随机过程及其应用

何凤霞　陈秋华　叶振军　编著

Stochastic Processes and Their Applications

经济管理出版社
ECONOMY & MANAGEMENT PUBLISHING HOUSE

本书受国家自然科学基金面上项目No.11231010，11471223
北京市教委重点项目No.KZ201410028030资助

随机过程及其应用

何凤霞　陈秋华　叶振军　编著

Stochastic Processes and Their Applications

经济管理出版社
ECONOMY & MANAGEMENT PUBLISHING HOUSE

图书在版编目（CIP）数据

随机过程及其应用/何凤霞，陈秋华，叶振军编著．—北京：经济管理出版社，2016.2
ISBN 978－7－5096－4229－0

Ⅰ.①随… Ⅱ.①何… ②陈… ③叶… Ⅲ.①随机过程 Ⅳ.①O211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 021183 号

组稿编辑：杨雅琳
责任编辑：杨雅琳
责任印制：黄章平
责任校对：赵天宇

出版发行：经济管理出版社
（北京市海淀区北蜂窝 8 号中雅大厦 A 座 11 层　100038）
网　　址：www.E－mp.com.cn
电　　话：（010）51915602
印　　刷：北京九州迅驰传媒文化有限公司
经　　销：新华书店
开　　本：720mm×1000mm/16
印　　张：12.75
字　　数：243 千字
版　　次：2016 年 7 月第 1 版　　2016 年 7 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978－7－5096－4229－0
定　　价：58.00 元

前 言

随机过程是以动态随机现象为研究对象的科学，随机过程的理论和方法已广泛地应用于物理、生物、通信、管理、经济等各个领域，并且显示出越来越重要的作用。

本教材基于随机过程的应用，侧重于介绍随机过程的基本理论和方法，略去一些艰深的定理证明，叙述力求简单易懂、逻辑清晰，所有的问题配以恰当的例题帮助理解，以方便学习者能够较快地了解并掌握随机过程基本原理，且能够用于解决实际问题。

全书共分为九章。第一章简单回顾了概率论的基本知识，同时补充了特征函数、全期望公式、推广的全概率公式和乘法公式等随机过程学习中需要了解的一些定理和结论。第二章介绍了随机过程的基本概念以及基本过程的分类。第三章、第四章、第五章分类介绍了泊松过程、马尔可夫过程和维纳过程。第六章介绍了随机分析，这是研究平稳过程必备的基础。第七章和第八章讨论了平稳过程的各态历经性和谱分析。第九章介绍了随机过程在金融中的一个应用。

本教材适合工科类和管理类的研究生以及相关课程的教师使用，也适合数学系以及有高等数学、概率论和积分变换基础的本科生学习。不同专业的学生在学习本教材时，可选择不同内容：工科类可以不选第九章，数学和管理类学生可以不选第七章和第八章。

教材第一章、第二章由陈秋华老师编写，第三章、第四章、第五章、第六章由何凤霞老师编写，第七章、第九章由叶振军老师编写，第八章由何凤霞、叶振军老师共同编写，全书由何凤霞老师统稿。秦建平、黄敬锋和李伟伟同学做了大量文字录入和配图工作，在此表示感谢!

本教材由国家自然科学基金面上项目（N0. 11231010，11471223）与北京市教委重点项目（No. KZ201410028030）资助。

2015. 10. 11

目　　录

第一章　概率论基础知识

概率论研究的是随机现象，而随机过程研究的是动态的随机现象，所以概率论知识是随机过程学习的基础．这一章简单回顾概率论的基本内容，同时补充一些学习随机过程所需要的内容．

第一节　概率空间及概率

定义 1－1　如果试验 E 符合下列条件：

（1）每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果，

（2）进行一次试验之前无法确定哪一个结果会出现，

（3）可以在同一条件下重复进行试验，

则称 E 为随机试验，称随机试验 E 所有基本结果形成的集合为样本空间，记为 Ω，Ω 的子集 A 称为随机事件．

特别的，称空集 Φ 为不可能事件，全集 Ω 为必然事件．

定义 1－2　设 Ω 是随机试验的样本空间，F 是 Ω 的所有子集组成的集合类，$P(\cdot)$ 是定义在 F 上的实值函数．如果符合下列条件：

（1）对任意 $A\in\mathrm{F}$，$P(A)\geqslant 0$，

（2）$P(\Omega)=1$，

（3）对于 $A_1,\ A_2,\ \cdots\in\mathrm{F}$（$A_i\cap A_j=\varnothing,\ i\neq j$），有 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A_i)$，

则称 $(\Omega,\ \mathrm{F},\ P)$ 为概率空间，$P(\cdot)$ 是 $(\Omega,\ \mathrm{F})$ 上的概率，$P(A)$ 为事件 A 的概率．

定义 1－3　设 $(\Omega,\ \mathrm{F},\ P)$ 为概率空间，A、B 为事件．称在已知 A 发生的条件下，事件 B 发生的概率为 A 发生条件下事件 B 发生的条件概率．记为 $P(B\mid A)$．

若 $P(A)>0$，A 发生条件下事件 B 发生的条件概率还可以用算式定义为：

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \tag{1-1}$$

设A，B，A_i，$B_i(i=1,2,\cdots,n)$都是同一概率空间(Ω, F, P)中的事件，且所有条件概率中作为条件的事件发生的概率都为正，有下列常用的概率公式：

（1）乘法公式.

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=P(B)P(A\mid B) \tag{1-2}$$

（2）多个事件的乘法公式.

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}) \tag{1-3}$$

（3）全概率公式.

若$\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i=\Omega$，$P(B_i)>0$，$B_iB_j=\Phi$，$i\neq j$，则对任意事件$A$：

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i) \tag{1-4}$$

（4）贝叶斯公式.

若$\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i=\Omega$，$P(B_i)>0$，$B_iB_j=\Phi$，$i\neq j$，则对任意事件$A$：

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)} \tag{1-5}$$

以上公式都是本科概率中的知识，在随机过程学习中，需要用到一些公式的推广形式.

（5）条件概率的乘法公式（推广）.

$$P(A_1A_2\cdots A_n\mid B)=P(A_1\mid B)P(A_2\mid A_1B)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}B) \tag{1-6}$$

证明

$$\begin{aligned}P(A_1A_2\cdots A_n\mid B)&=\frac{P(A_1A_2\cdots A_nB)}{p(B)}\\&=\frac{P(B)P(A_1\mid B)P(A_2\mid A_1B)\cdots P(A_n\mid A_1\cdots A_{n-1}B)}{P(B)}\\&=P(A_1\mid B)P(A_2\mid A_1B)\cdots P(A_n\mid A_1\cdots A_{n-1}B)\end{aligned}$$

［证毕］

（6）全概率公式（推广）. Y是随机变量，则对任意事件A，

若Y为离散型随机变量时，有：

$$P(A)=\sum_{i}P(Y=y_i)P(A\mid Y=y_i) \tag{1-7}$$

若Y为连续型随机变量时，有：

$$P(A)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_Y(y)P(A\mid Y=y)\,dy \tag{1-8}$$

【例1-1】 设某段时间内到达商场的顾客人数N服从参数为λ的泊松分布，每位到商场的顾客购物的概率为p. 求该商场每天购物人数Y的分布.

解 Y的可能取值为：0，1，2，…，k，根据推广的全概率公式（1-7），得：

$$
\begin{aligned}
P(Y=k) &= \sum_{n=k}^{\infty} P(N=n)P(Y=k \mid N=n) \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \\
&= e^{-\lambda}(\lambda p)^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!\ (1-p)^{n-k}}{k!\ (n-k)!\ n!} \lambda^{n-k} \\
&= \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!} e^{\lambda(1-p)} \\
&= \frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^k}{k!}
\end{aligned}
$$

即该商场每天购物人数 Y 服从参数为 λp 的泊松分布.

第二节　随机变量及其分布

为了更方便地研究随机现象，需要引入随机变量.

定义 1－4　设$(\Omega,\ F,\ P)$是概率空间，称定义在 Ω 上的实函数 $X=X(e)$ 为随机变量，简记为随机变量 X；称

$$F(x)=P(e:\ X(e)\leqslant x)=P(X\leqslant x),\quad -\infty<x<+\infty$$

为 X 的分布函数.

根据其分布函数的特点，随机变量分为离散型、连续型和混合型三种. 对于离散型随机变量，其概率分布通常用分布律表示：

$$p_k=P(X=k),\ k=1,\ 2,\ \cdots \tag{1-9}$$

与分布函数的关系为：

$$F(x)=\sum_{x_k\leqslant x} p_k \tag{1-10}$$

对于连续型随机变量，其概率分布通常用概率密度函数 $f(x)$ 表示，与分布函数的关系为：

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \tag{1-11}$$

$$F'(x)=f(x) \tag{1-12}$$

对于混合型随机变量，其概率分布采用在离散点用分布律、连续点用概率密度的方法表示，也可以统一用分布函数表示.

【例 1－2】　设随机变量 X 的绝对值不大于 1；分别以 1/8 和 1/4 的概率取

到 -1 和 1；在事件$\{-1<X<1\}$出现的条件下，X 在$(-1,1)$内的任一子区间上的条件概率与该子区间长度成正比．试求随机变量 X 的分布函数．

解 $F(x)=P\{X\leqslant x\}$

由于 X 的绝对值不大于1，$P\{X=-1\}=\frac{1}{8}$，$P\{X=1\}=\frac{1}{4}$，知：

当 $x<-1$ 时，$F(x)=0$；

当 $x=-1$ 时，$F(-1)=P(X=-1)=\frac{1}{8}$；

当 $x\geqslant 1$ 时，$F(x)=1$；

当 $-1<x<1$ 时，

$$
\begin{aligned}
F(x)&=P\{X\leqslant x\}\\
&=P(X=-1)+P\{-1<X\leqslant x\}\\
&=P(X=-1)+P\{-1<X<1\}\cdot P\{-1<X\leqslant x\mid -1<X<1\}\\
&=\frac{1}{8}+\left(1-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\right)k(x+1)\\
&=\frac{1}{8}+\frac{5}{8}k(x+1)
\end{aligned}
$$

$$P\{X=1\}=F(1)-\lim_{x\to 1-0}F(x)=1-\left[\frac{1}{8}+\frac{5}{8}k(1+1)\right]=\frac{1}{4}$$

得，$k=\frac{1}{2}$.

X 的分布函数为：

$$
F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ \dfrac{5x+7}{16}, & -1\leqslant x<1\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}
$$

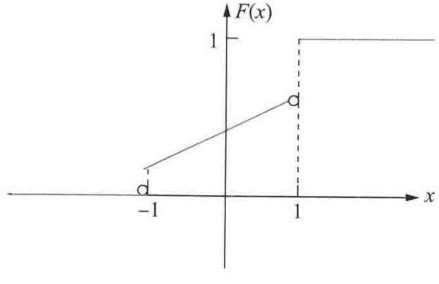

图 1-1　$F(x)$ 的图形

我们知道，连续型随机变量的分布函数是处处连续的函数，离散型随机变量的分布函数是阶梯函数，这个随机变量分布函数显然既非处处连续也非阶梯函数．这是一个混合型随机变量，其概率分布也可以表达如下：

$$P\{X=-1\}=\frac{1}{8},\ P\{X=1\}=\frac{1}{4}$$

在（-1，1）上 X 的概率密度为：

$$f(x)=\frac{5}{16}$$

可以类似地定义多维随机变量及其分布函数：

定义 1-5 （Ω，F，P）是概率空间，称 Ω 上的 n 维实值向量函数

$$X=X(e)=(X_1(e),\ \cdots,\ X_n(e))$$

为 n 维随机变量或 n 维随机向量；称

$$\begin{aligned}F(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)&=P(e:\ X_1(e)\leqslant x_1,\ \cdots,\ X_n(e)\leqslant x_n)\\&=P(X_1\leqslant x_1,\ \cdots,\ X_n\leqslant x_n),\ x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\in R^n\end{aligned}$$

为 $X=(X_1,\ \cdots,\ X_n)$ 的联合分布函数．

多维随机变量也分为离散型、连续型和混合型三种．但多维随机变量情形比较复杂，所以我们一般只讨论离散型和连续型两种类型的多维随机变量．

离散型随机变量的概率分布通常用联合分布律表示：

$$P(X_1=x_1,\ \cdots,\ X_n=x_n) \tag{1-13}$$

与分布函数的关系为：

$$F(y_1,\ \cdots,\ y_n)=\sum_{\substack{x_i\leqslant y_i\\ i=1,\cdots,n}}P(X_1=x_1,\ \cdots,\ X_n=x_n) \tag{1-14}$$

$$(y_1,\ \cdots,\ y_n)\in R^n$$

连续型随机变量的概率分布通常用联合概率密度函数 $f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 表示，与分布函数的关系为：

$$F(y_1,\ \cdots,\ y_n)=\int_{-\infty}^{y_1}\cdots\int_{-\infty}^{y_n}f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)dx_1\cdots dx_n \tag{1-15}$$

$$\frac{\partial F(y_1,\ \cdots,\ y_n)}{\partial y_1\cdots\partial y_n}=f(y_1,\ \cdots,\ y_n) \tag{1-16}$$

定理 1-1 若 $F(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 为 $(X_1,\ \cdots,\ X_n)$ 的联合分布函数，则：

$$\begin{aligned}F_{X_i}(x_i)&=P(X_i\leqslant x_i)=F_{X_i}(+\infty,\ x_i,\ \cdots,\ +\infty)\\&=\lim_{\substack{x_k\to+\infty\\ k\neq i}}F(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\end{aligned}$$

$$F_{X_iX_j}(x_i,\ x_j)=P(X_i\leqslant x_i,\ X_j\leqslant x_j)=\lim_{\substack{x_k\to+\infty\\ k\neq i,j}}F(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$$

$$F_{X_{i_1}X_{i_2}\cdots X_{i_m}}(x_{i_1},\ x_{i_2},\ \cdots,\ x_{i_m})=P(X_{i_1}\leqslant x_{i_1},\ X_{i_2}\leqslant x_{i_2},\ \cdots,\ X_{i_m}\leqslant x_{i_m})$$

$$= \lim_{\substack{x_k \to +\infty \\ k \neq i_1, \cdots, i_m}} F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

分别称作$(X_1, \cdots, X_n)$关于X_i，(X_i, X_j)，$(X_{i_1}, X_{i_2}, \cdots, X_{i_m})$的边缘分布函数.

第三节　随机变量的独立性

定义 1－6　设$X=(X_1, \cdots, X_n)$为n维随机变量，若对任意$x_1, x_2, \cdots, x_n \in R$，有

$$P(X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2, \cdots, X_n \leqslant x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leqslant x_i)$$

则称$X_1, \cdots, X_n$是相互独立的.

定义 1－6 是通过联合分布函数和边缘分布函数的关系给出随机变量的独立性定义的，也可以类似地通过联合分布律或联合概率密度函数来判断随机变量的独立性.

定理 1－2　设$X=(X_1, \cdots, X_n)$为n维离散型随机变量，则$X_1, \cdots, X_n$相互独立的充要条件是：对任意$x_1, x_2, \cdots, x_n \in R$，有：

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)$$

定理 1－3　设$X=(X_1, \cdots, X_n)$为n维连续型随机变量，则$X_1, \cdots, X_n$相互独立的充要条件是：对任意$x_1, x_2, \cdots, x_n \in R$，有：

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$$

其中，$f_{X_i}(x_i)$是X_i的概率密度，$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是$X=(X_1, \cdots, X_n)$的联合概率密度.

独立性是概率论中的重要概念，在实际问题中，独立性的判断通常是根据经验或者具体情况来决定的.

第四节　随机变量的数字特征

随机变量的分布虽然完整地刻画了随机变量取值的概率分布，但是用一些有特定含义的数字来描述随机变量的某些重要特征，会更加简单而且直观.

一、数字特征的定义

定义 1－7　设随机变量 X 的分布函数是 $F(x)$，若 $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|dF(x)<\infty$，则称 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xdF(x)$ 为 X 的数学期望或均值.

若 X 是离散型随机变量，分布律为 $p_k=P(X=k)$，$k=1$，2，…，则:

$$EX=\sum_{-\infty}^{+\infty}x_kp_k \tag{1-17}$$

若 X 是连续性随机变量，概率密度为 $f(x)$，则:

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,dx \tag{1-18}$$

定理 1－4　随机变量 X 的分布函数是 $F(x)$，$Y=g(X)$. 若 $\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|dF(x)<\infty$，则随机变量 X 的函数 $Y=g(X)$ 的数学期望为:

$$E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)dF(x)$$

若 X 是离散型随机变量，分布律 $p_k=P(X=k)$，$k=1$，2，…，则:

$$E[g(X)]=\sum_{-\infty}^{\infty}g(x_k)p_k \tag{1-19}$$

若 X 是连续性随机变量，概率密度为 $f(x)$，则:

$$E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx \tag{1-20}$$

定义 1－8　X 是随机变量，若 $EX^2<\infty$，称

$$E(X-EX)^2 \tag{1-21}$$

为 X 的方差，记为 DX 或 $\mathrm{Var}(X)$.

定义 1－9　设 X，Y 为随机变量，若 $EX^2<\infty$，$EY^2<\infty$，则称式(1－22)为 X，Y 的协方差，而式(1－23)称为 X，Y 的相关系数.

$$\mathrm{Cov}(X,\ Y)=E[(X-EX)(Y-EY)] \tag{1-22}$$

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,\ Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} \tag{1-23}$$

二、数字特征的意义

以上各数字特征的意义如下:

数学期望 EX 描述了 X 的平均值. 方差 DX 描述了 X 的取数的分散程度. X 与 Y 的协方差及相关系数都是对 X 与 Y 之间线性相关性的描述，协方差或相关系数为 0 时，表示 X 与 Y 无线性关系，即不相关；协方差或相关系数大于 0 时，表示

X 与 Y 呈正向线性关系；协方差或相关系数小于 0 时，表示 X 与 Y 呈负向线性关系．ρ_{XY}对 X 与 Y 之间线性相关的程度进行了量化描述，ρ_{XY}的值域为 $[-1, 1]$，$|\rho_{XY}|=1$ 时，X 与 Y 有完全线性关系（概率 1 意义下）$Y=a+bX$；$|\rho_{XY}|=0$ 时，X 与 Y 没有线性关系，即不相关；当$|\rho_{XY}|$接近于 1 时，X 与 Y 的线性相关程度较强；当$|\rho_{XY}|$接近于 0 时，X 与 Y 的线性相关程度较弱．特别注意，X 与 Y 不相关时，只表示它们没有线性关系，但可能有其他的函数关系，故未必相互独立．

三、数字特征的重要性质

各数字特征的重要性质如下：

1. 数学期望的性质

（1）若 n 维随机变量$(X_1, \cdots, X_n)$的联合分布函数为 $F(x_1, \cdots, x_n)$，$g(x_1, \cdots, x_n)$是 n 维连续函数，则：

$$Eg(x_1, \cdots, x_n) = \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, \cdots, x_n)dF(x_1, \cdots, x_n).$$

（2）$E\mathrm{c}=\mathrm{c}$，其中 c 是常数．

（3）$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$，其中 a，b 是常数．

（4）若 X，Y 独立，则 $E(XY)=E(X)E(Y)$.

2. 方差的性质

（1）$D\mathrm{c}=0$，其中 c 是常数．

（2）若 X，Y 独立，$D(aX+bY)=a^2D(X)+b^2D(Y)$，其中 a，b 是常数．

（3）切比雪夫不等式．设随机变量 X 具有数学期望 $E(X)=\mu$，方差 $D(X)=\sigma^2$，则对于任意正数 ε，有：

$$P\{|X-\mu|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \tag{1-24}$$

（4）若 C 是常数，则随机变量 $X=\mathrm{C}$(依概率 1)的充分必要条件是：$DX=0$，且 $EX=\mathrm{C}$. 特别地，随机变量 $X=0$(依概率 1)的充分必要条件是：$EX^2=0$.

3. 协方差的性质

（1）$\mathrm{Cov}(X, \mathrm{c})=0$，c 是常数．

（2）$\mathrm{Cov}(aX, bY)=ab\mathrm{Cov}(X, Y)$，$a$，$b$ 是常数．

（3）$\mathrm{Cov}(X_1+X_2, Y)=\mathrm{Cov}(X_1, Y)+\mathrm{Cov}(X_2, Y)$.

（4）若 X，Y 独立，$\mathrm{Cov}(X, Y)=0$.

（5）$\mathrm{Cov}(X, X)=DX$.

4. 相关系数的性质

（1）$|\rho_{XY}|\leqslant 1$.

（2）$|\rho_{XY}|=1$ 的充要条件为：存在常数 a_0，b_0，使 $P(Y=a_0+b_0X)=1$.

5. 柯西—施瓦茨不等式（Schwarz 不等式）

对于随机变量 X，Y(可以是复随机变量)，若 $E|X|^2<\infty$，$E|Y|^2<\infty$，则：

$$E|XY|\leqslant\sqrt{E|X|^2E|Y|^2} \tag{1-25}$$

特别地：

$$E|X|\leqslant\sqrt{E|X|^2} \tag{1-26}$$

由此结论知，若随机变量二阶矩存在，那么一阶矩必存在.

6. 多维随机变量的数字特征的定义和性质

定义 1-10　设 n 维随机变量 $X=(X_1, X_2, \cdots, X_n)'$，若所有 $E(X_i)$ 和 $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$都存在，则称 $\mu=(EX_1, EX_2, \cdots, EX_n)'$为 X 的均值向量，记为 EX. 称

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Cov}(X_1, X_1) & \mathrm{Cov}(X_1, X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_1, X_n) \\ \mathrm{Cov}(X_2, X_1) & \mathrm{Cov}(X_2, X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Cov}(X_n, X_1) & \mathrm{Cov}(X_n, X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_n, X_n) \end{pmatrix}$$

为 X 的协方差矩阵，或方差，记为 DX.

性质：若设 n 维随机变量 $X=(X_1, X_2, \cdots, X_n)'$的均值向量为 $EX=\mu$，协方差矩阵 $DX=B$，A 是一 $m\times n$ 矩阵，$Y=AX$，则 Y 是一 m 维随机变量，且 $EY=A\mu$，$DY=ABA'$.

第五节　特征函数

特征函数是研究随机变量的一个重要工具，有些情况下用特征函数研究随机变量的性质比用分布函数更加简单方便.

定义 1-11　设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，$t\in R$，称

$$g(t)=E(\mathrm{e}^{itX})=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{itx}dF(x)$$

为 X 的特征函数.

当 X 是离散型随机变量时：

$$g(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{e}^{itx_k}P(X=x_k) \tag{1-27}$$

当 X 是连续型随机变量时：

$$g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{itx}f(x)dx \tag{1-28}$$

其中，$f(x)$ 为 X 的概率密度.

由于 $E|e^{itX}|=1$，所以随机变量的特征函数必然存在.

【例 1-3】 求下列分布的特征函数.

(1) 两点分布 $P\{X=1\}=p$，$P\{X=0\}=1-p$；

(2) 泊松分布 $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$，$k=0,1,2,\cdots$，其中 $\lambda>0$ 是常数；

(3) 指数分布 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$，$\lambda>0$；

(4) 均匀分布 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

解 (1)
$$g(t)=E(e^{itX})=e^{it\cdot 0}(1-p)+e^{it\cdot 1}p=1-p+pe^{it}=q+pe^{it},\quad q=1-p$$

(2)
$$g(t)=E(e^{itX})=\sum_{k=0}^{+\infty}e^{itk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

(3)
$$g(t)=E(e^{itX})=\int_0^{+\infty}e^{itx}\lambda e^{-\lambda x}dx=\int_0^{+\infty}\lambda e^{(it-\lambda)x}dx=\frac{\lambda}{(it-\lambda)}\left[e^{(it-\lambda)x}\right]_0^{+\infty}=\frac{\lambda}{\lambda-it}=\frac{1}{\left(1-\dfrac{it}{\lambda}\right)}$$

(4)
$$g(t)=E(e^{itX})=\int_a^b\frac{e^{itx}}{b-a}dx=\frac{e^{ibt}-e^{iat}}{it(b-a)}$$

表 1-1 常见随机变量的特征函数表

分布	分布律或概率密度	期望	方差	特征函数
两点分布 (0-1 分布)	$P(X=1)=p$，$P(X=0)=q$，$0<p<1$，$p+q=1$	p	pq	$q+pe^{it}$
二项分布	$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$，$0<p<1$，$p+q=1$，$k=0,1,\cdots,n$	np	npq	$(q+pe^{it})^n$
泊松分布	$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$，$\lambda>0$，$k=0,1,\cdots$	λ	λ	$e^{\lambda(e^{it}-1)}$
几何分布	$P(X=k)=pq^{k-1}$，$0<p<1$，$p+q=1$，$k=1,2,\cdots$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$