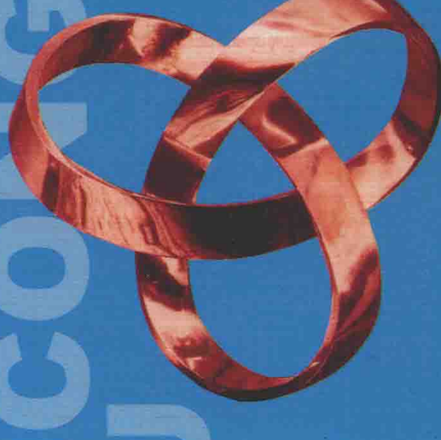
数学奥林匹克小丛书

高中卷 4

Shuxue Aolinpike XIAOCONG SHU



平均值不等式与柯西不等式

李胜宏 著

华东师范大学出版社

olinpike

数学奥林匹克小丛书

高中卷 4

平均值不等式与柯西不等式

linpike Xiao Congshu

李胜宏 著

华东师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学奥林匹克小丛书．高中卷．平均值不等式与柯西不等式/李胜宏著．—上海：华东师范大学出版社，2005.3

ISBN 7-5617-4169-3

I.数...　II.李...　III.数学课-高中-教学参考资料　IV.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第019474号

数学奥林匹克小丛书·高中卷

平均值不等式与柯西不等式

著　　者　李胜宏
策划组稿　倪　明
责任编辑　审校部编辑工作组
特约编辑　周　滔
封面设计　高　山
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
　　　　　市场部 电话 021-62865537
　　　　　门市(邮购) 电话 021-62869887
　　　　　门市地址 华东师大校内先锋路口
业务电话　上海地区 021-62232873
　　　　　华东 中南地区 021-62458734
　　　　　华北 东北地区 021-62571961
　　　　　西南 西北地区 021-62232893
业务传真　021-62860410 62602316
http://www.ecnupress.com.cn
社　　址　上海市中山北路3663号
　　　　　邮编 200062

印 刷 者　江苏如东印刷厂
开　　本　787x960 16开
印　　张　9
字　　数　158千字
版　　次　2005年4月第一版
印　　次　2005年4月第一次
印　　数　11 000
书　　号　ISBN 7-5617-4169-3/G·2394
定　　价　11.00元

出 版 人　朱杰人

总序

数学竞赛像其他竞赛活动一样，是青少年学生的一种智力竞赛．在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中，数学竞赛的历史最悠久、国际性强，影响也最大．我国于1956年开始举行数学竞赛，当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动，并组织出版了一系列青少年数学读物，激励了一大批青年学生立志从事科学事业．我国于1986年起参加国际数学奥林匹克，多次获得团体总分第一，并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克，这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位，为各国科学家与教育家所瞩目．

我国数学竞赛活动表明，凡是开展好的地区和单位，都能大大激发学生的学习数学的兴趣，有利于培养创造性思维，提高学生的学习效率．这项竞赛活动，将健康的竞争机制引进数学教学过程中，有利于选拔人才．由数学竞赛选拔的优胜者，既有踏实广泛的数学基础，又有刻苦钻研、科学的学习方法，其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者．在美国，数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺 (J.W.Milnor)、芒福德 (D.B.Mumford)、奎伦 (D.Quillen) 等都是菲尔兹数学奖的获得者；在波兰，著名数论专家辛哲尔 (A.Schinzel) 学生时代是一位数学竞赛优胜者；在匈牙利，著名数学家费叶尔 (L.Fejér)、里斯 (M.Riesz)、舍贵 (G.Szegö)、哈尔 (A.Haar)、拉多 (T.Radó) 等都曾是数学竞赛获奖者．匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家，产生了同它的人口不成比例的许多大数学家！

在开展数学竞赛的活动同时，各学校能加强联系，彼此交流数学教学经验，从这种意义上来说，数学竞赛可能成为数学课程改革的“催化剂”，成为培养优秀人才的有力措施．

不过，应当注意在数学竞赛活动中，注意普及与提高相结合，而且要以普及为主，使竞赛具有广泛的群众基础，否则难以持久．

当然，现在有些人过于关注数学竞赛的成绩，组织和参与都具有很强的功利目的，过分扩大数学竞赛的作用，这些都是不正确的，违背了开展数学竞赛活动的本意．这些缺点有其深层次的社会原因，需要逐步加以克服，不必因为有某些缺点，就否定这项活动．

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版．这套书，规模大、专题细．据我所知，这样的丛书还不多见．这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述，而且对竞赛题作了精到的分析解答，不少出自作者自己的研究所得，是一套很好的数学竞赛专题教程，也是中小学生和教师的参考书．

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员，不少是国家集训队的教练和国家队的领队．他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在IMO上取得成绩、为国争光作出了贡献，为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动．华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向IMO》等竞赛图书基础上，策划组织了这套丛书，花了不少心血．我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作，并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好．

王元

王元，著名数学家，中国科学院院士，曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席．

导言

在数学的每个领域中,都涉及到有关不等式问题的讨论和研究.许多重要结果的取得,都离不开不等式的应用和分析.不等式是初等数学和高等数学中的重要内容之一.不等式内容丰富、应用广泛,不等式的证明和估计,在数学中占有重要的地位.由于不等式问题形式千变万化,多姿多彩,因此,可以说不等式问题是数学中最漂亮、最吸引人的问题之一.本书将介绍两个著名不等式——平均值不等式和柯西(Cauchy)不等式.这两个基本的不等式,在不等式的证明中有着特殊的地位,并起着重要的作用.这两个不等式本身的证明,以及它们的应用,均涉及到解决一般不等式问题的基本方法和技巧,因此,熟悉掌握和灵活运用这两个不等式,对提高我们解决和证明不等式问题的能力,提高和培养我们的运算能力、逻辑推理能力,以及运用有关知识和方法,分析问题和解决问题的能力,都将有极大的作用.

目　录

1 平均值不等式及其证明

平均值不等式是最基本的重要不等式之一，在不等式理论研究和证明中占有重要的位置. 平均值不等式的证明有许多种方法，这里，我们选了部分具有代表意义的证明方法，其中用来证明平均值不等式的许多结论，其本身又具有重要的意义，特别是，在许多竞赛的书籍中，都有专门的章节介绍和讨论，如数学归纳法、变量替换、恒等变形和分析综合方法等，这些也是证明不等式的常用方法和技巧. 希望大家能认真思考和好好掌握，熟悉不等式的证明.

1.1 平均值不等式

对任意非负实数 a、b，有

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0,$$

于是，得

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

一般地，假设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 n 个非负实数，它们的算术平均值记为

$$A_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

几何平均值记为

$$G_n = (a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

算术平均值与几何平均值之间有如下的关系.

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},$$

即 $$A_n \geqslant G_n,$$
当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时,等号成立.

上述不等式称为平均值不等式,或简称为均值不等式.

平均值不等式的表达形式简单,容易记住,但它的证明和应用非常灵活、广泛,有多种不同的方法. 为使大家理解和掌握,这里我们选择了其中的几种典型的证明方法. 当然,有些方法是几个知识点的结合,很难将它们归类,有些大体相同或相似,但选择的变量不同,或处理的方式不同,导致证明的难易不同,所以,我们将它们看作是不同的方法.

1.2 平均值不等式的证明

证法一(归纳法)

(1) 当 $n = 2$ 时,已知结论成立.

(2) 假设对 $n = k$(正整数 $k \geqslant 2$) 时命题成立,即对于 $a_i > 0$, $i = 1, 2, \cdots, k$,有

$$(a_1 a_2 \cdots a_k)^{\frac{1}{k}} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k}.$$

那么,当 $n = k+1$ 时,由于

$$A_{k+1} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1}}{k+1},\ G_{k+1} = \sqrt[k+1]{a_1 a_2 \cdots a_k a_{k+1}},$$

关于 $a_1, a_2, \cdots, a_{k+1}$ 是对称的,任意对调 a_i 与 $a_j (i \neq j)$,即将 a_i 写成 a_j, a_j 写成 a_i, A_{k+1} 和 G_{k+1} 的值不改变,因此不妨设 $a_1 = \min\{a_1, a_2, \cdots, a_{k+1}\}$, $a_{k+1} = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_{k+1}\}$, 显然 $a_1 \leqslant A_{k+1} \leqslant a_{k+1}$,以及

$$A_{k+1}(a_1 + a_{k+1} - A_{k+1}) - a_1 a_{k+1} = (a_1 - A_{k+1})(A_{k+1} - a_{k+1}) \geqslant 0,$$

即 $$A_{k+1}(a_1 + a_{k+1} - A_{k+1}) \geqslant a_1 a_{k+1}.$$

对 k 个正数 $a_2, a_3, \cdots, a_k, a_1 + a_{k+1} - A_{k+1}$, 由归纳假设,得

$$\frac{a_2 + a_3 + \cdots + a_k + (a_1 + a_{k+1} - A_{k+1})}{k} \geqslant \sqrt[k]{a_2 a_3 \cdots a_k (a_1 + a_{k+1} - A_{k+1})}.$$

而

$$\frac{a_2 + a_3 + \cdots + a_k + (a_1 + a_{k+1} - A_{k+1})}{k} = \frac{(k+1)A_{k+1} - A_{k+1}}{k} = A_{k+1},$$

于是 $$A_{k+1}^{k} \geqslant a_2 a_3 \cdots a_k (a_1 + a_{k+1} - A_{k+1}).$$

两边乘以 A_{k+1}，得

$$A_{k+1}^{k+1} \geqslant a_2 a_3 \cdots a_k A_{k+1} (a_1 + a_{k+1} - A_{k+1}) \geqslant a_2 a_3 \cdots a_k (a_1 a_{k+1}) = G_{k+1}^{k+1}.$$

从而，有 $A_{k+1} \geqslant G_{k+1}$.

直接验证可知，当且仅当所有的 a_i 相等时等式成立，故命题成立.

说明 这里，利用了证明与正整数有关的命题的常用方法，即数学归纳法. 数学归纳法证题技巧的应用，可以说是五彩缤纷，千姿百态. 应用数学归纳法，除了需要验证当 $n=1$ 或 $n=n_0$（这里 n_0 为某个固定的正整数）外，其关键是要在 $n=k$ 时成立的假设之下，导出当 $n=k+1$ 时命题也成立，要完成这一步，需要一定的技巧和处理问题的能力，只有通过多做练习来实现理解和掌握.

证法二（归纳法，与证法一的不同处理）

(1) 当 $n=2$ 时，已知结论成立.

(2) 假设对 $n=k$（正整数 $k \geqslant 2$）时命题成立，即对于 $a_i > 0$，$i=1, 2, \cdots, k$，有

$$(a_1 a_2 \cdots a_k)^{\frac{1}{k}} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k}.$$

那么，当 $n=k+1$ 时，

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} \tag{1}$$

$$= a_1 + a_2 + \cdots + a_k + (a_{k+1} + G_{k+1} + \cdots + G_{k+1}) - (k-1)G_{k+1} \tag{2}$$

$$\geqslant k\sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k} + k\sqrt[k]{a_{k+1} G_{k+1}^{k-1}} - (k-1)G_{k+1} \tag{3}$$

$$\geqslant 2k\sqrt{\sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k}\sqrt[k]{a_{k+1} G_{k+1}^{k-1}}} - (k-1)G_{k+1} \tag{4}$$

$$= 2k\sqrt[2k]{a_1 a_2 \cdots a_{k+1} G_{k+1}^{k-1}} - (k-1)G_{k+1} \tag{5}$$

$$= 2k\sqrt[2k]{G_{k+1}^{k+1} G_{k+1}^{k-1}} - (k-1)G_{k+1} \tag{6}$$

$$= (k+1)G_{k+1}, \tag{7}$$

于是 $A_{k+1} \geqslant G_{k+1}$.

不难看出，当且仅当所有的 a_i 相等时等式成立，故命题成立.

说明 在这个证明中，为了利用归纳假设，将(1)写成(2)的形式. 由归

纳假设，从(2)得到(3)，由于当 $n=2$ 时，不等式成立，则由(3)得到了(4).

证法三(归纳法，另一种处理方式)

(1) 当 $n=2$ 时，已知结论成立.

(2) 假设对 $n=k$(正整数 $k\geqslant 2$) 时命题成立，即对于 $a_i>0$, $i=1$, 2, $\cdots$, k，有

$$(a_1a_2\cdots a_k)^{\frac{1}{k}}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}.$$

那么，当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}A_{k+1}&=\frac{1}{2k}[(k+1)A_{k+1}+(k-1)A_{k+1}]\\&=\frac{1}{2k}(a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}+\underbrace{A_{k+1}+A_{k+1}+\cdots+A_{k+1}}_{\text{共}k-1\text{个}})\\&\geqslant\frac{1}{2k}(k\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}+k\sqrt[k]{a_{k+1}A_{k+1}^{k-1}})\geqslant\sqrt[2k]{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}A_{k+1}^{k-1}}.\end{aligned}$$

所以 $A_{k+1}^{2k}\geqslant a_1a_2\cdots a_{k+1}A_{k+1}^{k-1}$，故得 $A_{k+1}\geqslant G_{k+1}$.

说明 在上面的证明中，将 A_{k+1} 分解为 $A_{k+1}=\frac{1}{2k}[(k+1)A_{k+1}+(k-1)A_{k+1}]$ 是一步较为关键和重要的变形技巧.

证法四(归纳法和变换)

在证明原命题之前，首先令

$$y_1=\frac{a_1}{G_n},\ y_2=\frac{a_2}{G_n},\ \cdots,\ y_n=\frac{a_n}{G_n},$$

其中 $G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$，则 $y_1y_2\cdots y_n=1\ (y_i>0)$，且平均值不等式等价于

$$y_1+y_2+\cdots+y_n\geqslant n.$$

即在条件 $y_1y_2\cdots y_n=1\ (y_i>0)$ 之下，证明 $y_1+y_2+\cdots+y_n\geqslant n$.

我们用归纳法证明上述不等式.

(1) 当 $n=1$ 时，$y_1=1\geqslant 1$，显然成立.

(2) 假设当 $n=k$ 时不等式成立，则对于 $n=k+1$，由于 $y_1y_2\cdots y_n=1\ (y_i>0)$，那么 y_i 中必有大于或等于 1 者，也有小于或等于 1 者，不妨设 $y_k\geqslant 1$, $y_{k+1}\leqslant 1$，并令 $y=y_ky_{k+1}$，则 $y_1y_2\cdots y_{k-1}y=1$，从而由归纳假设，得

$$y_1+y_2+\cdots+y_{k-1}+y\geqslant k.$$

于是
$$\begin{aligned}&y_1+y_2+\cdots+y_{k-1}+y_k+y_{k+1}\\ \geqslant&k+y_k+y_{k+1}-y_ky_{k+1}\\ =&k+1+(y_k-1)(1-y_{k+1})\\ \geqslant&k+1.\end{aligned}$$

不难看出，当且仅当 $y_1=y_2=\cdots=y_n=1$，从而 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时，等式成立.

故当 $n=k+1$ 时，命题也成立.

说明 通过变量替换，将原问题化为一个与正整数有关的形式简单的不等式，在证明中运用了我们比较熟悉的手段和技巧.

证法五(归纳法和二项展开式)

(1) 当 $n=2$ 时，已知结论成立.

(2) 假设对 $n=k$(正整数 $k\geqslant 2$) 时命题成立，即对于 $a_i>0$, $i=1$, 2, $\cdots$, k，有

$$(a_1a_2\cdots a_k)^{\frac{1}{k}}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}.$$

那么，当 $n=k+1$ 时，不妨假设 $a_{k+1}=\max\{a_1, a_2, \cdots, a_{k+1}\}$，于是由归纳假设，得

$$a_{k+1}\geqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}=A_k\geqslant G_k=\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}.$$

从而，得

$$A_{k+1}^{k+1}=\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1}=\left(\frac{kA_k+a_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1}=\left(A_k+\frac{a_{k+1}-A_k}{k+1}\right)^{k+1}\quad(8)$$

$$=A_k^{k+1}+(k+1)A_k^k\left(\frac{a_{k+1}-A_k}{k+1}\right)+\cdots+\left(\frac{a_{k+1}-A_k}{k+1}\right)^{k+1}\quad(9)$$

$$\geqslant A_k^{k+1}+(k+1)A_k^k\left(\frac{a_{k+1}-A_k}{k+1}\right)=A_k^{k+1}+A_k^k(a_{k+1}-A_k)\quad(10)$$

$$=A_k^ka_{k+1}\geqslant G_k^ka_{k+1}=a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}\quad(11)$$

$$=G_{k+1}^{k+1}.\quad(12)$$

所以　$A_{k+1} \geqslant G_{k+1}$.

不难看出，当且仅当所有的 a_i 相等时等式成立，故命题成立.

说明　在证明过程中，考虑 A_{k+1}^{k+1}，并通过一定的处理和运算，导出所需要的结果. 有时候可能利用到其他的有用的结论.

证法六(归纳法和辅助命题)

为了证明平均值不等式，需要证明一个引理.

引理 1　假设 x、y 为正实数，n 为正整数，则

$$x^{n+1} + ny^{n+1} \geqslant (n+1)y^n x.$$

证明　由于 x、y 与 x^k、$y^k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 同序，所以

$$(x-y)(x^k - y^k) \geqslant 0.$$

于是

$$x^{n+1} + ny^{n+1} - (n+1)xy^n$$

$$= x(x^n - y^n) - ny^n(x-y) \tag{13}$$

$$= (x-y)(x(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1}) - ny^n) \tag{14}$$

$$= (x-y)((x^n - y^n) + (x^{n-1} - y^{n-1})y + \cdots + (x-y)y^{n-1}) \tag{15}$$

$$\geqslant 0, \tag{16}$$

故引理 1 成立. 现在，我们利用引理 1 和数学归纳法证明平均值不等式.

(1) 当 $n = 2$ 时，已知结论成立.

(2) 假设对 $n=k$(正整数 $k \geqslant 2$)时命题成立，即对于 $a_i > 0$, $i=1, 2, \cdots, k$，有

$$(a_1 a_2 \cdots a_k)^{\frac{1}{k}} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k}.$$

那么，当 $n = k+1$ 时，为了利用引理 1，令 $a_1 a_2 \cdots a_k = y^{k(k+1)}$, $a_{k+1} = x^{k+1}$, $x, y \geqslant 0$，则由归纳假设和引理 1，得

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1} - (k+1)G_{k+1} \tag{17}$$

$$= \frac{k(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)}{k} + x^{k+1} - (k+1)y^k x \tag{18}$$

$$\geqslant k\sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k} + x^{k+1} - (k+1)y^k x \tag{19}$$

$$=ky^{k+1}+x^{k+1}-(k+1)y^kx\geqslant 0. \tag{20}$$

不难看出，当且仅当所有的 a_i 相等时等式成立，故命题成立.

说明 值得注意的是，像引理 1 这样的结论及其证明，为我们证明和解决一般的不等式问题提供了方法和技巧. 前面，我们利用数学归纳法与不同的处理方式，证明了平均值不等式，当然，还可以用其他的方法来证明.

证法七(构造数列)

令 $f(n)=n\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\right)$，如果能证明 $f(n)$ 关于 n 是单调增加的，即

$$f(n)\leqslant f(n+1),\ n\geqslant 2.$$

那么，由 $f(2)\geqslant 0$，得到 $f(n)\geqslant f(2)\geqslant 0$，则平均值不等式成立.

现在，证明 $f(n)$ 的单调性.

同证法六，设 $a_1a_2\cdots a_n=y^{n(n+1)}$，$a_{n+1}=x^{n+1}$，$x,\ y\geqslant 0$，则由引理 1，得

$$\begin{aligned}
&f(n+1)-f(n)\\
&=(n+1)\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}}{n+1}-\sqrt[n+1]{a_1a_2\cdots a_{n+1}}\right) && (21)\\
&\quad -n\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\right) && (22)\\
&=a_{n+1}-(n+1)\sqrt[n+1]{a_1a_2\cdots a_{n+1}}+n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} && (23)\\
&=x^{n+1}-(n+1)y^nx+ny^{n+1} && (24)\\
&\geqslant 0. && (25)
\end{aligned}$$

这表明 $f(n+1)\geqslant f(n)$.

另外，由于 $f(2)\geqslant 0$，则对任意 $n\geqslant 2$，得

$$f(n)\geqslant f(n-1)\geqslant\cdots\geqslant f(2)\geqslant 0.$$

不难看出，当且仅当所有的 a_i 相等时等式成立，故平均值不等式成立.

证法八(利用排序不等式)

为了利用与上面不同的方法证明平均值不等式，我们首先介绍和证明

另一个重要的结论，即排序不等式.

引理 2（排序不等式） 设两个实数组 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \cdots, b_n$，满足

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n;\ b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n,$$

则
$$\begin{aligned}&a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \text{（同序乘积之和）}\\ \geqslant\ &a_1b_{j_1} + a_2b_{j_2} + \cdots + a_nb_{j_n} \text{（乱序乘积之和）}\\ \geqslant\ &a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1 \text{（反序乘积之和）}\end{aligned}$$

其中 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列，并且等号同时成立的充分必要条件是 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 或 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$ 成立.

证明 令 $A = a_1b_{j_1} + a_2b_{j_2} + \cdots + a_nb_{j_n}$. 如果 $j_n \neq n$，且假设此时 b_n 所在的项是 $a_{j_m}b_n$，则由 $(b_n - b_{j_n})(a_n - a_{j_m}) \geqslant 0$，得

$$a_nb_n + a_{j_m}b_{j_n} \geqslant a_{j_m}b_n + a_nb_{j_n},$$

也就是说，$j_n \neq n$ 时，调换 A 中 b_n 与 b_{j_n} 的位置，其余都不动，则得到 a_nb_n 项，并使 A 变为 A_1，且 $A_1 \geqslant A$. 用同样的方法，可以再得到 $a_{n-1}b_{n-1}$ 项，并使 A_1 变为 A_2，且 $A_2 \geqslant A_1$.

继续这个过程，至多经过 $n-1$ 次调换，得 $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$，故

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geqslant A.$$

同样可以证明 $A \geqslant a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1$.

显然当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 或 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$ 时，两个等号同时成立. 反之，如果 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 及 $\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ 中的数都不全相同时，则必有 $a_1 \neq a_n$，$b_1 \neq b_n$. 于是 $a_1b_1 + a_nb_n > a_1b_n + a_nb_1$，且 $a_2b_2 + \cdots + a_{n-1}b_{n-1} \geqslant a_2b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_2$，从而有 $a_1b_n + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n > a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1$. 故这两个等式中至少有一个不成立.

现在，利用引理 2 证明平均值不等式.

令 $y_k = \dfrac{a_1a_2\cdots a_k}{G_n^k}$，$k = 1, 2, \cdots, n$. 由排序不等式，得

$$\begin{aligned}&y_1 \times \frac{1}{y_1} + y_2 \times \frac{1}{y_2} + \cdots + y_n \times \frac{1}{y_n}\\ \leqslant\ &y_1 \times \frac{1}{y_n} + y_2 \times \frac{1}{y_1} + \cdots + y_n \times \frac{1}{y_{n-1}}\end{aligned}$$

$$=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{G_n},$$

所以 $A_n \geqslant G_n$.

显然当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时, $A_n=G_n$. 如果 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 不全相等, 不妨设 $a_1 \neq a_2$, 令 $b=\frac{a_1+a_2}{2}$, 则 $a_1a_2<b^2$, 且 $b+b=a_1+a_2$,

$$G_n<\sqrt[n]{b\times b\cdot a_3\cdots a_n} \leqslant \frac{b+b+a_3+\cdots+a_n}{n}=A_n.$$

故当 $A_n=G_n$ 时必有 $a_1=a_2=\cdots=a_n$. 反之亦然.

注 (1) 我们可以类似于证法四, 由 $G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$, 令

$$y_1=\frac{a_1}{G_n},\ y_2=\frac{a_2}{G_n},\ \cdots,\ y_n=\frac{a_n}{G_n},$$

则 $y_1y_2\cdots y_n=1\ (y_i>0)$, 且平均值不等式等价于

$$y_1+y_2+\cdots+y_n \geqslant n.$$

下面利用排序不等式证明这个不等式.

任取 $x_1>0$, 再取 $x_2>0$, 使得 $y_1=\frac{x_1}{x_2}$, 再取 $x_3>0$, 使得 $y_2=\frac{x_2}{x_3}$, $\cdots$, 最后取 $x_n>0$, 使得 $y_{n-1}=\frac{x_{n-1}}{x_n}$. 所以

$$y_n=\frac{1}{y_1y_2\cdots y_{n-1}}=\frac{1}{\frac{x_1}{x_2}\frac{x_2}{x_3}\cdots\frac{x_{n-1}}{x_n}}=\frac{x_n}{x_1}.$$

由引理 2, 得

$$y_1+y_2+\cdots+y_n=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1} \geqslant n.$$

当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时等号成立, 从而当且仅当 $y_1=y_2=\cdots=y_n$ 时等号成立, 所以当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时等号成立.

(2) 事实上, 还可以用排序不等式证明引理 1, 其证明留给读者.

(3) 排序不等式也是一个重要的基本的不等式, 可以利用排序不等式直接证明许多其他有关的不等式. 例如:

契比雪夫不等式 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 满足 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots$

$\leqslant a_n$, $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$，则

$$n \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} b_k \leqslant n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k,$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 或 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$ 时等号成立.

证明 显然

$$\begin{aligned} & n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} b_k \\ = & \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_k b_k - a_k b_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (a_j b_j - a_j b_k) \\ = & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_k b_k + a_j b_j - a_k b_j - a_j b_k) \\ = & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_k - a_j)(b_k - b_j) \geqslant 0, \end{aligned}$$

故命题成立.

证法九（倒向归纳法）

倒向归纳法，也称“留空回填”法. 基本思想是先对自然数的一个子列 $\{n_m\}$ 证明命题成立，然后再回过来证明 $\{n\} \backslash \{n_m\}$ 相应的命题成立.

首先证明当 $n = 2^m$（m 为正整数）时，平均值不等式成立. 为此，对 m 用数学归纳法.

当 $m = 1$ 时，显然有 $\sqrt{a_1 a_2} \leqslant \dfrac{a_1 + a_2}{2}$.

假设 $m = k$ 时命题成立，则当 $m = k + 1$ 时，

$$\sqrt[2^{k+1}]{a_1 a_2 \cdots a_{2^k} a_{2^k+1} \cdots a_{2^{k+1}}} \tag{26}$$

$$= \sqrt{\sqrt[2^k]{a_1 a_2 \cdots a_{2^k}} \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} \cdots a_{2^{k+1}}}} \tag{27}$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \left(\sqrt[2^k]{a_1 a_2 \cdots a_{2^k}} + \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} \cdots a_{2^{k+1}}} \right) \tag{28}$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^k}}{2^k} + \frac{a_{2^k+1} + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^k} \right) \tag{29}$$

$$= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^k} + a_{2^k+1} + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}. \tag{30}$$