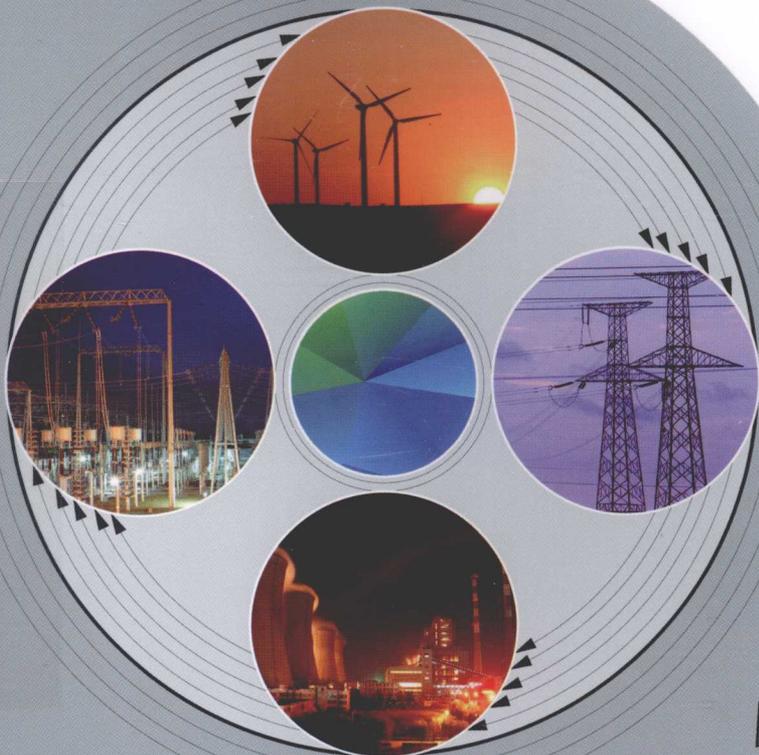


# 灰色系统理论

## 及其在电力系统中的应用

HUISE XITONG LILUN  
JIQIZAI DIANLI XITONGZHONG DE YINGYONG

王明东 赵国生 编著



中国电力出版社  
CHINA ELECTRIC POWER PRESS



# 灰色系统理论

## 及其在电力系统中的应用

HUISE XITONG LILUN  
JIQIZAI DIANLI XITONGZHONG DE YINGYONG

王明东 赵国生 编著

## 内 容 提 要

本书介绍灰色系统理论及其在电力系统中的应用情况。全书分绪论、灰色系统理论基础、灰色五步建模方法及其应用、灰色关联分析及其应用、灰色聚类及其应用、灰色预测及其应用、灰色控制及其应用、灰色决策及其应用以及灰色规划及其应用共 9 章。第 3~9 章除了介绍灰色系统理论与方法外,还给出了在电力系统的应用实例,介绍了应用灰色系统理论分析和解决电力系统相关问题的思路、方法和具体过程。

本书可供从事电力系统运行与分析工作的人员参考,也可供从事灰色理论和应用研究的高校教师和学生使用。

## 图书在版编目 (CIP) 数据

灰色系统理论及其在电力系统中的应用 / 王明东, 赵国生编著. —北京: 中国电力出版社, 2016.9

ISBN 978-7-5123-9407-0

I. ①灰… II. ①王… ②赵… III. ①灰色系统理论—应用—电力系统 IV. ①TM7

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 117808 号

中国电力出版社出版、发行

(北京市东城区北京站西街 19 号 100005 <http://www.cepp.sgcc.com.cn>)

北京九天众诚印刷有限公司印刷

各地新华书店经售

\*

2016 年 9 月第一版 2016 年 9 月北京第一次印刷

710 毫米×980 毫米 16 开本 10.25 印张 172 千字

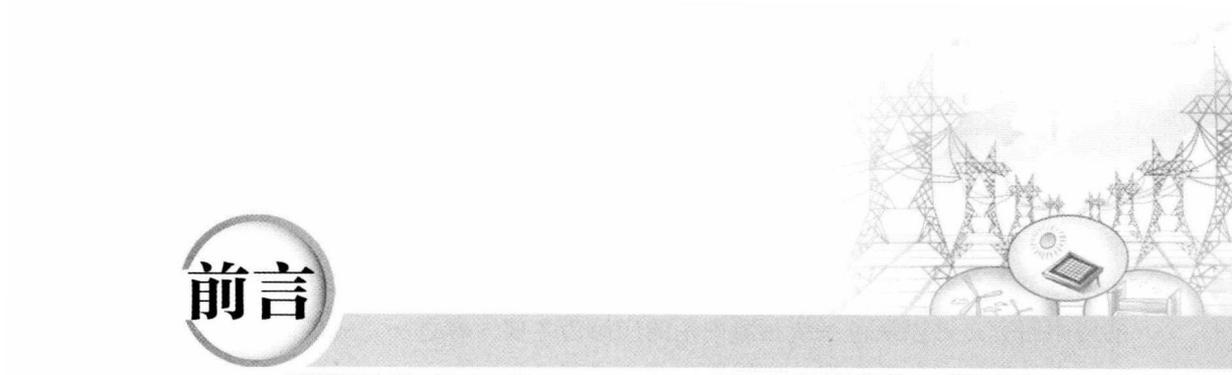
定价 42.00 元

## 敬告读者

本书封底贴有防伪标签,刮开涂层可查询真伪

本书如有印装质量问题,我社发行部负责退换

版权专有 翻印必究



# 前言

在系统论、控制论中，常借助颜色来表示研究者对系统内部信息和对系统本身的了解及认识程度。信息完全被了解的系统称为白色系统，信息完全缺乏的系统称为黑色系统。灰色系统是部分信息已知、部分信息未知的系统。

人的认识有一个从不知到知、从知之不多到知之较多的过程，不同的人对于同一事物也有不同的认识。因此，黑色、白色、灰色都是一种相对的概念。世界上不存在绝对的白色系统，因为任何系统都有未被确知的部分。同样，也不存在绝对的黑色系统，因为如果对系统一无所知，就谈不上该系统的存在了。在人们的社会、经济活动中，经常会遇到信息不完全的情况，科学研究对象的各个环节也普遍存在白色参数和灰色参数共存的情况。因此，灰色系统是普遍存在的。

灰色系统理论是以信息不完全的系统为研究对象，运用控制论观点和灰色系统数学方法，揭示客观事物本质特征和发展规律的一门科学，它为不确定系统的量化分析开辟了新的途径。

灰色系统理论是我国著名学者邓聚龙教授提出来的。经过 30 多年的发展，灰色系统理论已基本建立起一门新兴学科的结构体系，其主要内容包括以灰色代数系统、灰色方程、灰色矩阵等为基础的理论体系；以灰色关联空间为依托的分析体系；以灰色序列生成为基础的方法体系；以灰色模型为核心的模型体系；以系统分析、评估、建模、预测、决策、控制、优化为主体的技术体系。灰色系统理论与方法的理论性和较强的实用价值，使其受到了国内外学者和工程技术人员的高度重视，在工程技术、社会经济等诸多领域得到了广泛的应用。

电力系统是一个由许多元件组成的庞大而复杂的动力学系统。从元件的结构参数来看，有的信息数据较明确，有的则不够明确。即使对于那些明确的信息数据，也不能保证其完全准确。而对于电力系统的运行参数（如负荷大小、线路潮流等），由于量测误差的存在，完全精确的运行数据是不可能获得的，只能得到相对比较准确的系统参数。由此可见，电力系统参数的“灰”性是客观

存在的，是一个典型的灰色系统。

编著者之一王明东副教授多年来主要从事智能系统理论及其在电力系统中的应用研究，并以灰色系统预测理论的应用为主要内容之一完成了博士学位论文。在长期的灰色系统理论应用研究中，编著者领略到了灰色系统理论的博大精深，也常常为没有一本将灰色系统理论与电力系统结合的参考书而感到遗憾和无助。于是，结合编著者的科研工作和教学实践经验，并参考和综合国内外有关著作和科技论文编写了此书，希望能给后来者一些帮助。

全书分9章。第1章绪论，主要介绍灰箱、灰色系统等概念，并阐述了电力系统的灰色特征；第2章灰色系统理论基础，介绍了灰色系统理论的形成、发展和主要内容，以及灰数、灰方程、灰色生成、灰色模型等基本概念；第3章灰色五步建模方法及其应用，介绍五步建模的思想和方法，并应用该方法建立了一个电厂经济模型；第4章灰色关联分析及其应用，介绍灰色关联分析的相关概念、数据变换方法和关联分析方法，并介绍了灰色关联分析方法在配电网可靠性影响因素分析、电力营销目标市场分析、供电企业服务质量评价、架空线路运行状态评价、变压器故障诊断等方面的应用实例；第5章灰色聚类及其应用，介绍灰色白化权函数聚类、灰色关联聚类以及它们在发电企业管理水平评估、变压器状态评价、电气主接线方案选择、负荷特性分类等方面的应用实例；第6章灰色预测及其应用，介绍数列预测、灾变预测、拓扑预测、系统预测的概念以及含负数灰色预测原始数据的处理方法，以电力负荷预测、变压器内气体浓度预测、电力系统可靠性参数预测等几则实例说明灰色预测方法在电力系统中的应用情况；第7章灰色控制及其应用，介绍灰色去余控制、灰色预测控制、灰色关联控制、灰色相平面控制的概念和方法，以及水轮发电机组调速系统灰色去余控制、发电机励磁系统灰色预测PID控制等几则应用；第8章灰色决策及其应用，概述灰色局势决策、灰色聚类决策、灰色统计决策、灰色层次决策的概念和方法，并介绍了电力系统中性点接地方式影响配电网可靠性的灰靶分析应用实例和基于单目标化局势决策的变电站电气主接线方案选择的应用实例；第9章灰色规划及其应用，介绍灰色线性规划、灰色非线性规划、灰色多目标规划、灰色整数规划、灰色动态规划的基本概念和求解方法，并介绍灰色线性规划、灰色非线性规划、灰色动态规划在有功负荷分配方面的应用实例。本书的特点是给出了大量的灰色系统理论应用于电力系统的实例，介绍了应用灰色系统理论分析和解决电力系统问题的思路、方法和具体过程，可供

从事该方向工作的人员参考。

本书由王明东、赵国生共同编写。赵国生编写第3、4、9章，王明东编写第1、2、5、6、7、8章并负责全书统稿。由于编著者学识水平有限，书中难免存在失当之处，敬请读者批评指正。

**编著者**

2016年4月



# 目录

## 前言

|     |                   |    |
|-----|-------------------|----|
| 1   | 绪论                | 1  |
| 1.1 | 灰色系统概念            | 1  |
| 1.2 | 电力系统的灰色特征         | 3  |
| 2   | 灰色系统理论基础          | 4  |
| 2.1 | 灰色系统理论的形成、发展和主要内容 | 4  |
| 2.2 | 灰数及其运算            | 6  |
| 2.3 | 灰色方程和灰色矩阵         | 11 |
| 2.4 | 灰色生成              | 14 |
| 2.5 | 灰色模型              | 18 |
| 3   | 灰色五步建模方法及其应用      | 25 |
| 3.1 | 五步建模的思想与方法        | 25 |
| 3.2 | 应用五步建模法建立电厂经济模型   | 26 |
| 4   | 灰色关联分析及其应用        | 31 |
| 4.1 | 灰色关联分析            | 31 |
| 4.2 | 应用实例              | 36 |
| 5   | 灰色聚类及其应用          | 55 |
| 5.1 | 灰色聚类              | 55 |
| 5.2 | 应用实例              | 58 |
| 6   | 灰色预测及其应用          | 73 |
| 6.1 | 灰色预测              | 73 |
| 6.2 | 含负数灰色预测原始输入量的处理   | 79 |
| 6.3 | 应用实例              | 81 |

|     |          |     |
|-----|----------|-----|
| 7   | 灰色控制及其应用 | 91  |
| 7.1 | 灰色去余控制   | 91  |
| 7.2 | 灰色预测控制   | 94  |
| 7.3 | 灰色关联控制   | 95  |
| 7.4 | 灰色相平面控制  | 96  |
| 7.5 | 应用实例     | 96  |
| 8   | 灰色决策及其应用 | 112 |
| 8.1 | 灰色局势决策   | 112 |
| 8.2 | 灰色聚类决策   | 120 |
| 8.3 | 灰色统计决策   | 121 |
| 8.4 | 灰色层次决策   | 122 |
| 8.5 | 应用实例     | 123 |
| 9   | 灰色规划及其应用 | 129 |
| 9.1 | 灰色线性规划   | 129 |
| 9.2 | 灰色多目标规划  | 133 |
| 9.3 | 灰色整数规划   | 134 |
| 9.4 | 灰色非线性规划  | 135 |
| 9.5 | 灰色动态规划   | 139 |
| 9.6 | 应用实例     | 143 |
|     | 参考文献     | 153 |

# 绪 论

## 1.1 灰色系统概念

### 1.1.1 系统的概念

“系统”一词的英文“system”源自古希腊语，有“共同”“给以位置”的含义。尽管该词频繁出现在社会生活和学术领域中，但不同的人在不同的场合往往赋予它不同的含义。作为名词的“系统”泛指由一些相互联系、相互制约的若干组成部分（要素）结合而成的、具有特定功能的有机整体（集合）。可以从三个方面理解系统的概念。

(1) 系统是由若干要素（部分）组成的。系统与要素是相互依存的关系，并且可以相互转化。要素可能是一些个体、元件、零件，也可能其本身就是一个系统（或称之为子系统）。如发电机、变压器、输电线路、用电设备等组成了电力系统，而发电机本身也是系统，可看作电力系统的子系统。

(2) 系统有一定的结构。一个系统是其构成要素的集合，这些要素相互联系、相互制约。这样构成的集合是各组成要素在孤立状态时所没有的。例如，钟表是由齿轮、发条、指针等零部件按一定的方式装配而成的，但一堆齿轮、发条、指针随意放在一起却不能构成钟表；发电机由定子、转子等组成，而简单拼凑在一起的定子、转子却不能称其为发电机。

(3) 系统有一定的功能，或者说系统要有一定的目的性。系统的功能是指系统与外部环境相互联系和相互作用中表现出来的性质、能力和功能。例如电力系统的功能是进行电力的生产、输送与消费。

从系统的定义可以看出，系统具有整体性、相关性、目的性、层次性、适应性、动态性等特征，其中整体性是系统最基本的特征或者本质属性。

系统以不同的形式普遍存在于自然界和人类社会中。按照不同的分类方法，系统可以分为：自然系统与人为系统，实体系统与概念系统，线性系统和非线性

性系统，黑箱、白箱和灰箱等。

### 1.1.2 黑箱、白箱与灰箱

控制论中常借助颜色来表示研究者对系统内部信息和对系统本身的了解及认识程度。“黑”表示信息完全缺乏，“白”表示信息完全清楚、“灰”表示信息不充分、不完全清楚。按此进行分类，系统可分为黑箱、白箱和灰箱。

“黑箱”(Black Box)概念是由英国科学家艾什比(W·R·Ashby)提出的。艾什比用黑箱来描述那些内部结构、特性、参数全部未知而只能从对象外部和对象运动的因果关系及输入输出关系来研究的一类事物。例如人的大脑、地球、密封的仪器等。以此推断，白箱、灰箱分别指内部结构、特性、参数完全清楚和部分清楚的系统。

黑箱方法是在不打开黑箱的情况下，只是通过外部观测、试验，找出输入和输出的关系，并由此来研究黑箱的功能和特性，探索其构造和机理的一种科学方法。从理论上说，人们都会认为白箱更可靠，只有白箱才是真正可控的，但实际上黑箱法更实用。因为在面对复杂问题时，无法得到问题的全部信息。黑箱方法可以说古已有之，例如我国的中医看病，通常是通过“望、闻、问、切”等外部观测来诊断病情，并不进行开刀解剖。但是，作为一种现代的科学方法，是从20世纪50年代开始的。1956年，艾什比在《控制论导论》一书中对黑箱作了较系统的阐述。首先他明确了什么是黑箱问题：“黑箱问题是在电机工程中出现的。给电机师一个密封箱，上面有些输入接头、可以随意通上多少电压、电击或任何别的干扰；此外有些输出接头，可以借此作他所能做的观察。”

### 1.1.3 灰色系统

灰色系统是指那些信息不完全、不确定的系统，或者说是既含有已知参数，又含有未知参数的系统。从思维逻辑的发展来看，灰色系统概念是由“黑箱”“灰箱”概念演化而来的。邓聚龙教授认为，灰箱概念受制于“箱”的束缚，灰箱理论从系统外部特征去研究一个不确定的系统，“箱”内部分已知的信息是无法利用的，必然会舍弃一些可利用的白色信息，因此是不够妥当的。应该从事物内部，从系统内部结构及参数去研究系统，由此他提出了灰色系统的概念。灰色系统打破了“箱”的约束，主张着重于事物内部（结构、参数、总特征）的研究，尽量发挥现有白信息的作用，达到对事物内部本质和变化发展的规律性认识。

人的认识有一个从不知到知、从知之不多到知之较多的过程，不同的人对

于同一事物也有不同的认识。因此，黑色、白色、灰色都是一种相对的概念。世界上不存在绝对的白色系统，因为任何系统都有未被确知的部分。同样，也不存在绝对的黑色系统，因为如果对系统一无所知，就谈不上该系统的存在了。在人们的社会、经济活动中，经常会遇到信息不完全的情况，科学研究对象的各个环节也普遍存在白色参数和灰色参数共存的情况。因此，“灰色”是系统普遍存在的现象。

## 1.2 电力系统的灰色特征

电力系统是由不同类型的发电机组（汽轮发电机组、水轮发电机组、光伏电池等），为数众多、分布极广的变电站和用电设备，以及采用不同传输方式（交流和直流）、不同电压等级（特高压、超高压、高压、中压和低压）的输电线路所组成的庞大而复杂的动力学系统。对于组成电力系统的各个环节，有的具有明确的信息数据，如发电机容量、线路长度等，有的则不够明确，如电阻、电抗等。即使对于那些明确的信息数据，也不能保证其完全准确。对于电力系统的运行参数（如负荷大小、线路潮流等），可通过在系统中安装大量的测量装置实测得到。由于量测误差的存在，完全精确的运行数据是不可能获得的，只能得到相对比较准确的系统参数。

对系统的研究是从建立系统的数学模型开始的。电力系统所固有的非线性、工况与参数的时变性、外界随机干扰因素的不确定性，使得建立其精确的数学模型非常困难。正因如此，电力系统的数学模型只能是对系统实体的近似，模型参数不过是描述实体属性的近似量化指标。另外，模型参数的具体数值仍需从测量数据得到，量测误差的存在同样会使得到的模型参数不够准确。如果再考虑数据处理过程中的计算机精度，模型参数的准确度更加难如人意。

从以上对电力系统实际结构参数、模型参数以及运行参数的分析可知，电力系统参数的不确定性是客观存在的，这赋予了电力系统灰色特征。灰色系统理论将这种具有物理原型，但信息数据不够清楚的系统称为非本征灰色系统，而将社会、经济等没有物理原型的灰色系统称为本征灰色系统。工程技术领域的大多数系统都属于非本征灰色系统。

## 灰色系统理论基础

灰色系统理论是以信息不完全的灰色系统为研究对象，运用控制论观点和灰色系统数学方法，揭示客观事物本质特征和发展规律的一门科学，它为解决不确定系统的量化分析开辟了新的途径。

本章首先介绍灰色系统理论的形成和发展状况以及其主要内容，然后介绍灰色系统理论的基础知识，包括灰数、灰色方程、灰色矩阵等基本概念和灰色生成、灰色建模等数学方法，而灰色关联分析、灰色评估、灰色预测、灰色控制、灰色决策、灰色规划等内容将在以后各章结合电力系统应用情况分别阐述。

### 2.1 灰色系统理论的形成、发展和主要内容

#### 2.1.1 灰色系统理论的形成

随着科学技术的发展，人们对客观事物发展规律的认识不断深化，对系统不确定性的认识也逐步深入，各种不确定性系统理论和方法在 20 世纪后半叶不断涌现，灰色系统理论即为其中之一。

灰色系统理论是我国著名学者邓聚龙教授提出来的。邓聚龙教授早年从事控制理论和模糊系统的研究，他在 20 世纪 60 年代提出的“去余控制”为后来的灰色控制奠定了基础。后来，他在用概率统计、时间序列等方法预测粮食产量时，发现概率统计追求大样本量，而时间序列方法则只致力于数据的拟合，不着重规律的发现。邓聚龙教授希望在可利用数据不多的情况下，找到长时期起作用的规律，于是进行了用少量数据作微分方程建模的研究。经过长时间的探索与研究，他找到了微分方程建模的累加生成方法，发现累加生成曲线是近似的指数增长曲线，而指数增长正符合微分方程解的形式。这种建模方法需要的原始数据少，预测准确度高，目前已在很多领域得到了广泛的应用。

1979年,在北京召开的由钱学森教授主持的系统工程学术会议上,邓聚龙教授宣读了题为“参数不完全大系统的最小信息镇定”的论文,可看作是灰色系统理论的萌芽。在1981年召开的上海中-美控制系统学术会议上,邓聚龙教授作了“含未知数系统的控制问题”的学术报告,首次使用“灰色系统”一词,引起了与会者的兴趣。

1982年,北荷兰出版公司出版的国际期刊《系统与控制通讯》(Systems & Control Letters)刊载了邓聚龙教授的论文“灰色系统的控制问题”(The Control Problems of Grey System);同年,邓聚龙教授在《华中工学院学报》发表了论文“灰色控制系统”。这两篇论文的发表是灰色系统理论这一横断学科诞生的标志。

### 2.1.2 灰色系统理论的发展

灰色系统理论问世后,受到了国内外学术界的高度重视。美国哈佛大学教授、《系统与控制通信》杂志主编布罗克特(Brockett)给予了灰色系统理论高度的评价。国内外许多出版机构已出版灰色系统学术著作上百种。全世界有几百种学术期刊以及许多重要的国际会议都接受、刊登关于灰色系统的论文,一些重要的国际期刊还出版了灰色系统专辑。在英国创办的《灰色系统学报》(The Journal of Grey System)和在中国台湾创办的《灰色系统学刊》(Journal of the Chinese Grey System Association)更是为广大灰色系统理论研究者提供了很好的交流平台。目前,国内外很多大学开设了灰色系统理论课程,多所学校已招收、培养灰色系统方向的博士研究生,应用灰色系统理论和方法开展各领域科学研究的博士、硕士研究生数以千计。在国内外学者和工程技术人员的积极关注和热情参与下,灰色系统理论与方法得到了迅猛的发展。

### 2.1.3 灰色系统理论的主要内容

经过30多年的发展,灰色系统理论已基本建立起一门新兴学科的结构体系。其主要内容包括以灰色代数系统、灰色方程、灰色矩阵等为基础的理论体系,以灰色关联空间为依托的分析体系,以灰色序列生成为基础的方法体系,以灰色模型(Grey Model, GM)为核心的模型体系,以系统分析、评估、建模、预测、决策、控制、优化为主体的技术体系。

灰色代数系统、灰色方程、灰色矩阵等是灰色系统理论的基础。

灰色系统分析除灰色关联分析外,还包括灰色聚类和灰色统计评估等方面的内容。

灰色序列生成通过序列算子的作用来实现,序列算子主要包括缓冲算子(弱化算子、强化算子)、均值生成算子、级比生成算子、累加生成算子和累减生成算子等。

灰色模型按照五步建模思想构建,通过灰色生成或序列算子的作用弱化随机性,挖掘潜在规律,经过灰色差分方程与灰色微分方程之间的互换,实现了利用离散的数据序列建立连续的动态微分方程的新飞跃。

灰色预测是基于 GM 模型做出的定量预测,按照其功能和特征可分为数列预测、区间预测、灾变预测、波形预测和系统预测等几种类型。

灰色决策包括灰靶决策、灰色关联决策、灰色统计、聚类决策、灰色局势决策和灰色层次决策等。

灰色控制的主要内容包括本征灰色系统的控制问题和以灰色系统方法为基础构成的控制,如灰色关联控制和 GM(1,1)预测控制等。

灰色优化技术包括灰色线性规划、灰色非线性规划、灰色整数规划和灰色动态规划等。

## 2.2 灰数及其运算

### 2.2.1 灰数及其分类

在日常生活和社会、科研实践中,常常会遇到一些只知道大概范围而不知确切值的数,如说“某人的年龄为 20 岁左右”,“今天的气温在 20~30℃”等。我们把这种信息不完全的数称为灰数,通常用符号“ $\otimes$ ”表示。

根据灰数是否有上下界将灰数分为以下 3 类:

(1) 仅有下界的灰数。有下界而无上界的灰数记为  $\otimes \in [a, \infty)$  或  $\otimes(a)$ , 其中  $a$  为灰数  $\otimes$  的下确界,是一个确定的数(白数)。称  $[a, \infty)$  为灰数  $\otimes$  的取数域,简称  $\otimes$  的灰域。

一颗生长着的大树,其重量便是有下界的灰数,因为树的重量必然大于 0。若用  $\otimes$  表示大树的重量,有  $\otimes \in [0, \infty)$ 。

(2) 仅有上界的灰数。有上界而无下界的灰数记为  $\otimes \in (-\infty, \bar{a}]$  或  $\otimes(\bar{a})$ , 其中  $\bar{a}$  为灰数  $\otimes$  的上确界,为白数。

(3) 区间灰数。既有上界  $\bar{a}$  又有下界  $a$  的灰数称为区间灰数,记为  $\otimes \in [a, \bar{a}]$ 。

某人的身高在 1.7~1.8m 之间,某时的气温在 20~25℃ 之间,都是区间灰数,可分别记为  $\otimes_1 \in [1.7, 1.8]$  和  $\otimes_2 \in [20, 25]$ 。

一辆载重汽车必然有其最大载重量，一个电灯泡必定有其能承受的最大电压。汽车的载重量、灯泡的承受电压的下界为 0，因此都是下界为 0 的区间灰数。

根据灰域是否连续，可将灰数分为连续灰数和离散灰数 2 类：

(1) 连续灰数。取值连续地充满整个灰域的灰数称为连续灰数。如身高、体重等。

(2) 离散灰数。在灰域内取有限个值的灰数称为离散灰数。例如某人的年龄在 18~21 岁之间，若以年为单位，有 18、19、20、21 岁 4 种可能，因此是离散灰数。

另外，根据能否找到一个可以作为其“代表”的白数，可将灰数分为本征灰数和非本征灰数 2 类：

(1) 本征灰数。不能或暂时不能找到一个白数作为其“代表”的灰数称为本征灰数，例如宇宙的总能量、准确到纳米的输电线路长度等。

(2) 非本征灰数。如果凭先验信息或间接手段，可以找到一个白数来“代表”某个灰数，这样的灰数称为非本征灰数。此白数称为相应灰数的白化值，记为  $\tilde{\otimes}$ ，并用  $\otimes(a)$  表示以  $a$  为白化值的灰数。例如某人的考试成绩在 80 分左右，用灰数表示为  $\otimes(80)$ ，这里的 80 表示考试成绩的白化值，记为  $\tilde{\otimes}(80) = 80$ 。

### 2.2.2 区间灰数的运算

本书所述的区间灰数的运算包括区间灰数与区间灰数之间的运算和区间灰数与白数之间的运算。

设有  $\otimes_1 \in [a, b]$ ， $a < b$  和  $\otimes_2 \in [c, d]$ ， $c < d$  两个区间灰数，用符号  $*$  表示二者之间的运算。二者的运算结果必然也为区间灰数，设为  $\otimes_3$ ，若其灰域为  $[e, f]$ ，则  $\otimes_3 = \otimes_1 * \otimes_2 \in [e, f]$ ，且有  $\tilde{\otimes}_1 * \tilde{\otimes}_2 \in [e, f]$ 。

区间灰数的运算应遵循以下法则：

法则 1：设  $\otimes \in [a, b]$ ， $a < b$ ， $k$  为正实数，则

$$k \cdot \otimes \in [ka, kb] \quad (2-1)$$

法则 2：设  $\otimes \in [a, b]$ ， $a < b$ ，则

$$-\otimes \in [-b, -a] \quad (2-2)$$

法则 3：设  $\otimes_1 \in [a, b]$ ， $a < b$ ； $\otimes_2 \in [c, d]$ ， $c < d$ ，则

$$\otimes_1 + \otimes_2 \in [a+c, b+d] \quad (2-3)$$

法则 4：设  $\otimes_1 \in [a, b]$ ， $a < b$ ； $\otimes_2 \in [c, d]$ ， $c < d$ ，则

$$\otimes_1 - \otimes_2 = \otimes_1 + (-\otimes_2) \in [a-d, b-c] \quad (2-4)$$

法则 5: 设  $\otimes_1 \in [a, b]$ ,  $a < b$ ;  $\otimes_2 \in [c, d]$ ,  $c < d$ , 则

$$\otimes_1 \cdot \otimes_2 \in [\min \{ac, ad, bc, bd\}, \max \{ac, ad, bc, bd\}] \quad (2-5)$$

法则 6: 设  $\otimes_1 \in [a, b]$ ,  $a < b$ ;  $\otimes_2 \in [c, d]$ ,  $c < d$ , 且有  $c, d \neq 0$  和  $cd > 0$ , 则

$$\frac{\otimes_1}{\otimes_2} \in \left[ \min \left\{ \frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d} \right\}, \max \left\{ \frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d} \right\} \right] \quad (2-6)$$

法则 7: 设  $\otimes \in [a, b]$ ,  $a < b$ , 且有  $a, b \neq 0$  和  $ab > 0$ , 则

$$\frac{1}{\otimes} \in \left[ \frac{1}{b}, \frac{1}{a} \right] \quad (2-7)$$

需注意, 区间灰数不能相消、相约, 也就是说, 区间灰数的自差一般不为 0, 自除一般不为 1。例如, 对于区间灰数  $\otimes \in [1, 2]$ , 按照法则 4, 一般情况下  $\otimes - \otimes \in [-1, 1]$ , 仅当减数和被减数取数相同 (称为取数一致) 时才为 0; 按照法则 6, 一般情况下  $\otimes / \otimes \in [0.5, 2]$ , 仅当减数和被减数取数一致时才为 1。

### 2.2.3 灰数的白化

因为灰数是一个整体数 (或区间数、集合数), 所以在处理含有灰数的问题时, 势必带来一定的困难。为了量化处理的需要, 需要将取不确定值的灰数, 按照某种方法取一个确定的值即白数, 这就是灰数的白化。

有一类灰数是在某个基本值附近变动的, 这类灰数白化比较容易, 可以将其基本值作为白化值。以  $a$  为基本值的灰数可记为  $\otimes(a) = a + \varepsilon_a$  或者  $\otimes(a) \in (-, a, +)$ , 其中  $\varepsilon_a$  称为扰动灰元, 此灰数的白化值为  $\tilde{\otimes}(a) = a$ 。如电力系统的频率在 50Hz 左右, 可表示为  $\otimes(50) = 50 + \varepsilon$  或  $\otimes(50) \in (-, 50, +)$ , 其白化值为 50。

对于一般的区间灰数  $\otimes \in [a, b]$ , 我们将其白化值  $\tilde{\otimes}$  取为

$$\tilde{\otimes} = \alpha a + (1 - \alpha)b, \quad \alpha \in [0, 1] \quad (2-8)$$

式 (2-8) 所示的白化称为等权白化。若  $\alpha = 0.5$ , 称为等权均值白化。当缺乏区间灰数取值的分布信息时, 常采用等权均值白化。

在很多情况下, 灰数取值的分布是不均匀的。例如某学校某班学生的身高范围为 1.55~1.85m, 这个身高是一个灰数。它不是一个数, 而是一群数, 这群数中的每个数是否都应该同等看待呢? 当然不能。那么这个灰数的白化值究竟取多少可能性最大呢? 根据了解, 这个班有 40 人, 其中 24 人身高为 1.65~1.75m, 4 人身高为 1.75~1.85m, 12 人身高为 1.55~1.65m。可以计算出 1.65~1.75m 的权值为 0.6, 1.75~1.85m 权值为 0.1, 1.55~1.65m 权值为 0.3。由此可见, 灰数的取值存在不等权问题。这类情况下, 如果再进行等权白化显然

是不合理的。为此，灰色系统理论用白化权函数来描述一个灰数对其取值范围内不同数值的“偏爱”程度。以下给出白化权函数的定义。

设  $f(x) \in [0, 1]$ ，对于任意  $x$ ，如果满足：

- 1)  $f(x)=L(x)$ 且单调递增， $x \in [a_1, b_1]$ ；
- 2)  $f(x)=R(x)$ 且单调递减， $x \in [b_2, a_2]$ ；
- 3)  $f(x)=1$ （峰值）， $x \in [b_1, b_2]$ 。

则称  $f(x)$  为典型白化权函数，简称白化权函数，如图 2-1 (a) 所示。 $L(x)$  为左支增函数， $R(x)$  为右支减函数， $a_1$  为始点， $a_2$  为终点， $b_1, b_2$  为转折点， $[b_1, b_2]$  为峰区。

在实际应用时，为了便于编程和计算， $L(x)$  和  $R(x)$  常简化为直线，如图 2-1 (b) 所示。相应地，白化权函数为

$$f(x) = \begin{cases} L(x) = \frac{x-a_1}{b_1-a_1}, & x \in [a_1, b_1) \\ 1, & x \in [b_1, b_2] \\ R(x) = \frac{a_2-x}{a_2-b_2}, & x \in (b_2, a_2] \end{cases} \quad (2-9)$$

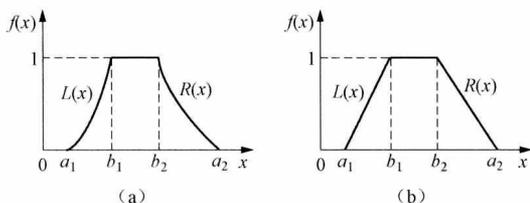


图 2-1 典型白化权函数

(a) 理论白化权函数；(b) 实用白化权函数

白化权函数描述对一个灰数取值范围内不同数值的“偏爱”程度。例如某人希望自己收入越多越好，可以用图 2-2 的两种函数描述，图 2-2 (a) 为斜坡型白化权函数，表明“偏爱”程度是成比例增加的，如果收入 20 万为最大满意值的话[即  $f(x)=1$ ]，则收入 10 万的满意程度为  $f(x)=0.5$ ，这是一种正常的愿望。而图 2-2 (b) 的指数函数则是一种非正常心理，10 万对他来说根本不值一提 [ $f(x)=0.1$ ]，非 20 万不可，毫无商量余地。这种情况虽然有，但并不是普遍现象，因此通常采用 2-2 (a) 所示的表示正常偏爱程度的白化权函数。