普通高等教育"十一五"国家级规划教材配套参考书

工程数学
复变函数与积分变换
（第二版）
学习辅导与习题全解

吉林大学数学学院
高彦伟　宋东哲　王忠仁　编

版社

普通高等教育"十一五"国家级规划教材配套参考书

工程数学
复变函数与积分变换
（第二版）
学习辅导与习题全解

吉林大学数学学院
高彦伟　宋东哲　王忠仁　编

Gongcheng Shuxue
Fubian Hanshu yu Jifen Bianhuan(Di-er Ban)
Xuexi Fudao yu Xiti Quanjie

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是与普通高等教育“十一五”国家级规划教材吉林大学数学学院王忠仁、高彦伟编的《工程数学·复变函数与积分变换(第二版)》相配套的学习辅导与习题全解。本书密切配合主教材，共分八章，内容包括复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数、共形映射、傅里叶变换和拉普拉斯变换等。全书各章包含教学内容与要求、主要知识点与典型例题、教材习题全解这几个主要部分，并在书末附有五套模拟试卷及其参考答案。

本书可作为物理学、电子科学与技术、计算机科学与技术、通信工程、应用地球物理学、资源与环境科学等涉及信息处理等相关专业的辅助教材，也可供工程科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

工程数学．复变函数与积分变换(第二版)学习辅导与习题全解 / 高彦伟，宋东哲，王忠仁编．--北京：高等教育出版社，2016.7

ISBN 978-7-04-045562-5

Ⅰ.①工… Ⅱ.①高… ②宋… ③王… Ⅲ.①工程数学-高等学校-教学参考资料②复变函数-高等学校-教学参考资料③积分变换-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①TB11②O174.5③O177.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第110140号

策划编辑 兰莹莹　责任编辑 田 玲　封面设计 张 志　版式设计 杜微言
插图绘制 邓 超　责任校对 刘春萍　责任印制 耿 轩

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街4号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	北京宏信印刷厂	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
			http://www.hepmall.com
开 本	787mm×960mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印 张	11	版 次	2016年7月第1版
字 数	200千字	印 次	2016年7月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	18.80元

物 料 号 45562-00

前　言

普通高等教育“十一五”国家级规划教材《工程数学·复变函数与积分变换》自2006年面世以来，得到许多兄弟院校的支持，被选用为本科相关专业的教学用书，同时也给我们提出了宝贵的意见。为进一步满足高校教学的实际需求，我们在对第一版教材进行修订完善的基础上，编写了本辅导书，希望能够帮助学习者更好地掌握本课程的主要知识点。本书在内容体例和编排上力求做到“**体例精练易使用，重点难点要分明**”，更重要的是能够使学生在练习解题过程中体会典型的数学思维方式，并培养与专业知识相结合、解决实际问题的能力。

本书与主教材紧密配合，共分为八章，各章包含教学内容与要求、主要知识点与典型例题、教材习题全解几个主要部分，并配有五套模拟试卷及其参考答案。第一章和模拟试卷部分由高彦伟编写，第二章至第八章由宋东哲编写，全书由王忠仁教授审阅、定稿。

本书成书过程中，得到了吉林大学数学学院和高等教育出版社数学分社的指导和大力支持，吴晓俐女士承担了大量的编务工作，特此致谢。同时我们参考了许多有关教材和著作，受到启发，并改编和引用了其中的一些例子，在此不一一列出，谨向各位作者致谢。

由于水平所限，疏漏之处难免，欢迎读者批评指正，帮助我们不断改进！

编　者

2016年3月

目　　录

第一章　复数与复变函数

【教学内容与要求】

1. 掌握复数的各种表示法及运算.
2. 了解区域、复球面与无穷远点等概念.
3. 理解复变函数的概念及几何表示.
4. 了解复变函数的极限与连续的概念.

重点: 复数的运算及各种几何表示法,复变函数及其极限的概念.

难点: 用复数方法表示平面区域、曲线.

【主要知识点与典型例题】

复变函数就是变量为复变量的函数,这一章介绍了一些常用概念.

1. 复数的概念

设 x,y 是实数,称 $z=x+\mathrm{i}y$ 为**复数**,其中 i 满足 $\mathrm{i}^2=-1$,称为**虚数单位**,x,y 分别称为**实部**和**虚部**,记作

$$x=\mathrm{Re}(z),\ y=\mathrm{Im}(z).$$

注: 两个复数不能比较大小,但其模(为实数)有大小.

2. 复数的三角表示

(1) 模

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

例如:$|-2+\mathrm{i}|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$.

(2) 辐角

复数 $z\neq0$ 时,表示 z 的向量与 x 轴正向的夹角称为**辐角**,记为 $\mathrm{Arg}\,(z)$(多值函数).

辐角主值是指位于$(-\pi,\pi]$中的辐角,记为 $\arg(z)$.

$$\operatorname{Arg}(z)=\arg(z)+2k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

（3）主值 $\arg(z)$ 与 $\arctan\dfrac{y}{x}$ 之间的关系

由于 $\arg(z)\in(-\pi,\pi]$，$\arctan\dfrac{y}{x}\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，当 $z\neq0$ 时，有

$$\arg(z)=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & \text{当 } x>0, y \text{ 为任意实数},\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0, y>0,\\ -\dfrac{\pi}{2}, & x=0, y<0,\\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & x<0, y\geqslant0,\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & x<0, y<0.\end{cases}$$

例如，$-1+3i$ 的辐角及辐角主值分别为

$$\operatorname{Arg}(-1+3i)=\pi-\arctan3+2k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

$$\arg(-1+3i)=\pi-\arctan3.$$

（4）复数的三角表示

设复数 $z\neq0$，z 可表示为 $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$，其中 $\theta=\operatorname{Arg}(z)$.

（5）复数的指数表示

$$z=|z|e^{i\theta}\text{，其中 }\theta=\arg(z).$$

例如，$2+3i$ 的三角表示式及指数表示式分别为

$$2+3i=\sqrt{13}(\cos\theta+i\sin\theta)=\sqrt{13}e^{i\theta},$$

其中 $\theta=\arctan\dfrac{3}{2}$.

3. 复数的运算

（1）四则运算

设 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$，则

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2);$$

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_2y_1+x_1y_2);$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\ z_2\neq0.$$

例 1 用复数的代数形式 $a+ib$ 表示下列复数：

(1) $\dfrac{3+5\mathrm{i}}{7\mathrm{i}+1}$； (2) $(2+\mathrm{i})(4+3\mathrm{i})$； (3) $\dfrac{1}{\mathrm{i}}+\dfrac{3}{1+\mathrm{i}}$.

【解】(1) $\dfrac{3+5\mathrm{i}}{7\mathrm{i}+1}=\dfrac{(3+5\mathrm{i})(1-7\mathrm{i})}{(1+7\mathrm{i})(1-7\mathrm{i})}=\dfrac{19}{25}-\dfrac{8}{25}\mathrm{i}$.

(2) $(2+\mathrm{i})(4+3\mathrm{i})=8-3+4\mathrm{i}+6\mathrm{i}=5+10\mathrm{i}$.

(3) $\dfrac{1}{\mathrm{i}}+\dfrac{3}{1+\mathrm{i}}=-\mathrm{i}+\dfrac{3(1-\mathrm{i})}{2}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{2}\mathrm{i}$.

(2) 复数乘除法的三角表示及指数表示

若 $z_1=|z_1|(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)=|z_1|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$, $z_2=|z_2|(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)=|z_2|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$, 则

$$z_1z_2=|z_1||z_2|[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]=|z_1||z_2|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)};$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)]=\frac{|z_1|}{|z_2|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)},\ z_2\neq 0.$$

(3) 乘幂与方根

若 $z=|z|(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)=|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,则

$$z^n=|z|^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)=|z|^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}.$$

$\sqrt[n]{z}=|z|^{\frac{1}{n}}\left(\cos\dfrac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\right)$ $(k=0,1,2,\cdots,n-1)$(有 n 个相异的值).

例 2 求下列各式的值：

(1) $(1-\mathrm{i})^4$； (2) $(\sqrt{3}+\sqrt{3}\mathrm{i})^{\frac{1}{2}}$.

【分析】先将上述各式化为三角表示式,再利用相应的公式求解.

【解】(1) $1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$,

从而有

$$(1-\mathrm{i})^4=4[\cos(-\pi)+\mathrm{i}\sin(-\pi)]=-4.$$

(2) $$\sqrt{3}+\sqrt{3}\mathrm{i}=\sqrt{6}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

于是

$$(\sqrt{3}+\sqrt{3}\mathrm{i})^{\frac{1}{2}}=\sqrt[4]{6}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}\right),\quad k=0,1.$$

即

$$w_0=\sqrt[4]{6}\left(\cos\frac{\pi}{8}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{8}\right),\quad w_1=\sqrt[4]{6}\left(\cos\frac{9\pi}{8}+\mathrm{i}\sin\frac{9\pi}{8}\right).$$

注：复数是平面向量的一种表象，复数的加减表现的是向量的平移，乘除表现的是向量的伸缩与旋转．

4. 曲线与区域

（1）平面曲线

如果 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是两个连续的实函数，则

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \text{或 } z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)\,(a \leqslant t \leqslant b)$$

代表一条平面曲线，称为**连续曲线**，其中 $z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)\,(a \leqslant t \leqslant b)$ 称为**平面曲线的复数表示式**．

如果在区间 $[a,b]$ 上 $x(t)$ 和 $y(t)$ 有连续的导数，而且

$$z'(t) = x'(t) + \mathrm{i}y'(t) \neq 0,$$

则称曲线 $z(t)$ 为**光滑**的．由几段依次相接的光滑曲线所组成的曲线称为**按段光滑曲线**．

没有重点的连续曲线称为**简单曲线**．起点与终点重合的简单曲线称为**简单闭曲线**．

（2）邻域、集合内点与开集

设 z_0 是复平面上一点，δ 为任意一个正数，满足 $|z - z_0| < \delta$ 的所有点 z 所组成的集合称为 z_0 的一个**邻域**．

设 G 为一平面点集，z_0 是 G 中一点，如果存在 z_0 的一个邻域，该邻域内所有点都属于 G，则称 z_0 为 G 的**内点**．若 G 中每个点都是内点，则称 G 为**开集**．

（3）区域

若平面点集 D 中任何两点都可用完全属于 D 的一条折线连接起来，则称 D 是**连通**的．连通的开集称为**区域**．

设 D 为复平面内的一个区域，如果点 P 不属于 D，但在 P 的任意小的邻域内总包含 D 中的点，这样的点 P 称为 D 的**边界点**．D 的所有边界点的集合称为 D 的**边界**．区域 D 与它的边界一起构成**闭区域（闭域）**，记作 $\overline{D}$.

设 D 为复平面内的一个区域，如果在其中任作一条简单闭曲线，该曲线的内部总属于 D，则称 D 为**单连通域**．否则称为**多连通域**．

如果存在正数 M，使区域 D 的每个点 z 都满足 $|z| < M$，则称 D 为**有界域**．否则称为**无界域**．

例 3　指出下列各式中点 z 所确定的平面图形．如果是区域，指出它是有界的还是无界的，单连通的还是多连通的：

（1）$\arg(z) = \pi$；　（2）$1 < |z + \mathrm{i}| < 2$；　（3）$\mathrm{Re}(z) > \mathrm{Im}(z)$.

【解】(1) $\arg(z)=\pi$ 表示负实轴(图 1.1).

(2) $1<|z+\mathrm{i}|<2$ 表示以 $-\mathrm{i}$ 为圆心,以 1 和 2 为半径的圆周所围成的圆环域, 是有界多连通域(图 1.2).

(3) $\mathrm{Re}(z)>\mathrm{Im}(z)$ 表示直线 $y=x$ 的右下半平面,是无界单连通域(图 1.3).

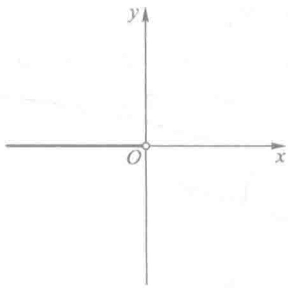

图 1.1

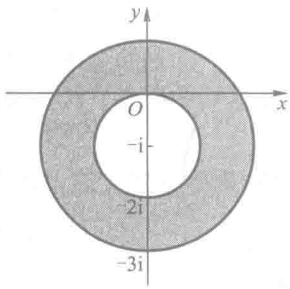

图 1.2

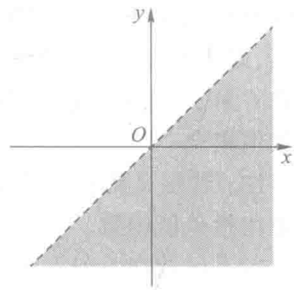

图 1.3

例 4 试确定下列各复数表示式所表示的曲线:

(1) $z=4t+3\mathrm{i}t(-\infty<t<+\infty)$;

(2) $z=a\cos t+\mathrm{i}b\sin t(0\leqslant t\leqslant\pi,\ a>0,b>0)$.

【分析】将 $z=z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)$ 化为参数方程 $x=x(t),y=y(t)$, 然后消去参数 t,得到曲线的一般方程 $y=y(x)$,从而确定曲线的图形.

【解】(1) 记 $z=x+\mathrm{i}y$, 则当 $-\infty<t<+\infty$ 时,原方程可表示为 $x=4t,y=3t$,消去 t,得 $y=\dfrac{3}{4}x$,它表示 z 平面上经过原点的一条直线.

(2) $z=x+\mathrm{i}y$, 则当 $0\leqslant t\leqslant\pi$ 时,原方程可表示为 $x=a\cos t,y=b\sin t$,消去 t,得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad y\geqslant 0.$$

它表示 z 平面上的上半椭圆.

注: ① 复平面区域通常用复数的实部、虚部、模及辐角的不等式或不等式组来表示.

② 曲线的复数表示式可由其实变量方程 $F(x,y)=0$ 作代换 $x=\dfrac{1}{2}(z+\bar{z})$, $y=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})$ 经整理后得到,或者由实曲线的参数方程 $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t)\end{cases}\ (a\leqslant t\leqslant b)$ 直接得到该曲线的复数表示式 $z=x(t)+\mathrm{i}y(t)$.

5. 复变函数的概念

(1) 定义

设 G 为复平面内的一个集合,如果存在确定的对应法则,使得对于 G 中的每个复数 $z=x+\mathrm{i}y$,有一个或几个确定的复数 $w=u+\mathrm{i}v$ 与之对应,则称复数 w 是复变数 z 的函数(简称**复变函数**),记作 $w=f(z)$. 如果 z 的一个值对应 w 的一个值,则称 $f(z)$ 是**单值**的;如果 z 的一个值对应 w 的多个值,则称 $f(z)$ 是**多值**的;集合 G 称为 $f(z)$ 的定义集合,对应 G 中所有 z 的一切 w 值所成的集合 G^*,称为函数值集合.

注: 若定义集合为平面区域,则称为**定义域**. 如无特殊说明,以后所讨论的函数均指单值函数.

(2) 函数在几何上的表示

$w=f(z)$ 在几何上可以看作把 z 平面上的点集 G 变到 w 平面上的点集 G^* 的**映射**. 如果 G 中的点 z 被 $w=f(z)$ 映射成 G^* 中的点 w,则 w 称为 z 的**像(映像)**,而 z 称为 w 的**原像**.

注: 复变函数表现的是两张复平面上的点集或向量集之间的变换或映射,不再像一元、二元实函数那样,可以在同一空间中直观地被描述成曲线、曲面.

例 5 求在映射 $w=z+\dfrac{1}{z}$ 下圆周 $|z|=2$ 的像.

【分析】针对这个问题,先将关于 w 与 z 的关系式变形为 u,v 与 x,y 之间的关系式,再反解之,将其表示为 x,y 与 u,v 的关系式,最后代入 $|z|=2$ 中即可解出此题.

【解】设 $z=x+\mathrm{i}y, w=u+\mathrm{i}v$,则

$$u+\mathrm{i}v=x+\mathrm{i}y+\frac{1}{x+\mathrm{i}y}=x+\mathrm{i}y+\frac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2}=x+\frac{x}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\left(y-\frac{y}{x^2+y^2}\right),$$

由此得

$$\begin{cases} u=x+\dfrac{x}{x^2+y^2}, \\ v=y-\dfrac{y}{x^2+y^2}. \end{cases}$$

代入 $|z|=2$,即 $x^2+y^2=4$,得

$$\begin{cases} u=\dfrac{5}{4}x, \\ v=\dfrac{3}{4}y. \end{cases}$$

反解出 x,y 得

$$\begin{cases} x=\dfrac{4}{5}u, \\ y=\dfrac{4}{3}v. \end{cases}$$

当点 z 位于 z 平面上圆周 $|z|=2$ 即 $x^2+y^2=4$ 上时，像点 w 将位于 w 平面的 $\left(\frac{4}{5}u\right)^2+\left(\frac{4}{3}v\right)^2=4$ 即 $\dfrac{u^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2}+\dfrac{v^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=1$ 之上.

6. 复变函数的极限

(1) 极限定义

设函数 $w=f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\rho$ 内有定义. 如果有一确定的数 A 存在，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta(\varepsilon)(0<\delta<\rho)$，使得当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，有

$$|f(z)-A|<\varepsilon,$$

则称 A 为 $f(z)$ 当 z 趋于 z_0 时的**极限**，记作 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$（或记为：当 $z\to z_0$ 时，$f(z)\to A$）.

(2) **定理**　设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，$A=u_0+\mathrm{i}v_0$，$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$，则 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$ 的充要条件是

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}u(x,y)=u_0,\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}v(x,y)=v_0.$$

注：复变函数的极限等价于两个二元实函数的二重极限. 该定理将复变函数极限问题转化为求两个二元实变函数的极限问题.

(3) 极限的四则运算

如果 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$，$\lim\limits_{z\to z_0}g(z)=B$，则

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=A\pm B;$$

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)g(z)]=AB;$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{A}{B}(g(z)\neq 0,B\neq 0).$$

例 6　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\mathrm{Re}(z)}{z}$；　(2) $\lim\limits_{z\to \mathrm{i}}\dfrac{z-\mathrm{i}}{z(1+z^2)}$；　(3) $\lim\limits_{x+\mathrm{i}y\to 1+\mathrm{i}}\left[\dfrac{y\ln(2-x)}{x-1}+\mathrm{i}xy\right]$.

【分析】① 证明复函数的极限不存在可利用沿不同路径时极限值不同来证明.

② 求复函数的极限等价于求两个二元实变函数的二重极限,可通过求实变函数的极限来求极限.

③ 可利用复函数极限的四则运算法则来求极限.

【解】(1) 设 $z=x+y\mathrm{i}$,则$\frac{\mathrm{Re}(z)}{z}=\frac{x}{x+\mathrm{i}y}$. 取 $y=kx$,有

$$\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{Re}(z)}{z}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}\frac{x}{x+\mathrm{i}kx}=\frac{1}{1+\mathrm{i}k},$$

显然当 k 取不同的值时上式右端的值不同,所以极限不存在.

(2) $\lim\limits_{z\to \mathrm{i}}\frac{z-\mathrm{i}}{z(1+z^2)}=\lim\limits_{z\to \mathrm{i}}\frac{z-\mathrm{i}}{z(\mathrm{i}+z)(z-\mathrm{i})}=\lim\limits_{z\to \mathrm{i}}\frac{1}{z(\mathrm{i}+z)}=-\frac{1}{2}$.

(3) 由于

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{y\ln(2-x)}{x-1}=-1,\quad \lim_{(x,y)\to(1,1)}xy=1,$$

从而

$$\lim_{x+\mathrm{i}y\to 1+\mathrm{i}}\left[\frac{y\ln(2-x)}{x-1}+\mathrm{i}xy\right]=-1+\mathrm{i}.$$

7. 复变函数的连续性

(1) 连续定义

如果$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$,则称函数$f(z)$**在 z_0 处连续**. 如果$f(z)$在区域 D 内处处连续,则称 $f(z)$ **在 D 内连续**.

(2) **定理** 函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 处连续的充要条件是:$u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 均在(x_0,y_0)处连续.

(3) 连续函数的四则运算

在 z_0 处连续的两个函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的和、差、积、商(分母在 z_0 处不为零)在 z_0 处仍连续.

(4) 连续函数的复合运算

如果函数 $h=g(z)$ 在 z_0 处连续,函数 $w=f(h)$ 在 $h_0=g(z_0)$ 连续,则复合函数 $w=f[g(z)]$ 在 z_0 处连续.

注: 有理整函数 $w=P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$ 在复平面上是连续的.

有理分式函数 $w=\frac{P(z)}{Q(z)}$($P(z)$ 和 $Q(z)$ 都是多项式)在复平面内使分母不为零的点处是连续的.

例 7 讨论下列函数的连续性:

(1) $f(z)=\dfrac{z}{|z|}$; (2) $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z^2+1)}$.

【解】(1) 由于

$$f(z)=\frac{z}{|z|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\mathrm{i}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

又$\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$与$\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$在$(0,0)$处不连续,其他点处都连续,故$f(z)=\dfrac{z}{|z|}$除了$z=0$外处处连续.

(2) $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z^2+1)}$是有理分式函数,从而在分母不为零的点处是连续的.而分母为零的点为$z=1$, i, $-$i,故除了点$z=1$, i, $-$i外函数在复平面处处连续.

【教材习题全解】

1.1 对任何z,$z^2=|z|^2$是否成立?如果是,就给出证明.如果不是,对哪些z值才成立?

【解】$z^2=|z|^2$不成立.设$z=a+b\mathrm{i}$,则

$$z^2=a^2+2ab\mathrm{i}-b^2,\ |z|^2=a^2+b^2.$$

若使$z^2=|z|^2$,则必须有

$$a^2+2ab\mathrm{i}-b^2=a^2+b^2,\quad 即\begin{cases}a^2-b^2=a^2+b^2,\\2ab=0,\end{cases}$$

从而$b=0$.

也就是说,只有z为实数时,才有$z^2=|z|^2$.

1.2 求下列各式的值:

(1) $(\sqrt{3}-\mathrm{i})^5$; (2) $(1+\mathrm{i})^6$; (3) $\sqrt[6]{-1}$; (4) $(1-\mathrm{i})^{\frac{1}{3}}$.

【解】(1) $(\sqrt{3}-\mathrm{i})^5=\left[2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right)\right]^5=(2\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{6}})^5=32\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}5\pi}{6}}$

$$=32\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]=-16\sqrt{3}-16\mathrm{i}.$$

(2) $(1+\mathrm{i})^6=\left[\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)\right]^6=(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}})^6=8\mathrm{e}^{\frac{3\mathrm{i}\pi}{2}}=-8\mathrm{i}.$

(3) $\sqrt[6]{-1}=[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+2k\pi)}]^{\frac{1}{6}}=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi(2k+1)}{6}},k=0,1,2,3,4,5.$

可知 $\sqrt[6]{-1}$的 6 个值分别是

$$e^{\frac{i\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2},\quad e^{\frac{i\pi}{2}}=i,\quad e^{\frac{i5\pi}{6}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2},$$

$$e^{\frac{i7\pi}{6}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2},\quad e^{\frac{i3\pi}{2}}=-i,\quad e^{\frac{i11\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}.$$

(4) $(1-i)^{\frac{1}{3}}=\left[\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right]^{\frac{1}{3}}=(\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}})^{\frac{1}{3}}=\sqrt[6]{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)/3},k=0,1,2.$

可知$(1-i)^{\frac{1}{3}}$的 3 个值分别是

$$\sqrt[6]{2}e^{-\frac{i\pi}{12}}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right),$$

$$\sqrt[6]{2}e^{\frac{i7\pi}{12}}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right),$$

$$\sqrt[6]{2}e^{\frac{i5\pi}{4}}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right).$$

1.3 求方程 $z^3+8=0$ 的所有根.

【解】 $z=(-8)^{\frac{1}{3}}=2e^{i\frac{\pi}{3}(1+2k)},k=0,1,2.$ 即原方程有如下三个解:

$$1+i\sqrt{3},\ -2,\ 1-i\sqrt{3}.$$

1.4 指出下列各题中点 z 的轨迹或所在范围,并作图:

(1) $|z-5|=6$;(2) $|z+2i|\geqslant1$;(3) $\mathrm{Im}(z)\leqslant2$;(4) $0<\arg z<\pi$.

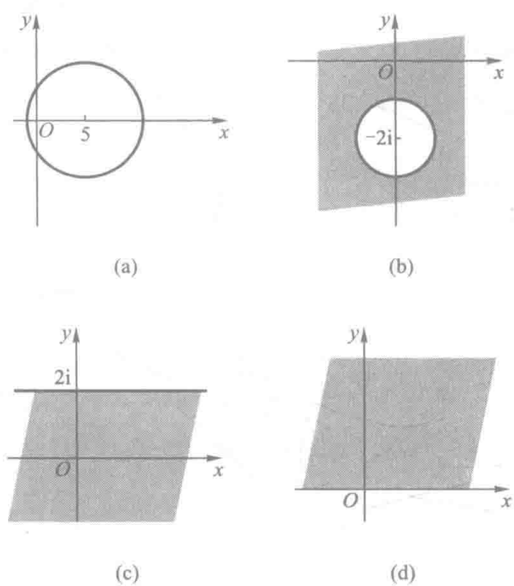

图 1.4

【解】(1) 以点 $z_0=5$ 为圆心,半径为 6 的圆周(如图 1.4(a)).

(2) 以点 $z_0=-2i$ 为圆心,半径为 1 的圆周及外部(如图 1.4(b)).

(3) $y\leqslant 2$(如图 1.4(c)).

(4) 不包含实轴的上半平面(如图 1.4(d)).

1.5 描出下列不等式所确定的区域或闭区域,并指明它是有界的还是无界的,单连通的还是多连通的:

(1) $\operatorname{Im}(z)>0$; (2) $|z-1|>4$; (3) $0<\operatorname{Re}(z)<1$; (4) $2\leqslant|z|\leqslant 3$.

【解】(1) $\operatorname{Im}(z)>0$ 为不包含实轴的上半平面,是无界的单连通域(如图 1.5(a)).

(2) $|z-1|>4$ 是圆 $(x-1)^2+y^2=16$ 的外部(不包含边界),是无界的多连通域(如图 1.5(b)).

(3) $0<\operatorname{Re}(z)<1$ 由直线 $x=0$ 与 $x=1$ 所围成的带形区域(不包含两直线),是无界的单连通域(如图 1.5(c)).

(4) $2\leqslant|z|\leqslant 3$ 是以原点为中心,内外半径分别为 2 和 3 的圆环域(包含圆周),是有界的多连通闭区域(如图 1.5(d)).

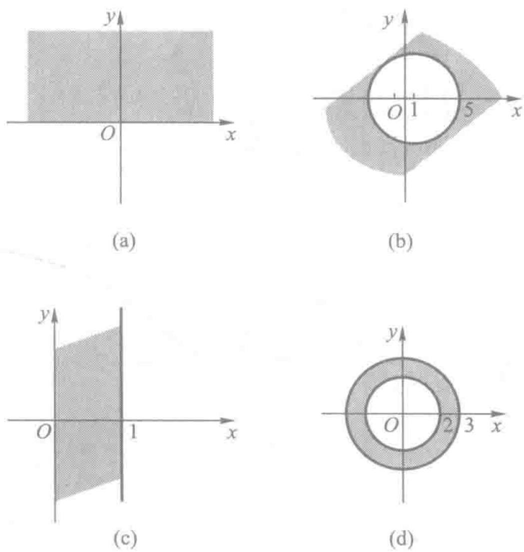

图 1.5

1.6 已知映射 $w=z^3$,求:

(1) 点 $z_1=i, z_2=1+i, z_3=\sqrt{3}+i$ 在 w 平面上的像;

(2) 区域 $0<\arg z<\dfrac{\pi}{3}$ 在 w 平面上的像.