高等院校考研数学精品辅导丛书

高等数学

同济第七版 下册

同步辅导·习题全解·考研精粹

主编 张军好

教材习题详细解答
考研大纲深度解读
知识结构图全面归纳
典型题强化解题技巧
近年考研题模拟实战

西北工業大學出版社

高等院校考研数学精品辅导丛书

高等数学

同济第七版 下册

同步辅导·习题全解·考研精粹

主　编　张军好

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书为《高等数学》(同济・七版)的配套辅导书,分为上、下两册.下册共分为5章,每章包含本章知识结构图、考研大纲要求、考研试卷分值统计、本章内容概述、题型与方法、考研真题解析、教材课后习题详解、目标自测题与答案共七部分.本书主要特点是例题种类详细,知识点的结构层次清楚,内容充实,方法性强以及与考研联系紧密.

本书是使用该教材的教师与学生的同步辅导书,也可作为考研数学复习的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步辅导・习题全解・考研精粹/张军好主编.—西安:西北工业大学出版社,2016.4
ISBN 978-7-5612-4779-2

Ⅰ.①高… Ⅱ.① 张… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—题解 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第073107号

出版发行:西北工业大学出版社
通信地址:西安市友谊西路127号 **邮编**:710072
电　　话:(029)88493844 88491757
网　　址:www.nwpup.com
印 刷 者:武汉武铁印刷厂
开　　本:880mm×1 230mm 1/32
印　　张:20.375
字　　数:529千字
版　　次:2016年4月第1版 2016年5月第1次印刷
定　　价:52.00元(上、下册)

高等院校考研数学精品辅导丛书
编 委 会

前　　言

本书为《高等数学》(同济·七版)配套使用的学习辅导与习题全解,共分上、下两册,可以作为使用该教材的老师与学生的同步辅导书,也可作为考研数学的复习用书.

当前,我国的高等教育已经走向大众化的教育,社会各界对高等教育的质量十分关注.我们编写这本配套教辅书,主要是为了适应这种新时期大学数学教育的新要求,一方面满足学生学习高等数学课程的需要,期望对保证和提高高等数学课程的教学质量,对广大学生掌握高等数学的基本思想与方法起到辅导作用;另一方面,也为了满足不同层次的学生的学习需要,利用辅导书这种形式,对教材的内容与解题方法作出总结、延伸与扩展,对大学生继续深造给予帮助,同时对新时期的大学教育如何培养具有创新精神的优秀人才作出有益的探讨.

本册为配套辅导的下册,按照配套辅导书的编写要求,本册内容按章编写,与教材同步.每章包含知识结构图、考研大纲要求、考研试卷分值统计、本章内容概述、题型与方法、考研真题解析、教材课后习题详解、目标自测题与答案共七部分.基本结构如下:

知识结构图:对本章主要内容作一个结构图表,使读者对其重点内容关系结构一目了然.

考研大纲要求:结合教育部颁发的研究生入学考试的基本要求对本章教学内容按"了解""理解"与"掌握"3个层次进行了分类编注,使读者对高等数学的考研要求做到一目了然,成竹在胸.

考研试卷分值统计:对近16年来的历届研究生入学考试数学一、数学二中的高等数学内容分数值进行了统计,使读者对该章内容在考研数学中所占比例一目了然.

本章内容概述、题型与方法:该部分包含本节的知识结构图、重点内容概述、典型例题·方法与技巧三方面的内容。它对本章的内容与方法进行了归纳总结,将基本的理论、基本的方法、解题技巧等多方面的内容融于范例之中.这些典型例题注重分析解题思想,揭示解题规律,引导读者如何思考问题,对培养读者

理性思维及分析问题和解决问题的能力大有帮助.

考研真题解析:考研题型与方法部分主要将近10年来全国硕士研究生入学考试数学一、数学二试题中高等数学部分进行了归纳与整理,对典型的测试类型进行了详细的剖析,并指出了经常的测试类型的大致演变方向,使读者对考研题目有一个清楚的认识,把握学习的方向,这对以后考研大有益处.

教材课后习题详解:该部分对教材中节后练习与章后练习作出了详细的解答,以便学生在学习过程中对自己的解题答案与过程进行对照、比较,从中找出自己的不足之处,达到对问题的更深刻和更透彻的理解.

目标自测题与答案:该部分是笔者基于自己多年的教学经验并结合历年考研数学试题特点科学设计的,目的是给读者提供更深入的练习机会,让读者进一步消化知识、夯实考点、提高能力.

本书体现了例题种类详细、知识点的结构层次清楚、内容充实、方法性强以及与考研联系紧密的特点.

编写本书曾参阅了相关文献资料,在此谨向其作者深表谢忱。

由于水平所限,书中难免有不妥之处,恳请各位同行、读者批评指正.

编　者

2016年2月

目　　录

第八章　向量代数与空间解析几何

① 知识结构图

- 空间解析几何与向量代数
  - 向量代数
    - 向量的概念
      - 表示方法
      - 模、方向、方向角、方向余弦
    - 向量的运算
      - 线性运算
      - 数量积
      - 向量积
      - 混合积
    - 向量的位置关系
      - 两向量垂直、平行
      - 三向量共面
  - 解析几何
    - 平面方程
      - 点法式
      - 一般式
      - 截距式
    - 直线方程
      - 一般式
      - 对称式
      - 参数式
    - 线面关系
      - 面面关系
        - 夹角
        - 垂直、平行
      - 线线关系
        - 夹角
        - 垂直、平行
      - 线面关系
        - 夹角
        - 垂直、平行
    - 曲面
      - 旋转曲面
      - 柱面
      - 二次曲面
    - 曲线
      - 投影曲线
      - 参数式方程
      - 一般式方程

② 考研大纲要求

1. 理解空间直角坐标系，理解向量的概念及其表示.

2. 掌握向量的线性运算,掌握单位向量、方向角与方向余弦,掌握用坐标表达式进行向量运算的方法.

3. 掌握向量的数量积、向量积、混合积,并能用坐标表达式进行运算.

4. 了解两个向量垂直、平行的条件.

5. 理解曲面方程的概念,了解常用二次曲面的方程及其图形,会求以坐标轴为旋转轴的旋转曲面及母线平行于坐标轴的柱面方程.

6. 了解空间曲线的概念,了解空间曲线的参数方程和一般方程. 了解空间曲线在坐标平面上的投影,并会求其方程.

7. 掌握平面方程及其求法,会求平面与平面的夹角,并会利用平面的相互关系(平行、垂直、相交等)解决有关问题.

8. 掌握直线方程的求法,会利用平面、直线的相互关系解决有关问题. 会求点到直线及点到平面的距离.

3 考研试卷分值统计

表 8-1 为近 16 年期间,本章所含知识点在"数学一"和"数学二"考研真题中所占分值统计.

表 8-1　第一章高等数学考研试卷分值统计情况

年份/年		2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
分数	数学一	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	数学二	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

4 本章内容概述、题型与方法

第一节　向量及其线性运算

一、本节知识结构图

向量及其线性运算
- 向量的概念
  - 表示方法
  - 向量的模、方向角与方向余弦
- 线性运算
  - 加减法
    - 交换律
    - 结合律
  - 数乘
    - 结合律
    - 分配律
- 空间直角坐标系
  - 向量在轴上的投影
  - 利用坐标作向量的线性运算

二、重点内容概述

1. 向量的定义:既有大小又有方向的量称为向量.

2. 向量的表示:用空间有向线段来表示向量.

3. 向量相等:大小相等且方向相同的两个向量相等.

4. 向量的模:向量的大小称为向量的模. 设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,则向量 $\boldsymbol{a}$ 的模为 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$.

5. 单位向量、零向量及负向量:模为 1 的向量为单位向量;模为 0 的向量为零向量,其方向任意;与 $\boldsymbol{a}$ 大小相等且方向相反的向量称为负向量,记作 $-\boldsymbol{a}$.

6. 平行向量:两个非零向量,如果它们的方向相同或相反,就称这两个向量平行,记为 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$. 零向量与任何向量都平行.

7. 方向角与方向余弦:非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与坐标轴的三个夹角 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角,$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦. 设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,则 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量是它的方向余弦,即

$$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\left(\frac{\boldsymbol{a}_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\frac{\boldsymbol{a}_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\frac{\boldsymbol{a}_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\right)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

8. 向量在轴上的投影:设向量 $\boldsymbol{a}$ 与数轴 u 的夹角为 φ,则 $|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 u 轴上的投影,记为 $\mathrm{Prj}_u a$. 即

$$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cdot\cos\varphi,\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_2,\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\,\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$$

向量 $\boldsymbol{a}$ 在与其方向相同的轴上的投影为向量的模 $|\boldsymbol{a}|$. 在空间直角坐标系上,向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标 (a_x,a_y,a_z) 是 $\boldsymbol{a}$ 向各坐标轴的投影. 向量 $\boldsymbol{a}$ 可以表示成分量形式 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$.

9. 加减法运算:向量的加减法运算服从平行四边形法则和三角形法则.

10. 数乘运算:向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积,记为 $\lambda\boldsymbol{a}$. 当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同,模增大或减小 λ 倍;当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反,模增大或减小 λ 倍.

11. 线性运算性质:

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;

(3) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(4) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

三、典型例题、方法与技巧

例 1　设一向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴正向、y 轴正向的夹角相等,与 z 轴正向的夹角是前者的两倍. 求与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量.

解:设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴正向、y 轴正向的夹角为 α,它与 z 轴正向的夹角为 2α. 那么 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦分别是 $\cos\alpha,\cos\alpha,\cos2\alpha$. 则有

$$\cos^2\alpha+\cos^2\alpha+\cos^2(2\alpha)=1$$
$$2\cos^2\alpha-1+\cos^2(2\alpha)=0$$
$$\cos2\alpha(\cos2\alpha+1)=0$$

所以
$$\cos2\alpha=0 \text{ 或 } \cos2\alpha=-1$$

又 $2\alpha\in[0,2\pi]$,所以 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{\pi}{2}$,则

$$\cos\alpha=\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2},\cos\gamma=0 \text{ 或 } \cos\alpha=\cos\beta=0,\cos\gamma=-1$$

因此,与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$ 或 $(0,0,-1)$.

思路点拨:(1)向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦就是与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量的各坐标分量.

(2)向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 满足 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

例 2 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴成 $45°$,与 y 轴成 $60°$,它在 z 轴的坐标是负的,长度为 6,求向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标及同方向的单位向量.

解:设向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$,则其单位向量为 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$. 由题意知,$\cos\alpha=\cos45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\cos\beta=\cos60°=\frac{1}{2}$,又由 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$,得 $\cos^2\gamma=\frac{1}{4}$. 又因为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 z 轴的坐标是负的,所以 $\cos\gamma<0$,故 $\cos\gamma=-\frac{1}{2}$. 所以向量 $\boldsymbol{a}=6\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=(3\sqrt{2},3,-3)$,与其同方向的单位向量为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

例 3 已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$ 和 $M_2(3,0,2)$,计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦、在 x 轴上的投影及在 y 轴上的投影向量.

解:向量 $\overrightarrow{M_1M_2}=(3-4,0-\sqrt{2},2-1)=(-1,-\sqrt{2},1)$,故
$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{2})^2+1^2}=2$$

方向余弦为
$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2},\cos\gamma=\frac{1}{2}$$

向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在 x 轴上的投影为 -1,在 y 轴上的投影向量为 $-\sqrt{2}\boldsymbol{j}$.

思路点拨:注意,投影是数量,而投影向量是向量,二者不可混淆.

例 4 利用向量的方法证明:三角形的中位线平行于底边,且它的长度等于底边的一半.

证明:设 $\triangle ABC$ 中,D,E 分别为 AB,AC 的中点,因为
$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{EA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$$

所以
$$\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB},\text{即}\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

故 $\overrightarrow{DE}\parallel\overrightarrow{BC}$ 且 $|\overrightarrow{DE}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$,结论得证.

第二节　数量积、向量积、混合积

一、本节知识结构图

- 数量积、向量积、混合积
  - 数量积
    - 定义
    - 两向量垂直的充要条件
    - 数量积的坐标表示
    - 数量积的投影表示
  - 向量积
    - 定义
    - 两向量平行的充要条件
    - 向量积的几何意义
  - 混合积
    - 定义
    - 三向量共面的充要条件
    - 混合积的几何意义

二、重点内容概述

1. 数量积的定义：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，其中 θ 为两向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角. 在空间直角坐标系下，若 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

2. 向量的夹角公式：$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$.

3. 用数量积表示向量的模：$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$.

4. 数量积与投影的关系：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$.

5. 利用数量积判断向量垂直：$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$.

6. 数量积的运算规律：

交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

7. 向量积的定义：向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是一个向量，其模为 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，其中 θ 为两向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角，其方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 且垂直于 $\boldsymbol{b}$，并且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 可构成右手系.

8. 向量积的计算公式：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}$$

9. 利用向量积判断向量平行：$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$.

10. 向量积的应用：以非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积为 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$，

以非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的三角形的面积为$\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$，三点 A、B、C 共线的充分必要条件为$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=0$.

11. 向量积的运算规律：

反交换律：$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

12. 混合积的定义：$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$. 在空间直角坐标系下，若 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，$\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$则

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

13. 混合积的运算规律：$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]$.

14. 利用混合积判断向量共面：$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面$\Leftrightarrow[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=0$.

三、典型例题、方法与技巧

例 1 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta=\frac{3\pi}{4}$且$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{b}|=3$，求$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

解：$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$

$$=|\boldsymbol{a}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta+|\boldsymbol{b}|^2=2-2\times\sqrt{2}\times3\times\cos\frac{3\pi}{4}+9=17$$

所以$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{17}$.

例 2 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，求与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都垂直的向量 $\boldsymbol{c}$ 及以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

解：由向量积的定义知

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}=-3\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{j}-9\boldsymbol{k}$$

以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积为

$$S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-3)^2+(-8)^2+(-9)^2}=\sqrt{154}$$

例 3 设 $\boldsymbol{a}=(1,0,2)$，$\boldsymbol{b}=(1,1,3)$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}$，若 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$，求 λ.

解：因为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}=-2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$$

同理
$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$$

所以
$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}=(1,0,2)+\lambda(-2,5,1)=(1-2\lambda,5\lambda,2+\lambda)$$

又因为 $\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{c}$,所以$\dfrac{1-2\lambda}{1}=\dfrac{5\lambda}{1}=\dfrac{2+\lambda}{3}$,故 $\lambda=\dfrac{1}{7}$.

例 4　已知$|\boldsymbol{a}|=6$,$|\boldsymbol{b}|=3$,$|\boldsymbol{c}|=3$,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$,$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$,求$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$.

解: $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta=6\times3\times\sin\dfrac{\pi}{6}=9$,

因为 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$,所以 $\boldsymbol{c}/\!/\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,故 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角 $\beta=0$ 或 π.

所以$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\beta=\pm27$.

第三节　曲面及其方程

一、本节知识结构图

$$\text{曲面及其方程}\begin{cases}\text{旋转曲面}\\\text{柱　　面}\\\text{二次曲面}\end{cases}$$

二、重点内容概述

1. 曲面方程的 3 种形式:

(1)一般形式:$F(x,y,z)=0$;

(2)显式形式:$z=f(x,y)$;

(3)参数形式:$\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v).\\z=z(u,v)\end{cases}$

2. 旋转曲面方程:设 C:$f(y,z)=0$ 为平面 Oyz 上的曲线,则

(1)C 绕 z 轴旋转所得的曲面方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$;

(2)C 绕 y 轴旋转所得的曲面方程为 $f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$.

3. 常见的旋转曲面及其方程:

(1)Oyz 平面内的直线 $z=ay$ 绕 z 轴旋转所得的曲面为圆锥面,其方程为

$$z=\pm a\sqrt{x^2+y^2}$$

(2)Oxz 平面内的双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 绕 z 轴(x 轴)旋转所得的曲面为单叶(双叶)双曲面,其方程为

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\qquad\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2+y^2}{c^2}=1\right)$$

(3)Oxz 平面内的抛物线 $z=x^2$ 绕 z 轴旋转所得的曲面为旋转抛物面,其方程为

$$z=x^2+y^2$$

(4)Oyz 平面内的椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$绕 z 轴旋转所得的曲面为旋转椭球面，其方程为

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

4. 柱面方程：

(1)母线平行于 x 轴的柱面方程为 $F(x,y)=0$；

(2)母线平行于 y 轴的柱面方程为 $G(y,z)=0$；

(3)母线平行于 z 轴的柱面方程为 $H(x,z)=0$.

5. 常见的柱面及其方程：

(1)圆柱面 $x^2+y^2=R^2$；　(2)椭圆柱面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$；

(3)抛物柱面 $y^2-2pz=0$；　(4)双曲柱面$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$；

(5)平面 $y=ax+b$.

6. 常见的二次曲面及其方程

(1)椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$；　(2)椭圆锥面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$

(3)椭圆抛物面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$；

(4)双曲抛物面(马鞍面)$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$ 特殊双曲抛物面 $z=xy$；

(5)单叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$；　(6)双叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$；

(7)二次柱面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，$y=ax^2$.

三、典型例题、方法与技巧

例 1　说明曲面$\begin{cases}x=a\sin\varphi\cos\theta\\ y=a\sin\varphi\sin\theta\\ z=a\cos\varphi\end{cases}$$(0\leqslant\varphi\leqslant\pi,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$所代表的图形的形状.

解：因为

$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2&=(a\sin\varphi\cos\theta)^2+(a\sin\varphi\sin\theta)^2+(a\cos\varphi)^2\\&=(a\sin\varphi)^2+(a\cos\varphi)^2=a^2\end{aligned}$$

所以曲面代表以原点为球心，以 a 为半径的球面.

例 2　将 Oxy 坐标面上的双曲线 $4x^2-9y^2=36$ 分别绕 x 轴及 y 轴旋转一周，求所生成的旋转曲面的方程.

解：曲线绕 x 轴旋转一周所生成的旋转曲面的方程为 $4x^2-9y^2-9z^2=36$，它是旋转双叶曲面.

曲线绕 y 轴旋转一周所生成的旋转曲面的方程为 $4x^2-9y^2+4z^2=36$，它是