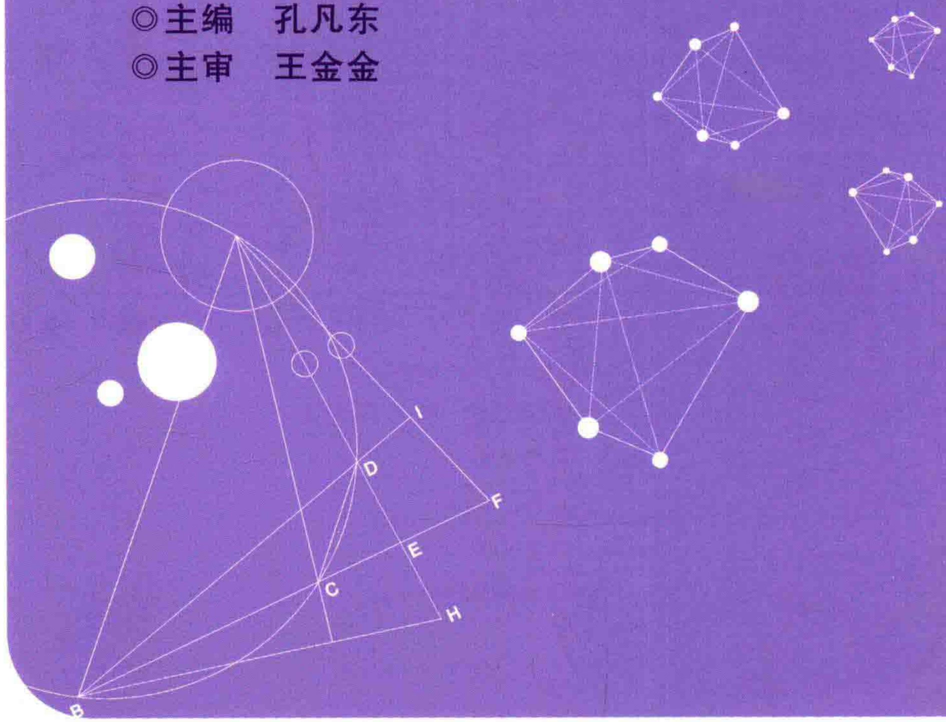
高职高专院校“十二五”规划教材··公共精品课

高等数学

Advanced Mathematics

◎主编 孔凡东

◎主审 王金金



西安电子科技大学出版社

http://www.xduph.com

高职高专院校“十二五”规划教

高等数学

主编　孔凡东
主审　王金金

西安电子科技大学出版社

内容简介

本书是为适应和满足高职高专教育快速发展的需要，遵循国家教育部制定的高职高专教育人才培养目标及高等数学课程教学基本要求，针对高职高专学生的实际情况，结合教学实践而编写的. 全书共8章，分别为函数与极限，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，常微分方程，无穷级数，多元函数微积分. 书中每小节都配有适量习题，各章后有小结；书后配有附录供查阅.

本书可作为高职高专院校公共基础课教材，也可作为广大青年朋友学习高等数学的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/孔凡东主编. —西安：西安电子科技大学出版社，2014.7(2014.9重印)
高职高专院校“十二五”规划教材. 公共精品课
ISBN 978-7-5606-3410-4

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①孔… Ⅲ. ①高等数学—高等职业教育—教材
Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第134648号

策划编辑　李惠萍
责任编辑　李惠萍　何明丽
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)
电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　　编　710071
网　　址　www.xduph.com　　电子邮箱　xdupfxb001@163.com
经　　销　新华书店
印刷单位　陕西天意印务有限责任公司
版　　次　2014年7月第1版　2014年9月第2次印刷
开　　本　787毫米×960毫米　1/16　印张　14.5
字　　数　288千字
印　　数　3001～4500册
定　　价　24.00元
ISBN 978-7-5606-3410-4/O

XDUP 3702001-2

教材编写说明

高职教育是高等教育的一个重要组成部分.目前我国高职教育已进入到以加强内涵建设，全面提高人才培养质量为主的新阶段.高职教育的目标是为社会培养应用型人才，以适应经济迅速腾飞的中国对人才的需求.

为了适应和满足高职教育快速发展的需要，根据高职教育人才培养目标及要求，遵循高职教育教学特点，坚持“掌握概念、强化应用、培养技能”的指导思想，遵循“以应用为目的，以必需够用为度”的原则，西安交通工程学院(原西安科技商贸职业学院)基础课部数理教研室的老师，结合多年教学实践，编写了本教材.高等数学是高职院校一门重要的基础学科，它具有高度的抽象性、严密的逻辑性和广泛的应用性.抽象性是数学最基本、最显著的特点，有了高度抽象和统一，我们才能深入地揭示其本质规律，才能使之得到更广泛的应用.针对高职学生的实际，在教学过程中如何将高等数学的基础性与应用性有机结合是我们编写本书的出发点.本书在编写的过程中力求体现以下特点：

(1) 精练.基于高职学生的实际，按照“以够用管用为度”的原则，以“理解基本概念、掌握基本运算方法为总体要求，内容力求简洁易懂，注意把握好理论深度，在高等数学课程体系下，删除不必要的、过多的理论分析，力争真正体现教师好教，学生好学，让基础好的学生能学到知识，让基础差的学生不感到畏惧.

(2) 实用.以应用为目的是高职教学的重要特点，编写教材时注意从实际问题中引入数学知识，再将数学知识应用到各种实际问题中，加深学生对数学知识的理解，提高学生学习高等数学的兴趣，让学生在学习的过程中充分感受到数学的用途，旨在把学生培养成具有一定理论基础又较好具备分析问题、解决问题能力的高素质应用型人才.

(3) 新颖．注重体现时代感，教材力争反映近年来我国高职教育教学改革的最新成果，将高职教育的新特色新教法，结合重点和难点，尽量体现在教材之中，使教材内容具有一定的超前性和先进性，使高职教育更符合现代科学技术发展的需要．

本书全部内容讲完需90学时左右．在本书的编写过程中，得到了学院领导、相关部门及出版社的大力支持；同时还参阅了有关作者出版的高等数学方面的书籍，在此谨致谢意．本书由孔凡东主编并负责全书的统稿工作，王金金教授主审；常在斌、赵彦发编写第1、6、7章，胡珍妮、唐凤玲编写第2、3章，代雪珍、崔娟编写第4、5章，孔凡东、曹高飞编写第8章及附录．由于作者水平有限，加之编写时间仓促，书中难免存在不妥之处，敬请各位专家及广大读者批评指正．

目 录

第 1 章　函数与极限

内容提要：函数是微积分研究的对象，极限是研究微积分的工具．本章首先复习中学已经学习过的函数及其性质的有关知识，进而给出基本初等函数与初等函数的定义．然后重点研究极限的概念与性质及函数的连续性．

学习要求：了解函数、复合函数、分段函数等概念；复述无穷小与无穷大的概念、极限的运算法则、函数连续与间断点的概念；熟悉复合函数的复合与分解，能用无穷小性质求极限、判断无穷小与无穷大；能够用极限的运算法则求极限，熟悉两个重要极限以及其在求极限中的应用．

1.1　函数概念及其性质

1.1.1　函数的概念

1．函数的定义

定义 1　设 x 和 y 为两个变量，D 为一个给定的数集．如果对每一个 $x\in D$，按照一定的法则 f，变量 y 总有唯一确定的数值与之对应，就称 y 为 x 的函数，记为

$$y=f(x),\quad x\in D$$

其中数集 D 称为该函数的定义域，记为 $D(f)$，x 叫做自变量，y 叫做因变量．

对于确定的 $x_0\in D$，依法则 f 的对应的值称为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 时的函数值，记作

$$y_0=y\big|_{x=x_0}=f(x_0)$$

函数值的集合 $M=\{y\,|\,y=f(x),\ x\in D\}$，称为函数 $y=f(x)$ 的值域．

2．函数的两个要素

函数的对应法则和定义域称为函数的两个要素．如果两个函数的定义域与对应法则分别相同，则称这两个函数是同一函数．例如，$u=v^2$ 与 $s=t^2$ 就是相同的函数，由此可以看出，函数与表示其变量的符号是无关的．

例 1　设 $f(x)=x^2-2x+3$，求 $f(2)$、$f(x+1)$．

解　函数的对应规律为

$$f(\quad)=(\quad)^2-2\times(\quad)+3$$

所以

$$f(2)=2^2-2\times2+3=3$$
$$f(x+1)=(x+1)^2-2(x+1)+3=x^2+2$$

例 2 下列函数是否相同，为什么？

(1) $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$；

(2) $y=\cos x$ 与 $y=\sqrt{1-\sin^2 x}$.

解 (1) $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$ 不是相同的函数，因为它们的定义域不同；

(2) $y=\cos x$ 与 $y=\sqrt{1-\sin^2 x}=|\cos x|$ 是不同的函数，因为它们的定义域虽然相同，但是对应的法则不同.

3. 函数的表示法

函数通常可以用表格法、图像法、解析法来表示，还可以用它们的综合来表示.

(1) 表格法：将自变量的值与对应的函数值列成表格表示两个变量的函数关系的方法. 如三角函数表、常用对数表以及经济分析中的各种统计报表等.

(2) 图像法：用图像表示两个变量的函数关系的方法. 如图 1-1 所示例子即为图像法的应用.

(3) 解析法：用一个等式表示两个变量的函数关系的方法. 如 $y=2\sin x$，$y=2x^3-\lg(x+5)$ 等.

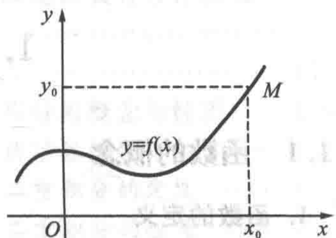


图 1-1

4. 函数定义域的求解方法

函数定义域的求解方法如下：

(1) 根据实际问题的实际意义确定.

(2) 抽象的函数解析式必须使其解析式有意义. 通常应该考虑：分式中分母不能为零；偶次根式的被开方数非负；对数中真数表达式大于零；反三角函数，例如 $\arcsin x$，$\arccos x$，要满足 $\{x\,|\,|x|\leqslant1\}$；多个函数代数和的定义域应是各项函数定义域的公共部分等等.

例 3 求函数 $y=\lg(1-x)+\sqrt{x+4}$ 的定义域.

解 因为负数和零都没有对数，所以 $1-x>0$，即 $x<1$；又 $x+4\geqslant0$，即 $x\geqslant-4$，故函数的定义域为 $D=\{x\,|\,-4\leqslant x<1\}$.

例 4 求函数 $y=\arcsin\dfrac{1}{x}$ 的定义域.

解 除 x 不能为零外，且须 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant1$，即 $|x|\geqslant1$，这个不等式已经把 $x=0$ 除外，所以函数的定义域是 $D=\{x\,|\,-\infty<x\leqslant-1\cup1\leqslant x<+\infty\}$.

5. 反函数

定义 2 设函数的定义域为 D_f，值域为 V_f. 对于任意的 $y\in V_f$，在 D_f 上至少可以确定一个 x 与 y 对应，且满足 $y=f(x)$. 如果把 y 看做自变量，x 看做因变量，就可以得到一个

新的函数：$x=f^{-1}(y)$. 我们称这个新的函数 $x=f^{-1}(y)$ 为函数 $y=f(x)$ 的反函数，而把函数 $y=f(x)$ 称为直接函数.

例如，直接函数 $y=f(x)=\frac{3}{4}x+3$，$x\in\mathbf{R}$ 的反函数为 $x=f^{-1}(y)=\frac{4}{3}(y-3)$，$y\in\mathbf{R}$，并且有 $f^{-1}[f(x)]=\frac{4}{3}\left[\left(\frac{3}{4}x+3\right)-3\right]\equiv x$，$f[f^{-1}(y)]=\frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}(y-3)\right]+3\equiv y$.

由于习惯上 x 表示自变量，y 表示因变量，于是我们约定 $y=f^{-1}(x)$ 是直接函数 $y=f(x)$ 的反函数. 注意，这里 $f^{-1}(x)$ 不是 $\frac{1}{f(x)}$.

反函数 $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f^{-1}(x)$，这两种形式都可能用到. 应当说明的是函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 具有相同的图形. 而直接函数 $y=f(x)$ 与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的，如图 1-2 所示.

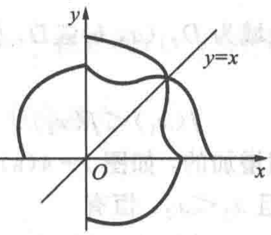


图 1-2

1.1.2　函数的几种特性

1. 奇偶性

定义 3　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，对于任意一个 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数；若有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数. 奇函数的图形关于原点对称；偶函数的图形关于 y 轴对称. 如图 1-3 所示.

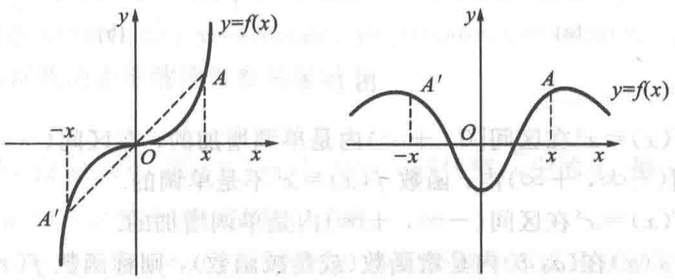


图 1-3

例如：$f(x)=x^2$是偶函数，因为$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$；又如$f(x)=x^3$是奇函数，因为$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$；函数$y=\sin x$是奇函数，$y=\cos x$是偶函数；函数$y=\sin x+\cos x$既非奇函数，也非偶函数，称为非奇非偶函数.

2. 函数的周期性

定义 4 设函数$f(x)$的定义域为D.若存在不为零的数T使得对于任意的$x\in D$，都有$x\pm T\in D$，且

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立，则称$f(x)$为周期函数，其中T叫做函数的周期. 通常周期函数的周期是指它的最小正周期.

例如，$y=\sin x$，$y=\cos x$都是以2π为周期的周期函数，$y=\tan x$，$y=\cot x$都是以π为周期的周期函数. 周期函数的图形是按照周期重复出现的，参见附录Ⅱ.

3. 函数的单调性

定义 5 设函数$f(x)$的定义域为D，$(a,b)\subseteq D$，任取x_1、$x_2\in(a,b)$，且$x_1<x_2$，恒有

$$f(x_1)<f(x_2)$$

则称函数$f(x)$在(a,b)内是单调增加的，如图1-4(a)所示.

如果任取x_1、$x_2\in(a,b)$，且$x_1<x_2$，恒有

$$f(x_1)>f(x_2)$$

则称函数$f(x)$在(a,b)内是单调减少的，如图1-4(b)所示. 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

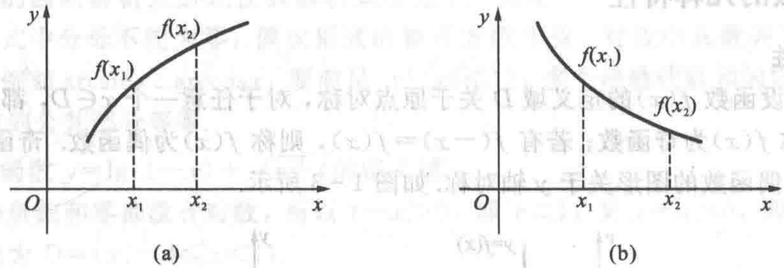


图 1-4

例如，函数$f(x)=x^2$在区间$[0,+\infty)$内是单调增加的，在区间$(-\infty,0]$内是单调减少的；但是在区间$(-\infty,+\infty)$内，函数$f(x)=x^2$不是单调的.

又如，函数$f(x)=x^3$在区间$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的.

如果函数$y=f(x)$在(a,b)内是增函数(或是减函数)，则称函数$f(x)$在区间(a,b)内是单调函数，区间(a,b)叫做函数$f(x)$的单调区间. 函数在区间(a,b)内的单调增加或单调减少的性质，叫做函数的单调性.

4. 函数的有界性

定义 6　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $I\subseteq D$，如果存在正数 M，使得与任一 $x\in I$ 所对应的函数值都满足不等式

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称 $f(x)$ 在 I 内有界. 如果这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 I 内无界. 这就是说，如果对于任何正数 M，总存在 $x_1\in I$，使 $|f(x_1)|>M$，那么函数 $f(x)$ 在 I 内无界.

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，因为无论 x 取任何实数，$|\sin x|\leqslant 1$ 都能成立. 这里 $M=1$（当然也可取大于 1 的任何数作为 M，而 $|\sin x|\leqslant M$ 成立）. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内无界，因为不存在这样的正数 M，使 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 对于 $(0,1)$ 内的一切 x 都成立. 事实上，对于任意取定的正数 M（不妨设 $M>1$），则 $\dfrac{1}{2M}\in(0,1)$，当 $x_1=\dfrac{1}{2M}$ 时，$\left|\dfrac{1}{x_1}\right|=2M>M$. 但是 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内是有界的，例如可取 $M=1$ 而使 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$ 对于区间 $(1,2)$ 内的一切 x 值都成立.

1.1.3　初等函数

1. 基本初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数.

(1) 常数函数 $y=C$（C 为常数）.

(2) 幂函数 $y=x^{\mu}$（μ 为常数，$\mu\in\mathbf{R}$）.

(3) 指数函数 $y=a^x$（$a>0$，$a\neq 1$，a 为常数）；$y=\mathrm{e}^x$（$\mathrm{e}=2.718\,281\,828\,49\cdots$）.

(4) 对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq 1$，a 为常数）；$y=\ln x$（自然对数）.

(5) 三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$.

(6) 反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$. $y=\mathrm{arccot}\, x$.

上述基本初等函数的图形请读者参见附录Ⅱ.

2. 复合函数

先看一个例子，设 $y=\sqrt{u}$，而 $u=1+x^2$，以 $1+x^2$ 代替 $\sqrt{u}$ 中的 u，得 $y=\sqrt{1+x^2}$，我们称它为由 $y=\sqrt{u}$，$u=1+x^2$ 复合而成的复合函数.

定义 7　设 $y=f(u)$，而 $u=\varphi(x)$ 且函数 $\varphi(x)$ 的值域全部或部分包含在函数 $f(u)$ 的定义域内，那么 y 通过 u 的联系成为 x 的函数，我们把 y 叫做 x 的复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 叫做中间变量.

例 5 试求由函数 $y=u^3$，$u=\tan x$ 复合而成的函数.

解 将 $u=\tan x$ 代入 $y=u^3$ 中，即得所求复合函数 $y=\tan^3 x$.

有时，一个复合函数可能由三个或更多的函数复合而成. 例如，由函数 $y=2^u$，$u=\sin v$ 和 $v=x^2+1$ 可以复合成函数 $y=2^{\sin(x^2+1)}$，其中 u 和 v 都是中间变量. 反之，分析一个复合函数的复合结构一般由外向里，每一步都应是基本初等函数的形式.

例 6 指出下列复合函数的结构.

(1) $y=\cos^2 x$； (2) $y=\sqrt{\cot\dfrac{x}{2}}$； (3) $y=\mathrm{e}^{\sin\sqrt{x-1}}$.

解 (1) $y=u^2$，$u=\cos x$；

(2) $y=\sqrt{u}$，$u=\cot v$，$v=\dfrac{x}{2}$；

(3) $y=\mathrm{e}^u$，$u=\sin v$，$v=\sqrt{\omega}$，$\omega=x-1$.

3. 初等函数

定义 8 由基本初等函数及常数经过有限次四则运算和有限次复合运算所构成的，并且可用一个数学式子表示的函数，称为初等函数.

例如，$y=\sqrt{\ln 5x}-3^x$，$y=\dfrac{\sqrt[3]{3x}+\tan 5x}{x^3\sin x-2^{-x}}$都是初等函数.

今后我们所讨论的函数，绝大多数都是初等函数.

在定义域的不同范围内用不同的解析式表示的函数称为分段函数. 一般说来分段函数不是初等函数，分段函数往往不能用一个解析式子表示. 例如

$$y=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1 & x\geqslant 0\\ -1 & x<0\end{cases}；\quad y=f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x & x<2\\ x+2 & x\geqslant 2\end{cases}$$

习题 1－1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ (2) $f(x)=\sqrt{3x+2}$

(3) $f(x)=\ln(x-5)$ (4) $f(x)=\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{2-x}$

2. 指出下列各组函数的同异性，为什么？

(1) $y=\ln x^3$，$y=3\ln x$ (2) $y=\dfrac{1}{x+1}$，$y=\dfrac{x-1}{x^2-1}$

(3) $y=\ln x^6$，$y=(\ln x)^6$ (4) $y=|x|$，$y=(\sqrt{x})^2$

3. 指出下列函数的复合过程：

(1) $y=(7x-5)^3$ (2) $y=\cos^2 x$

(3) $y=\sqrt{x^2+2x}$ (4) $y=\ln\sqrt{\sin x+3}$

1.2 极限的概念

极限描述的是变量在某个变化过程中的变换趋势. 比如现实生活中电池的充放电；从市场的变化趋势来预测产品需求状况，等等，这些过程从数学上看便体现了极限的思想.

1.2.1 数列的极限

数列是按正整数的顺序排列的无穷多个数. 通常也把数列写成

$$y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots$$

数列中的每一个数叫做数列的项. 第 n 项 y_n 叫做数列的通项或一般项.

例如

$$\begin{cases} 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \cdots, \dfrac{1}{n}, \cdots \\ \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \cdots, \dfrac{n}{n+1}, \cdots \\ 1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots \\ 1, 3, 5, 7, \cdots, (2n-1), \cdots \end{cases}$$

等都是数列.

数列可用通项简记为 $\{y_n\}$.

因此，上述数列可简写为：$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$；$\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$；$\{(-1)^n\}$；$\{(2n-1)\}$.

我们要研究的问题是：给定一个数列 $\{y_n\}$，当项数 n 无限增大时，通项 y_n 的变化趋势.

下面首先研究我国古代有关数列极限思想的一个例子.

战国时代哲学家庄周在所著的《庄子 · 天下篇》中说过："一尺之棰，日取其半，万世不竭."用数学语言描述就是说一根一尺长的木棒，每天截去一半，这样的过程可以无限地进行下去.

我们把每天截后剩下部分的长度记录如下(单位为尺)：

第一天剩下：$\dfrac{1}{2}$；第二天剩下：$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2^2}$；第三天剩下：$\dfrac{1}{2^3}$，…，第 n 天剩下：$\dfrac{1}{2^n}$，…，这样就得到一个数列

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$$

可以看出，当 n 无限增大时，不论 n 有多么大，$\frac{1}{2^n}$总不会等于 0，但是，数列$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$将无限地与 0 接近. 这个例子反映了某一数列的某种特性. 一般地说，当 n 无限增大时，数列中的通项 y_n随着 n 的无限增大而趋于某个固定的常数；或者说，y_n的变化趋势是以该常数为目标，这时，我们就说该数列以这个常数为极限.

定义 1 给定数列$\{y_n\}$，如果当 n 无限增大时，y_n无限接近于一个确定的常数 A，则称 n 趋于无穷大时(记为 $n\to\infty$)，数列$\{y_n\}$以常数 A 为极限，也称数列$\{y_n\}$收敛于 A. 记作

$$\lim_{n\to\infty} y_n=A \quad 或 \quad y_n\to A(n\to\infty)$$

否则，称数列$\{y_n\}$没有极限，也称该数列是发散的.

观察前面给出的 4 个数列的极限可以看出：

数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$，当 n 无限增大时，其倒数$\frac{1}{n}$会随之越来越小，无限趋近于零，即数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$是收敛的，且有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

数列$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$，当 n 无限增大时，$\frac{n}{n+1}$无限趋近于 1，即数列$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$是收敛的，且有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

数列$\{(-1)^{n+1}\}$，当 n 无限增大时，y_n总是在 1 与 -1 之间跳跃，永远不会趋近于某一个固定的数. 因此它没有极限，是发散的.

数列$\{2n-1\}$，当 n 无限增大时，y_n将随着 n 增大而增至无穷大，我们说它也没有极限，是发散的.

例 1 判断下列数列是否有极限，如果有，写出它的极限.

(1) -3，-3，-3，…，-3，…；

(2) $-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$-\frac{1}{8}$，$\frac{1}{16}$，…，$(-1)^n\frac{1}{2^n}$，…；

(3) 1，4，9，16，…，n^2，….

解 (1) 这个数列是常数列，通项 $y_n=-3$，数列的极限是-3，即

$$\lim_{n\to\infty}(-3)=-3$$

(2) 这个数列是公比 $q=-\frac{1}{2}$的等比数列，通项 $y_n=(-1)^n\frac{1}{2^n}$，可以看出，当 n 无限增大时，$(-1)^n\frac{1}{2^n}$无限趋近于 0，即