



# 海洋工程非线性动力学 理论与方法

唐友刚 刘利琴 张素侠 著



科学出版社

# 海洋工程非线性动力学理论与方法

唐友刚 刘利琴 张素侠 著

科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书阐述非线性动力学理论与方法及其在海洋工程中的应用。主要内容包括单自由度非线性振动、多自由度非线性振动、参数激励非线性振动、非线性振动稳定性的分析方法、非线性系统求解的图解法和数值模拟方法,概要介绍现代非线性动力学分岔和混沌理论;结合大量海洋工程实例,包括船舶的非线性和参数激励运动、铰接塔平台的非线性动力特性分析、深海平台垂荡-纵摇耦合动力特性及海洋细长构件的非线性动力特性分析等,详细阐述海洋结构非线性动力学建模、求解和分析方法,揭示海洋工程结构物复杂的非线性动力学行为,包括内共振响应、无周期响应、异频振动响应、参数激励响应、分岔和混沌响应等。

本书可作为大学本科高年级学生及研究生的教学参考书或教学用书,还可供从事船舶与海洋工程、机械工程、土木工程及水利水电工程等方面的科技人员参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

海洋工程非线性动力学理论与方法 / 唐友刚, 刘利琴, 张素侠著.

—北京: 科学出版社, 2016.12

ISBN 978-7-03-051417-2

I. ①海… II. ①唐… ②刘… ③张… III. ①海洋工程-非线性-动力学 IV. ①P75

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 316746 号

责任编辑: 牛宇锋 王 苏 / 责任校对: 郭瑞芝

责任印制: 张 伟 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2016 年 12 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16

2016 年 12 月第一次印刷 印张: 23 3/4

字数: 463 000

定价: 128.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

## 序

非线性动力学理论是近年来国内外理论研究的热点之一。非线性振动理论起源于 20 世纪 20 年代。改革开放以来,我国科学技术和经济建设的跨越式发展提出了大量非线性振动问题,国民经济不同工程领域的非线性振动问题的研究促进了非线性动力学理论与方法的发展,推动我国科学技术的不断进步。

海洋资源开发与海洋空间利用是 21 世纪人类开发海洋的两大主题。国内外海洋工程装备研发理论与技术的迅猛发展提出了大量非线性动力学问题亟待研究解决,包括舰船波浪中的运动、深海平台系泊系统耦合动力响应、海洋柔性细长构件参数激励振动等,为非线性动力学理论与方法提供了广阔的应用发展空间。

该书作者及其团队,多年来研究海洋工程中的非线性动力学问题,拓宽了非线性动力学的应用研究领域,解决了大量海洋装备中的非线性动力学问题,取得了多项研究成果。

该书总结了作者多年研究非线性动力学理论和方法的成果,尤其凝练了基于非线性动力学理论,针对海洋工程中的大量实际问题所做的研究工作。

相信该书的出版,会对我国海洋工程领域的人才培养和技术进步起到推动作用。

陈予恕

天津大学 教授

中国工程院院士

2016 年 5 月

## 前 言

随着海洋资源开发与海洋空间利用工程的发展,出现了多种形式的海洋结构物。研究这些海洋结构物的环境载荷、动力响应特性及其在动力载荷作用下的动力响应分析理论,形成了一门崭新的学科——海洋工程结构动力学。该学科的根本目的是为海洋工程结构的设计开发、建造与安装提供坚实的理论基础。为此,作者曾经于2008年出版了《海洋工程结构动力学》一书,受到同行的普遍欢迎。

作者在研究海洋工程结构动力响应及其安全分析的工作中,遇到了大量海洋工程结构的非线性动力学问题。这些问题采用线性振动理论无法解决,甚至得到与海洋结构实际现象完全违背的结果。例如,船舶在纵浪中大幅横摇运动及倾覆现象,顺应式平台的大幅及慢漂运动,深海平台升沉与摇摆运动的耦合关系等,这些动力学问题无法采用线性振动理论进行分析。多年来,作者课题组及国内外同行结合不断涌现的海洋新型结构,应用非线性动力学的理论和方法,开展了大量卓有成效的研究工作,发展了非线性动力学理论与方法,拓宽了其应用范围。

海洋工程结构的非线性振动或者运动,导致结构物出现异常损伤和破坏。为了揭示海洋结构由于非线性振动或者非线性运动原因引起的损伤与失效机理,发现复杂非线性振动(运动)响应出现的条件,以及非线性振动(运动)引起的有害后果,采用非线性动力学研究海洋结构动力响应是海洋工程领域科技的发展趋势与需求。本书正是为了适应该发展趋势和需要编写而成。

非线性振动(运动)的研究方法可以分为解析方法及数值方法。国内外许多学者致力于非线性振动理论与解析方法的研究。近年来,该理论研究得到了很大的发展。特别是分岔和混沌理论的研究工作,在工程实践中出现了一大批应用成果。近30年来,计算机技术迅速发展,大量的非线性振动问题可以采用数值模拟方法获得解决,这进一步推进了非线性振动理论和方法的进步,尤其为多自由度非线性振动问题的求解提供了强有力的方法。

本书密切结合海洋工程非线性振动(运动)实际,阐述非线性振动系统分析的理论与方法,以及动力学中分岔与混沌分析的基本理论。编写过程力求便于工程应用,紧密结合海洋工程实际。

本书共12章,第1章介绍非线性振动的基本概念、海洋工程中的非线性振动问题;第2章介绍单自由度非线性自由振动方程的近似解法、单自由度非线性系统自由振动的特点;第3章介绍单自由度非线性系统强迫振动的近似解法,分析

非线性系统强迫振动响应的特点；第4章介绍单自由度参数激励振动系统的求解方法；第5章介绍弱非线性多自由度系统的多尺度法、多自由度系统内共振和参数激励响应特点，以及船舶斜浪航行的非线性运动分析方法；第6章介绍非线性系统的稳定性分析方法，包括李雅普诺夫方法、劳斯-赫尔维茨方法及参激系统稳定性判别方法；第7章介绍非线性系统的图解法与数值解法，包括点映射和胞映射方法，求解多自由度非线性动力响应的数值模拟方法；第8章介绍非线性系统的分岔与混沌分析方法；第9章介绍顺应式铰接塔平台系统非线性动力响应的分析方法，包括建模、求解过程及动力响应特点；第10章介绍船舶非线性运动，包括横浪中的强迫横摇运动，纵浪中的参数激励横摇及斜浪中的参数激励横摇；第11章介绍深海 Spar 平台的非线性动力分析，包括平台的垂荡-纵摇耦合运动及运动稳定性分析；第12章介绍海洋细长构件的动力响应分析，包括深海立管的涡激非线性振动、张力腿的非线性振动及缆索的冲击动力响应。

多年来，本书作者及其团队从事海洋工程结构非线性动力学的教学和科研工作，承担 863 计划项目、国家自然科学基金项目、973 计划项目(2014CB046805)、博士点基金等。本书是在作者多年科研和教学基础上编写而成的。感谢作者研究团队为本书做出的贡献，他们是田凯强、郑俊武、张延峰、王文杰、谢文会、刘利琴、李红霞、张素侠、赵晶瑞等。特别感谢董艳秋教授对作者多年的指导与支持。

本书由唐友刚、刘利琴、张素侠等共同编写。具体分工为：唐友刚编写第1~第5章；张素侠编写第7章；刘利琴编写第8~第10章；唐友刚和李焱编写第11章；第6及第12章由张素侠和刘利琴共同完成。全书由唐友刚统稿。

在本书编写过程中，参阅和引用了同行专家的资料和科研成果。天津大学力学的吴志强教授审阅了第6和第8章内容，提出了宝贵的修改意见。在完成书稿的过程中，得到了研究团队博士和硕士研究生李焱、曲晓奇、周光耀、翟佳伟、赵海祥、陈胜利等的热情支持。

陈予恕院士对于本书的出版，给予了很多关心、鼓励和指导，百忙之中亲自为本书作序。在本书付梓之际，作者谨向支持本书出版的所有单位和个人表示衷心的感谢和崇高的敬意。

本书出版，得到973计划项目(2014CB046805)和国家科学基金项目(51279130)的资助，在此深表感谢。

作者水平所限，书中不妥之处在所难免，恳请读者批评指正，衷心感谢读者对本书提出宝贵意见。

唐友刚

2016年6月6日

于天津大学七里台校区

# 目 录

序	
前言	
第 1 章 绪论	1
1.1 研究海洋工程结构非线性动力学的工程意义	1
1.2 海洋工程结构中的非线性振动问题	2
1.2.1 含刚度非线性的非线性振动系统	2
1.2.2 含分段线性非线性恢复力的振动系统	4
1.2.3 参数激励振动系统	6
1.2.4 多自由度的非线性振动系统	11
1.3 海洋工程结构典型的非线性振动方程	13
1.3.1 自治系统与非自治系统	13
1.3.2 保守系统与非保守系统	14
1.3.3 海洋工程中典型的非线性振动方程	14
1.4 非线性振动的特点	16
1.4.1 非线性振动与线性振动的主要区别	16
1.4.2 海洋工程结构的非线性因素	17
1.5 非线性振动问题的求解方法	18
第 2 章 单自由度非线性系统的自由振动	20
2.1 无阻尼自由振动特点	20
2.2 小参数法	23
2.2.1 正规摄动法	23
2.2.2 L-P 小参数法	25
2.3 三级数法	28
2.3.1 三级数法求解思路	28
2.3.2 求解过程	30
2.3.3 无阻尼非线性刚度保守系统	33
2.3.4 线性阻尼非线性刚度系统	34
2.4 平均法	35
2.4.1 导出平均法的标准方程组	36

2.4.2	求振幅和相位平均值	37
2.4.3	非线性系统的等效线性化方法	39
2.5	多尺度法	41
2.5.1	求解思路	41
2.5.2	求解过程	41
2.6	分段线性刚度系统	44
2.7	谐波平衡法	49
<b>第3章</b>	<b>单自由度非线性系统的强迫振动</b>	<b>52</b>
3.1	非线性振动系统的动力响应特性	52
3.1.1	振动的稳定性	52
3.1.2	振动响应幅值的跳跃行为	55
3.2	小参数法	57
3.2.1	L-P 法求非共振情况的解	58
3.2.2	L-P 法求共振情况的解	59
3.3	平均法	62
3.3.1	非共振情况	62
3.3.2	共振情况	63
3.4	多尺度法	67
3.4.1	非共振情况	67
3.4.2	共振情况	67
3.5	单自由度系统的异频振动分析	70
3.5.1	次谐波振动	70
3.5.2	高次谐波振动	72
3.5.3	组合谐波振动	74
3.5.4	分段线性刚度系统	76
3.6	非自治系统的简谐平衡法	79
3.6.1	简谐平衡法	79
3.6.2	增量谐波平衡法	86
<b>第4章</b>	<b>单自由度参数激励振动</b>	<b>90</b>
4.1	参数激励振动的马休方程	90
4.1.1	垂直系泊缆的参数激励振动	90
4.1.2	倾斜系泊缆的参数激励振动	92
4.1.3	受轴向激励简支梁的参数激励振动	94
4.1.4	疏浚吸泥管参数激励振动	95
4.2	稳定性分析的弗洛凯理论	97



4.3	小参数法求马休方程弱激励情况的稳定图	101
4.4	线性阻尼对稳定图的影响	104
4.5	采用谐波平衡法求稳定边界	105
4.6	多尺度法求线性马休方程的近似解	110
4.7	多尺度法求船舶参数横摇马休方程	112
<b>第 5 章</b>	<b>非线性多自由度系统的多尺度法</b>	<b>116</b>
5.1	多自由度系统自由振动分析	116
5.1.1	系统不存在内共振	117
5.1.2	系统存在内共振	118
5.2	带有平方项的非线性振动系统	119
5.3	带有立方项的非线性系统	121
5.3.1	$\Omega \approx \omega_1$ 的情况	122
5.3.2	$\Omega \approx \omega_2$ 的情况	123
5.4	组合共振	125
5.5	多自由度参数激励振动响应	128
5.5.1	$\Omega$ 接近于 $2\omega_1 \approx \omega_2 - \omega_1$ 的情形	129
5.5.2	$\Omega$ 接近于 $2\omega_2$ 的情形	131
5.6	斜浪航行船舶参-强激励运动	132
<b>第 6 章</b>	<b>非线性系统周期解的稳定性</b>	<b>137</b>
6.1	周期解稳定性的定义	137
6.2	稳定性的一次近似判别法	138
6.2.1	一次近似判别	138
6.2.2	劳斯-赫尔维茨判据	140
6.3	参数激励系统的稳定性	140
6.3.1	Spar 平台垂荡-纵摇参数激励系统的稳定性	141
6.3.2	希尔方程的推广	144
6.3.3	线性周期系数系统稳定性的一般定理	146
6.4	李雅普诺夫方法(第二方法)	146
6.4.1	判断定理	147
6.4.2	李雅普诺夫函数 $V$ 的构造方法	148
6.5	Spar 平台运动稳定性	151
6.5.1	Spar 平台纵摇非线性马休方程的建立	151
6.5.2	Spar 平台参数激励纵摇运动分析	152
6.5.3	Spar 平台参-强联合激励纵摇运动分析	163
<b>第 7 章</b>	<b>非线性振动系统的图解法与数值解法</b>	<b>168</b>

7.1	图解法	168
7.1.1	相平面、相轨迹、相点的概念	168
7.1.2	相平面图的作法	169
7.2	点映射与胞映射法	174
7.2.1	点映射	174
7.2.2	胞映射	178
7.3	非线性振动分析的数值解法	185
7.3.1	龙格-库塔方法	185
7.3.2	多自由度增量谐波平衡法	186
7.3.3	简谐加速度方法	193
7.3.4	有限差分法	197
7.4	工程应用实例	199
<b>第 8 章</b>	<b>分岔理论与混沌简介</b>	<b>202</b>
8.1	分岔概述	202
8.1.1	分岔的产生及分类	203
8.1.2	平面向量场分岔	204
8.2	静态分岔与动态分岔	207
8.2.1	单参数静态分岔	207
8.2.2	动态分岔	209
8.3	分岔问题的研究方法介绍	210
8.3.1	L-S 约化方法	210
8.3.2	P-B 规范形方法	212
8.4	混沌运动	214
8.4.1	混沌运动的定义	214
8.4.2	典型的混沌系统举例	215
8.4.3	混沌运动的特征	217
8.4.4	分析混沌的方法	218
8.5	工程应用举例	224
8.5.1	平台垂荡-纵摇耦合运动方程的建立	224
8.5.2	李雅普诺夫指数计算	225
8.5.3	结果及分析	227
<b>第 9 章</b>	<b>铰接塔平台非线性动力特性</b>	<b>233</b>
9.1	铰接塔平台非线性运动	233
9.1.1	力学分析模型	233
9.1.2	铰接塔受力分析	234

9.1.3	运动方程的建立	235
9.1.4	实例计算与分析	235
9.2	考虑系泊张力影响的铰接塔非线性运动	247
9.2.1	运动方程的建立	247
9.2.2	IHB 法求解迭代格式	248
9.2.3	实例计算与分析	250
9.3	铰接塔-油轮系统非线性运动	258
9.3.1	铰接塔-油轮系统非线性耦合运动方程	258
9.3.2	铰接塔-油轮系统受力分析	259
9.3.3	实例计算与分析	261
<b>第 10 章</b>	<b>船舶非线性横摇及参数激励运动</b>	<b>265</b>
10.1	横浪中船舶的非线性横摇运动	265
10.1.1	横浪中船舶横摇非线性运动方程	265
10.1.2	平均方程、分岔方程和定常解	266
10.1.3	定常周期解稳定性分析	268
10.1.4	算例分析	270
10.2	迎浪参数激励横摇运动	272
10.2.1	迎浪中船舶横摇非线性运动方程	272
10.2.2	主参数共振	274
10.3	斜浪参数激励和波浪激励横摇运动	283
10.3.1	船舶参强激励横摇运动近似解析解及其稳定域分析	283
10.3.2	系统参数的影响分析	287
<b>第 11 章</b>	<b>深海 Spar 平台垂荡-纵摇耦合运动分析</b>	<b>296</b>
11.1	垂荡-纵摇耦合运动方程	296
11.2	垂荡-纵摇耦合运动响应分析	299
11.2.1	垂荡-纵摇耦合内共振响应分析	299
11.2.2	垂荡-纵摇耦合组合共振响应分析	301
11.3	垂荡-纵摇耦合运动稳定性分析	304
11.3.1	垂荡-纵摇耦合内共振响应运动稳定性分析及数值验证	304
11.3.2	垂荡-纵摇耦合组合共振响应运动稳定性分析及数值验证	315
<b>第 12 章</b>	<b>海洋细长构件非线性振动</b>	<b>327</b>
12.1	海洋立管非线性振动	327
12.1.1	立管动力学模型	327
12.1.2	海洋立管的参数激励振动	330
12.1.3	海洋立管的涡激振动	337

---

12.1.4	海洋立管的参激涡激联合振动 .....	340
12.2	张力腿平台张力腿的非线性振动 .....	341
12.2.1	张力腿涡激非线性振动方程 .....	342
12.2.2	张力腿涡激非线性振动稳定性 .....	348
12.3	系泊缆索非线性振动 .....	354
12.3.1	模型建立 .....	354
12.3.2	平衡分析 .....	357
12.3.3	缆绳上的外部载荷分析 .....	360
12.3.4	深海缆绳的动力响应计算结果及分析 .....	361
参考文献 .....		366

# 第 1 章 绪 论

## 1.1 研究海洋工程结构非线性动力学的工程意义

振动是自然界广泛存在的自然现象。航行或定位于海洋中的船舶与海洋工程结构物遭受风、浪、流等复杂载荷的作用，时刻处于运动之中。振动可以分为线性振动与非线性振动两大类。线性振动是指该振动系统中的惯性力、阻尼力、恢复力是位移、速度和加速度的线性函数，而且干扰力是简谐的。线性振动可以表述为<sup>[1]</sup>

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad (1-1)$$

其中， $m$  为振动质量； $c$  为阻尼系数； $k$  为刚度系数； $x$  为振动位移； $\dot{x}$  为振动速度； $\ddot{x}$  为振动加速度； $f(t)$  为周期干扰力。由于式(1-1)中的阻尼力、弹性恢复力都是线性函数，所以式(1-1)为二阶非齐次线性微分方程，这样的系统称为线性振动系统<sup>[1]</sup>。船舶在规则横浪作用下的小幅摇摆运动，可以由式(1-1)表示。如果阻尼力和弹性力二者之一或者二者都是位移和速度的非线性函数，则该系统是非线性的，该系统的振动方程为非线性微分方程，非线性微分方程表示的系统为非线性振动系统<sup>[2]</sup>。

$$m\ddot{x} + f(\dot{x}) + f(x) = f(t) \quad (1-2)$$

其中，非线性阻尼力  $f(\dot{x})$  是速度的非线性函数；非线性恢复力  $f(x)$  是位移的非线性函数；干扰力  $f(t)$  是随时间周期变化的函数。这类系统的非线性振动是由结构系统自身的非线性因素引起的。

在海洋工程结构振动时，小尺度构件的波浪干扰力按照莫里森(Morison)公式计算<sup>[3-5]</sup>，干扰力  $f(t)$  包括两部分：拖曳力和惯性力。拖曳力是速度的平方函数，因此，对于海洋工程结构，即使结构系统本身是线性的，由于遭受非线性干扰力的作用，其振动也属于非线性振动。这类系统的非线性振动是由外载荷的非线性因素引起的。

海洋工程结构存在非线性振动，导致海洋结构出现复杂的非线性动力学行为，研究海洋工程结构非线性动力学行为的分析方法及动力学行为特征构成了海洋工程非线性动力学的主要任务和内容。研究内容主要包括：海洋工程结构发生周期振动的规律(振幅、频率、相位的变化规律)，周期解的稳定条件，揭示复杂非线性动力学响应出现的参数域，由此预测和确定海洋结构发生大幅振动的外在和内在因素，确定海洋工程结构非线性有害振动发生的机理和条件，发现极端海况下

结构振动响应的特点，并为减小有害振动、实施振动参数优化提供依据。通过海洋工程非线性动力学行为的研究，掌握其复杂振动的特点和影响因素，修改和调整这些因素或者条件，使结构大幅运动得到减小或者控制，为确保结构系统的安全提供理论技术支持。

## 1.2 海洋工程结构中的非线性振动问题

### 1.2.1 含刚度非线性的非线性振动系统

#### 1. 船舶在规则波浪中横摇

船舶在规则横浪中发生横摇运动。横摇运动方程为<sup>[6]</sup>

$$I_{\phi} \ddot{\phi} + R(\dot{\phi}, t) + K(\phi, t) = M(\Omega, t) \tag{1-3}$$

在小角度横摇(横摇角不大于 10°)情况下，横摇运动方程是线性的，即有

$$\begin{aligned} R(\dot{\phi}, t) &= c\dot{\phi} \\ K(\phi, t) &= k\phi \end{aligned}$$

其中， $I_{\phi}$ 、 $c$ 、 $k$  分别为横摇转动惯量、阻尼力矩系数和恢复刚度系数， $k = \overline{GM}\Delta$ ， $\overline{GM}$  为横摇初稳性高， $\Delta$  为排水量； $\ddot{\phi}$ 、 $\dot{\phi}$ 、 $\phi$  分别为横摇角加速度、横摇角速度和横摇角； $M(\Omega, t)$  为横摇干扰力矩。

在横摇角大于 10° 时，船舶横摇进入大角横摇。船舶阻尼力是横摇角速度  $\dot{\phi}$  的非线性函数，同时，横摇恢复力矩也是横摇角的非线性函数。非线性阻尼力矩表示为

$$R(\dot{\phi}, t) = B_1\dot{\phi} + B_3\dot{\phi}^3 \tag{1-4}$$

恢复力矩根据如图 1-1 所示的静稳性曲线拟合得到<sup>[7]</sup>，图 1-1 乘以排水量即为恢复力矩。

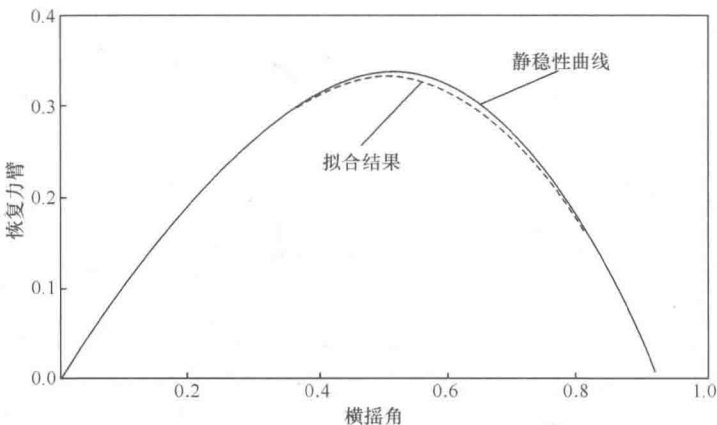


图 1-1 静稳性曲线及拟合结果

将图 1-1 所示曲线乘以排水量进行拟合, 得到恢复力矩的表达式为

$$K(\phi, t) = k_1\phi + k_3\phi^3 + k_5\phi^5 + \dots \quad (1-5)$$

考虑规则波, 则波浪干扰力矩可以写为简谐形式, 即

$$M(\Omega, t) = M_0 \cos \Omega t \quad (1-6)$$

其中,  $M_0$  为波浪干扰力矩的幅值;  $\Omega$  为波浪力矩的圆频率(rad/s)。将式(1-4)~式(1-6)代入式(1-3), 得到船舶的如下非线性横摇运动方程<sup>[6]</sup>:

$$I_\phi \ddot{\phi} + B_1 \dot{\phi} + B_3 \phi^3 + k_1\phi + k_3\phi^3 + k_5\phi^5 = M_0 \cos \Omega t \quad (1-7)$$

式(1-7)为研究船舶和浮体在横浪上大幅运动和倾覆机理的非线性模型, 其包括了阻尼非线性和恢复力非线性。

## 2. 多点系泊系统

为了有效限制浮体在海上的 6 个自由度运动, 采用多条缆绳将浮体的不同位置与海底连接, 形成多点系泊系统, 如图 1-2 所示。

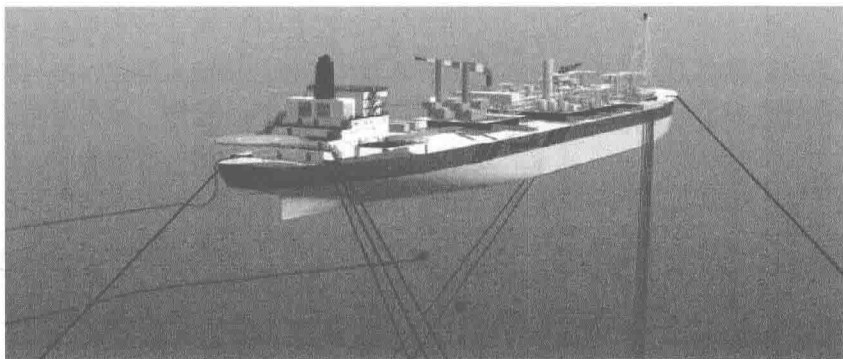
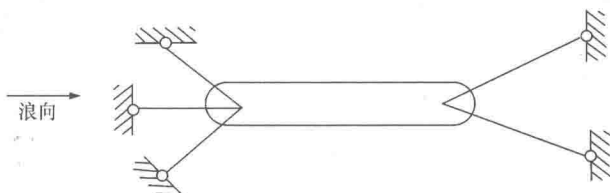


图 1-2 多点系泊船

该系泊方式可以减小船舶的摇摆运动。在迎浪或顺浪状态下, 主要表现为纵荡运动。将多点系泊船简化为图 1-3 所示的分析模型<sup>[3]</sup>。



(a) 多点系泊模型

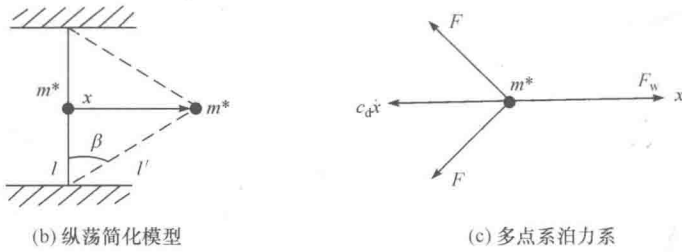


图 1-3 多点系泊船分析模型

假定波浪方向与船体长度方向一致, 则简化模型纵荡运动力的平衡方程为

$$m\ddot{x} + c_d\dot{x} + 2F_H(x, t) = F_w(t) \quad (1-8)$$

其中,  $x$  及其导数  $\dot{x}$ 、 $\ddot{x}$  分别为船舶纵向运动的位移、速度和加速度;  $m$  为包括附连水在内的船舶质量;  $c_d$  为流体阻尼系数;  $F_H(x, t)$  为单根系泊缆索张力在水平方向的分力;  $F_w$  为波浪力沿纵向的分量。若缆索断面面积为  $A$ , 材料的弹性模量为  $E$ , 初张力为  $R_0$ , 则有

$$F_H = F \sin \beta = \frac{x}{l'} \left( R_0 + AE \frac{l' - l}{l} \right)$$

单根缆索伸长后的长度  $l' = l\sqrt{1 + (x/l)^2}$ , 于是有

$$F_H = R_0 \left( \frac{x}{l} \right) + \frac{AE}{2l^3} x^3 \quad (1-9)$$

考虑两根缆索同时起作用, 将式(1-9)代入式(1-8), 则可得到多点系泊系统的纵向运动方程为

$$m\ddot{x} + c_d\dot{x} + \frac{2R_0}{l}x + \frac{AE}{l^3}x^3 = F_w(t) \quad (1-10)$$

式(1-10)包含  $x^3$ , 所以方程是非线性的, 其为系泊船非线性纵荡运动方程。具有三次非线性的方程称为达芬(Duffing)方程, 一般形式为<sup>[2,8]</sup>

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k_1x + k_3x^3 = F_w(t) \quad (1-11)$$

$k_1$  为线性恢复力刚度项系数;  $k_3$  为非线性恢复力刚度项系数。式(1-11)为一类重要的非线性方程的形式。

### 1.2.2 含分段线性非线性恢复力的振动系统

分段线性非线性恢复力是指振动位移在不同阶段, 恢复刚度和恢复力的大小具有不同的表达式, 即将一个运动周期按照恢复力表达式的不同分为几个线性区段, 这种系统称为分段线性非线性振动系统<sup>[2]</sup>。



在海洋油气资源开发生产系统中,采用单点系泊实施储油轮的定位,如图 1-4 所示。

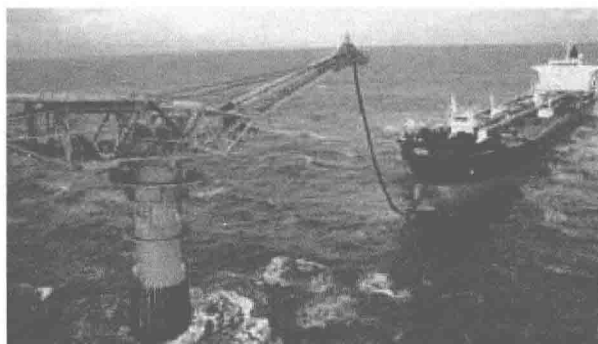


图 1-4 铰接塔-油轮系统(单点系泊)

图 1-4 中,铰接塔通过万向接头与海底连接,油轮通过缆绳连接铰接塔的刚臂。铰接塔和油轮在风浪作用下耦合运动。当油轮纵荡时,塔柱沿油轮纵荡方向做摇摆运动<sup>[9]</sup>。

塔柱结构包括水面附近的浮力舱和调整重心的压载舱。①当塔柱向船体运动时,系泊索松弛,恢复力只有水面附近浮力舱提供的浮力矩;②当塔柱离开油轮运动时,缆绳拉紧,恢复力包括浮力影响和缆绳张紧力。在塔柱运动的一个周期内,恢复力的表达式是分为几个线性区段的。考虑到油轮的质量远大于塔柱和大缆的质量,可以假定油轮不动,研究塔柱的摇摆规律和大缆张力。动力自由度为铰接塔的摆角 $\theta$ ,用弹簧表示系统产生的恢复刚度,得到的分析模型如图 1-5 和图 1-6<sup>[10,11]</sup>所示。

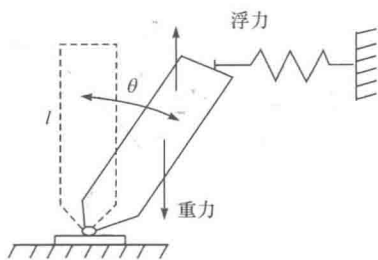


图 1-5 铰接塔-油轮简化模型图

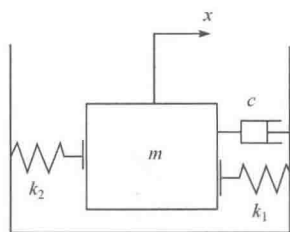


图 1-6 铰接塔-油轮等效动力学模型

考虑系泊塔柱朝两个不同的方向运动时,恢复刚度不同,铰接塔体系在运动过程中,对应两个不同的恢复刚度表达式,即恢复刚度为分段线性非光滑的。考虑系统的结构阻尼和流体平方阻尼,阻尼特性由线性阻尼加平方阻尼项表示。铰