707～1788）的试验结果如下：

次数	正面	频率
4 040	2 048	0.506 9

这里的（正面出现的）频率指正面出现的次数与总次数的比，即2 048/4 040.

另一位统计学家 K·皮尔逊(Pearson，1857～1936)更为认真.他做了两次试验，结果如下：

次数	正面	频率
12 000	6 019	0.501 6
24 000	12 012	0.500 5

由此可见，正面出现的机会的确约占 1/2(即 0.5)，而且随着抛掷次数的增加，频率趋于概率 1/2.

2 名将狄青

北宋名将狄青率兵去打侬智高.出战之前,他召集将士说:"这里有 100 枚铜币,我要将它们抛在地上,如果全部正面朝上,那就表明天助我们,这一仗必胜无疑."说罢便默默祈祷一番,然后将钱猛地抛出,居然 100 枚铜币个个正面朝上!

将士们欢声如雷.狄青也大为高兴,说:"且将这 100 枚铜币钉在地上,待我们凯旋时再到这里庆贺一番."

掷 100 枚铜币,全部正面朝上,概率当然很小.请算一下这件事发生的概率是多少?

* * * *

共有 2^{100} 种可能结果,而全部正面朝上仅有唯一的 1 种.

所求概率为

$$\frac{1}{2^{100}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{100}=7.88\cdots\times10^{-31}.$$

粗糙的估计可用 $2^{10}=1\ 024\approx10^{3}$,所以

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{100}\approx10^{-30}.$$

即小数点后 29 个 0,然后 1 个 1.

概率这样小的事竟然发生,无怪将士们以为这是"天意".

狄青果然获胜回来,吩咐士兵将铜币全部拾起来,大家才发现铜币是特制的,两面一样,都是"正面",所以狄青一掷,铜币全