



国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书
丛书主编 王梓坤

Bernstein Polynomial and Bézier Surface

**Bernstein 多项式
与 Bézier 曲面**

佩捷 吴雨宸 编著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书
丛书主编 王梓坤

Bernstein Polynomial and Bézier Surface

Bernstein 多项式 与 Bézier 曲面

佩捷 吴雨宸 编著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书详细介绍了 Bernstein 多项式和 Bézier 曲线及曲面, 全书共分 3 章及 5 个附录, 读者通过阅读此书可以更全面地了解其相关知识及内容.

本书适合从事高等数学学习和研究的大学师生及数学爱好者参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

Bernstein 多项式与 Bézier 曲面/佩捷, 吴雨宸编著. —哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2016. 1

(现代数学中的著名定理纵横谈丛书)

ISBN 978—7—5603—5574—0

I. ①B… II. ①佩… ②吴… III. ①伯恩斯坦多项式—研究 ②曲线—定理—研究 IV. ①O174. 14
②O123. 3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 197855 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 张永芹 杜莹雪

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451—86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 牡丹江邮电印务有限公司

开 本 787mm×960mm 1/16 印张 23.25 字数 250 千字

版 次 2016 年 1 月第 1 版 2016 年 1 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978—7—5603—5574—0

定 价 98.00 元

(如因印装质量问题影响阅读, 我社负责调换)

代

序

读书的乐趣

你最喜爱什么——书籍。

你经常去哪里——书店。

你最大的乐趣是什么——读书。

这是友人提出的问题和我的回答。真的，我这一辈子算是和书籍，特别是好书结下了不解之缘。有人说，读书要费那么大的劲，又发不了财，读它做什么？我却至今不悔，不仅不悔，反而情趣越来越浓。想当年，我也曾爱打球，也曾爱下棋，对操琴也有兴趣，还登台伴奏过。但后来却都一一断交，“终身不复鼓琴”。那原因便是怕花费时间，玩物丧志，误了我的大事——求学。这当然过激了一些。剩下来唯有读书一事，自幼至今，无日少废，谓之书痴也可，谓之书橱也可，管它呢，人各有志，不可相强。我的一生大志，便是教书，而当教师，不多读书是不行的。

读好书是一种乐趣，一种情操；一种向全世界古往今来的伟人和名人求

教的方法，一种和他们展开讨论的方式；一封出席各种社会、体验各种生活、结识各种人物的邀请信；一张迈进科学宫殿和未知世界的入场券；一股改造自己、丰富自己的强大力量。书籍是全人类有史以来共同创造的财富，是永不枯竭的智慧的源泉。失意时读书，可以使人重整旗鼓；得意时读书，可以使人头脑清醒；疑难时读书，可以得到解答或启示；年轻人读书，可明奋进之道；老年人读书，能知健神之理。浩浩乎！洋洋乎！如临大海，或波涛汹涌，或清风微拂，取之不尽，用之不竭。吾于读书，无疑义矣，三日不读，则头脑麻木，心摇摇无主。

潜能需要激发

我和书籍结缘，开始于一次非常偶然的機會。大概是八九岁吧，家里穷得揭不开锅，我每天从早到晚都要去田园里帮工。一天，偶然从旧木柜阴湿的角落里，找到一本蜡光纸的小书，自然很破了。屋内光线暗淡，又是黄昏时分，只好拿到大门外去看。封面已经脱落，扉页上写的是《薛仁贵征东》。管它呢，且往下看。第一回的标题已忘记，只是那首开卷诗不知为什么至今仍记忆犹新：

日出遥遥一点红，飘飘四海影无踪。

三岁孩童千两价，保主跨海去征东。

第一句指山东，二、三两句分别点出薛仁贵（雪、人贵）。那时识字很少，半看半猜，居然引起了极大的兴趣，同时也教我认识了许多生字。这是我有生以来独立看的第一本书。尝到甜头以后，我便千方百计去找书，向小朋友借，到亲友家找，居然断断续续看了《薛丁山征西》《彭公案》《二度梅》等，樊梨花便成了我心

中的女英雄。我真入迷了。从此，放牛也罢，车水也罢，我总要带一本书，还练出了边走田间小路边读书的本领，读得津津有味，不知人间别有他事。

当我们安静下来回想往事时，往往会发现一些偶然的小事却影响了自己的一生。如果不是找到那本《薛仁贵征东》，我的好学心也许激发不起来。我这一生，也许会走另一条路。人的潜能，好比一座汽油库，星星之火，可以使它雷声隆隆、光照天地；但若少了这粒火星，它便会成为一潭死水，永归沉寂。

抄，总抄得起

好不容易上了中学，做完功课还有点时间，便常光顾图书馆。好书借了实在舍不得还，但买不到也买不起，便下决心动手抄书。抄，总抄得起。我抄过林语堂写的《高级英文法》，抄过英文的《英文典大全》，还抄过《孙子兵法》，这本书实在爱得狠了，竟一口气抄了两份。人们虽知抄书之苦，未知抄书之益，抄完毫末俱见，一览无余，胜读十遍。

始于精于一，返于精于博

关于康有为的教学法，他的弟子梁启超说：“康先生之教，专标专精、涉猎二条，无专精则不能成，无涉猎则不能通也。”可见康有为强烈要求学生把专精和广博（即“涉猎”）相结合。

在先后次序上，我认为要从精于一开始。首先应集中精力学好专业，并在专业的科研中做出成绩，然后逐步扩大领域，力求多方面的精。年轻时，我曾精读杜布（J. L. Doob）的《随机过程论》，哈尔莫斯（P. R. Halmos）的《测度论》等世界数学名著，使我终身受益。简言之，即“始于精于一，返于精于博”。正如中国革命一

样,必须先有一块根据地,站稳后再开创几块,最后连成一片。

丰富我文采,澡雪我精神

辛苦了一周,人相当疲劳了,每到星期六,我便到旧书店走走,这已成为生活中的一部分,多年如此。一次,偶然看到一套《纲鉴易知录》,编者之一便是选编《古文观止》的吴楚材。这部书提纲挈领地讲中国历史,上自盘古氏,直到明末,记事简明,文字古雅,又富于故事性,便把这部书从头到尾读了一遍。从此启发了我读史书的兴趣。

我爱读中国的古典小说,例如《三国演义》和《东周列国志》。我常对人说,这两部书简直是世界上政治阴谋诡计大全。即以近年来极时髦的人质问题(伊朗人质、劫机人质等),这些书中早就有了,秦始皇的父亲便是受害者,堪称“人质之父”。

《庄子》超尘绝俗,不屑于名利。其中“秋水”“解牛”诸篇,诚绝唱也。《论语》束身严谨,勇于面世,“己所不欲,勿施于人”,有长者之风。司马迁的《报任少卿书》,读之我心两伤,既伤少卿,又伤司马;我不知道少卿是否收到这封信,希望有人做点研究。我也爱读鲁迅的杂文,果戈理、梅里美的小说。我非常敬重文天祥、秋瑾的人品,常记他们的诗句:“人生自古谁无死,留取丹心照汗青”“谁言女子非英物,夜夜龙泉壁上鸣”。唐诗、宋词、《西厢记》《牡丹亭》,丰富我文采,澡雪我精神,其中精粹,实是人间神品。

读了邓拓的《燕山夜话》,既叹服其广博,也使我动了写《科学发现纵横谈》的心。不料这本小册子竟给我招来了上千封鼓励信。以后人们便写出了许许多多

的“纵横谈”。

从学生时代起,我就喜读方法论方面的论著。我想,做什么事情都要讲究方法,追求效率、效果和效益,方法好能事半功倍。我很留心一些著名科学家、文学家写的心得体会和经验。我曾惊讶为什么巴尔扎克在51年短短的一生中能写出上百本书,并从他的传记中去寻找答案。文史哲和科学的海洋无边无际,先哲们的明智之光沐浴着人们的心灵,我衷心感谢他们的恩惠。

读书的另一面

以上我谈了读书的好处,现在要回过头来说说事情的另一面。

读书要选择。世上有各种各样的书:有的不值一看,有的只值看20分钟,有的可看5年,有的可保存一辈子,有的将永远不朽。即使是不朽的超级名著,由于我们的精力与时间有限,也必须加以选择。决不要看坏书,对一般书,要学会速读。

读书要多思考。应该想想,作者说得对吗?完全吗?适合今天的情况吗?从书本中迅速获得效果的好办法是有的放矢地读书,带着问题去读,或偏重某一方面去读。这时我们的思维处于主动寻找的地位,就像猎人追找猎物一样主动,很快就能找到答案,或者发现书中的问题。

有的书浏览即止,有的要读出声来,有的要心头记住,有的要笔头记录。对重要的专业书或名著,要勤做笔记,“不动笔墨不读书”。动脑加动手,手脑并用,既可加深理解,又可避忘备查,特别是自己的灵感,更要及时抓住。清代章学诚在《文史通义》中说:“札记之功必不可少,如不札记,则无穷妙绪如雨珠落大海矣。”

许多大事业、大作品，都是长期积累和短期突击相结合的产物。涓涓不息，将成江河；无此涓涓，何来江河？

爱好读书是许多伟人的共同特性，不仅学者专家如此，一些大政治家、大军事家也如此。曹操、康熙、拿破仑、毛泽东都是手不释卷，嗜书如命的人。他们的巨大成就与毕生刻苦自学密切相关。

王梓坤

◎

目

录

第 1 章 Bernstein 多项式与 Bézier 曲线 //1

§ 1 引言 //1

§ 2 同时代的两位 Bernstein //3

§ 3 推广到 m 阶等差数列 //5

§ 4 另一个推广 //6

§ 5 逼近论中的 Bernstein 定理 //10

§ 6 数学家的语言——算子 //16

§ 7 构造数值积分公式的算子方法 //19

7.1 几个常用的符号算子及其关系式 //20

7.2 Euler 求和公式的导出 //24

7.3 利用符号算子表出的数值积分公式 //25

§ 8 将 B_n 也视为算子 //27

§ 9 来自宾夕法尼亚大学女研究生的定理 // 32

§ 10 计算几何学与调配函数 // 37

§ 11 Bézier 曲线与汽车设计 // 39

§ 12 推广到三角形域 // 45

§ 13 Bernstein 多项式的多元推广 // 55

第 2 章 Bernstein 多项式和保形逼近 // 58

§ 1 Bernstein 多项式的性质 // 59

§ 2 保形插值的样条函数方法 // 69

§ 3 容许点列的构造 // 75

3.1 单调数组的容许点列构造 // 75

3.2 凸数组的容许点列构造 // 77

3.3 数值例子 // 80

§ 4 分片单调保形插值 // 81

§ 5 多元推广的 Bernstein 算子的逼近性

质 // 84

5.1 引言 // 84

5.2 基本引理 // 85

5.3 主要结果 // 86

第 3 章 数学工作者论 Bézier 方法 // 91

§ 1 常庚哲, 吴骏恒论 Bézier 方法的数学基

础 // 91

1.1 引言 // 91

1.2 Bézier 曲线 // 91

1.3	函数族 $\{f_{n,i}\}$ 的若干性质	// 93
1.4	Bézier 曲线的 Bernstein 形式	// 95
1.5	联系矩阵的逆矩阵	// 96
1.6	作图方法的证明	// 98
§ 2	苏步青论 Bézier 曲线的仿射不变量	// 104
2.1	n 次平面 Bézier 曲线的仿射不变量	// 104
2.2	三次平面 Bézier 曲线的保凸性	// 106
2.3	四次平面 Bézier 曲线的拐点	// 111
2.4	几个具体的例子	// 115
§ 3	华宣积论四次 Bézier 曲线的拐点和奇点	// 118
3.1	四次 Bézier 曲线的拐点	// 119
3.2	B_4 的尖点	// 125
3.3	B_4 有二重点的充要条件	// 129
3.4	无二重点的一个充分条件	// 134
§ 4	带两个形状参数的五次 Bézier 曲线的扩展	// 136
4.1	引言	// 136
4.2	基函数的定义及性质	// 137
4.3	曲线的构造及性质	// 139
4.4	结论	// 142

附录 I Bézier 曲线的模型 //143

§ 1 引言 //143

1.1 简介 //143

1.2 多种面目 //144

§ 2 第一种定义法:点定义法 //144

2.1 Bernstein 多项式 //144

2.2 Bézier 曲线的第一种定义 //155

2.3 Bézier 曲线的变换 //168

2.4 在其他多项式基底上的展开 //172

§ 3 Bézier 曲线的局部性质 //177

3.1 逐次导向量,切线 //177

3.2 Bézier 曲线的局部问题 //179

§ 4 第二种定义法:向量与制约 //185

4.1 n 维空间曲线的定义 //185

4.2 多项式 f_3^i 的确定 //186

4.3 一般情形 //188

4.4 Bézier 曲线的第二种定义 //190

§ 5 Bézier 曲线的几何绘制 //196

5.1 参数曲线 //196

5.2 四个例子 //197

§ 6 第三种定义法:“重心”序列法 //202

6.1 概要 //202

6.2 De Casteljau 算法 //203

6.3	用第一种定义法引进向量序列	//208
6.4	导向量的 De Casteljau 算法	//213
6.5	用于几何绘制	//216
§ 7	矢端曲线	//220
7.1	定义	//220
7.2	推广	//221
§ 8	Bézier 曲线的几何	//224
8.1	抛物线情形	//224
8.2	三次曲线问题	//228
8.3	四次曲线问题	//234
8.4	Bézier 曲线的子弧	//238
8.5	阶次的增减	//240
§ 9	形体设计	//247
9.1	几种可能的方法	//247
9.2	复合曲线	//248
附录 II	魏尔斯特拉斯定理	//252
§ 1	魏尔斯特拉斯第一及第二定理的表述	//252
§ 2	第一定理的 A·勒贝格的证明	//257
§ 3	第一定理的 E·兰道的证明	//262
§ 4	第一定理的 C·H·伯恩斯坦的证明	//267
§ 5	C·H·伯恩斯坦多项式的若干性质	//274
§ 6	第二定理的证明以及第一定理与第二定理的	

联系	//282
§ 7 关于插补基点的法柏定理	//289
§ 8 费叶的收敛插补过程	//299
附录Ⅲ 关于 Bernstein 型和 Bernstein-Grünwald 型插值过程	//303
§ 1 引言	//303
§ 2 关于一个 B-过程	//305
§ 3 关于一个 BG-过程	//318
§ 4 一般定理	//323
附录Ⅳ Bernstein 多项式逼近的一个注记 (A Note on Approximation by Bernstein Polynomials)	//326
§ 1 Introduction	//326
§ 2 Results	//328
§ 3 Proofs	//330
附录Ⅴ 数值分析中的伯恩斯坦多项式	//336
§ 1 伯恩斯坦多项式的一些性质	//336
§ 2 关于被逼近的函数的导数与伯恩斯坦逼近多项式间的联系	//340
§ 3 最小偏差递减的快慢	//344
参考文献	//347
编辑手记	//355

第1章 Bernstein 多项式^①与 Bézier 曲线^②

§1 引 言

借用一句歌词:岁月辽阔,咫尺终究是在天涯,剪不断,这无休的牵挂. 对于像 Bernstein 多项式与 Bézier 曲线这样专业的数学名词在中国是少为人知的,一直到 20 世纪 80 年代之前,它们还只限于专业数学工作者的小圈子内. 中国数学的黄金时代如果说有的话,那么 20 世纪 80 年代绝对算上一个,数学家们以忘我的钻研热情和高昂的拼搏斗志在各自的领域给出了一批国际水准的成果,同时作为科学共同体的一员,他们还没有忘了向全社会普及数学,特别是向青少年普及近代数学的责任和义务. 许多著名数学家亲自操刀,写出了一批高质量的数学科普文章和著作. 我们发现就其效果似乎是以高深的数学思想为背景命制一些数学竞赛试题更有效.

1986 年全国高中数学联赛二试题 1 为:

试题 1 已知实数列 $a_0, a_1, a_2, \dots$, 满足

$$a_{i-1} + a_{i+1} = 2a_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

① 译为“伯恩斯坦多项式”.——编者注

② 译为“贝齐尔曲线”.——编者注

求证: 对于任何自然数 n

$$P(x) = a_0 C_n^0 (1-x)^n + a_1 C_n^1 x (1-x)^{n-1} + \\ a_2 C_n^2 x^2 (1-x)^{n-2} + \cdots + \\ a_{n-1} C_n^{n-1} x^{n-1} (1-x) + a_n C_n^n x^n$$

是 x 的一次多项式或常数.

(注: 原题条件限制 $\{a_i\}$ 不为常数列. 证明中只要证 $P(x)$ 为一次函数, 是此题的一个特例)

证明 在 $a_0 = a_1 = \cdots = a_n$ 时, 有

$$P(x) = a_0 [C_n^0 (1-x)^n + \\ C_n^1 (1-x)^{n-1} x + \cdots + C_n^n x^n] = \\ a_0 [(1-x) + x]^n = a_0$$

为常数. 对于一般情况, 由已知 $a_k = a_0 + kd$, d 为常数, $k = 0, 1, 2, \cdots, n$. 因为

$$C_n^0 (1-x)^n + 1 \cdot C_n^1 (1-x)^{n-1} x + \cdots + \\ k C_n^k (1-x)^{n-k} x^k + \cdots + n C_n^n x^n = \\ n C_{n-1}^0 (1-x)^{n-1} x + \cdots + \\ n C_{n-1}^{k-1} (1-x)^{n-k} x^k + \cdots + n C_{n-1}^{n-1} x^n = \\ nx [C_{n-1}^0 (1-x)^{n-1} + \\ C_{n-1}^1 (1-x)^{n-2} x + \cdots + C_{n-1}^{n-1} x^{n-1}] = \\ nx [(1-x) + x]^{n-1} = nx$$

所以

$$P(x) = a_0 [C_n^0 (1-x)^n + C_n^1 (1-x)^{n-1} x + \cdots + C_n^n x^n] + \\ d[0 \cdot C_n^0 (1-x)^n + \cdots + k C_n^k (1-x)^{n-k} x^k + \cdots + \\ n C_n^n x^n] = a_0 + ndx$$

为一次多项式.

这是一道背景深刻的好题, 它以函数构造论中的 Bernstein 多项式及计算几何中的 Bézier 曲线为背景.