高职高专教育“十二五”规划教材·公共基础类

YINGYONG GAODENG SHUXUE

（第2版）

应用高等数学

主 编 冯兰军 赵国瑞

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

高职高专教育“十二五”规划教材·公共基础类

应用高等数学

（第2版）

主　编　冯兰军　赵国瑞

副主编　何月俏　崔庆岳

参　编　王晓峰　赵彩月

北京睿和名扬印刷有限公司

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内 容 简 介

本书根据教育部制定的“高职高专教育高等数学教学基本要求”，结合编者多年教学经验，按照“以应用为目的，以必需够用为度”的原则编写而成。

全书共分6章，整体结构合理，语言叙述通俗。主要内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、二元微积分初步。书后附有微积分发展简史、初等数学常用公式和习题答案。

本书既可作为高等职业院校、高等专科学校、成人高等院校工科类各专业高等数学课程教材，也可供准备参加广东省本科插班生考试的考生作为参考教材。

图书在版编目(CIP)数据

应用高等数学 / 冯兰军，赵国瑞主编. --2版. -- 北京：北京邮电大学出版社，2015.9(2016.3重印)

ISBN 978-7-5635-4514-8

Ⅰ.①应… Ⅱ.①冯… ②赵… Ⅲ.①高等数学—高等职业教育—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第204572号

书　　名：应用高等数学(第2版)

著作责任者：冯兰军　赵国瑞 主编

责 任 编 辑：满志文

出 版 发 行：北京邮电大学出版社

社　　址：北京市海淀区西土城路10号(邮编：100876)

发 行 部：电话：010-62282185　传真：010-62283578

E-mail：publish@bupt.edu.cn

经　　销：各地新华书店

印　　刷：北京睿和名扬印刷有限公司

开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16

印　　张：16.5(含习题集)

字　　数：403千字(含习题集)

版　　次：2015年9月第1版　2016年3月第3次印刷

ISBN 978-7-5635-4514-8　　定　价：36.80元

·如有印装质量问题，请与北京邮电大学出版社发行部联系·

前　言

本教材是根据教育部最新制定的“高职高专教育高等数学教学基本要求”，结合编者多年的教学经验，及每年 4 000 人的学生教学情况，“以应用为目的，以必需够用为度”的原则编写而成的。本教材具有结构严谨，逻辑清晰，讲解透彻，通俗易懂，便于自学等优点，可作为高等专科学校、成人高等院校工科类各专业高等数学课程教材，也可作为参加广东省本科插班生考试的考生参考教材。

本教材具有以下特色：

(1) 内容简练，语言通俗。本教材本着够用为度的原则，留下最急需的知识，摒弃了大量的理论证明；对数学概念、定理大多采用学生容易理解、容易记住的方式进行叙述。例如，极限概念用描述性定义学生更容易接受；分部积分公式中 u 的确定使用口诀“五指山上觅对象——反常”，学生更容易记住。

(2) 习题配置合理，便于精讲多练。在各章节的编写过程中，每个知识点后面都编排了针对性很强的课堂练习，方便教师的教学和学生的学习，使学生能趁热打铁，迅速消化吸收新知识；每节后面还编排了大量的课后练习，方便学生复习巩固本节内容。

(3) 以人为本，合理分层。我们把教学内容分为基本内容、一般内容和提高内容三个层次，基本内容、一般内容放在一块编排，提高内容作为选学内容，可根据专业及学生的实际情况灵活掌握；课后练习也作了相应编排，分为基本题、一般题、提高题三部分，基本题和一般题是要求大多数学生应该掌握的，提高题则留给数学基础较好的学生选做。

(4) 注重学生的可持续发展，对于学有余力、有心参加专插本考试的学生，我们在每章的最后开辟了历年真题部分，有助于大家的学习。

(5) 本书附赠习题集，便于学生练习使用，也便于教师测验使用。

教材使用方面，讲授学时约为 76 学时，第 1～5 章为一元函数微积分，第 6 章为二元函数微积分，第 7 章为常微分方程(可根据学时情况选讲)。

本教材由广州城建职业学院人文学院数学教研室老师参与编写，冯兰军、赵国瑞任主编，何月俏、崔庆岳任副主编，广州司法职业学校的王晓峰、赵彩月参与部分章节的编写。

由于编者水平有限，不足之处在所难免，恳请广大的教师和读者提出宝贵的意见。

最后在此感谢各位编辑辛勤的后期工作！

编　者

目　　录

第1章　函数、极限与连续

函数描述了客观世界中量与量之间的依赖关系，它是高等数学重要的基本概念之一，也是高等数学研究的主要对象。极限概念是在研究变量在某一过程中的变化趋势时引出的，高等数学中的几个重要概念，如连续、导数、定积分等，都是用极限来定义的，掌握好极限理论和方法是学好微积分的必要前提。本章我们主要对函数进行复习和作一些有关的补充，并详细介绍数列与函数极限的概念，求极限的方法及函数的连续性。

1.1　函　　数

1.1.1　预备知识

1. 集合

具有某种属性的元素 x 的全体称为一个集合，记为 A，x 称为集合的元素，记 $A=\{x|x$所具有的特征$\}$。

例如，由不等式 $4<x<8$ 表示的实数集合记为 $A=\{x|4<x<8\}$。

集合也可以用其他大写的英文字母表示。如果 x 是集合 A 中的元素，记为 $x\in A$。否则，记为 $x\notin A$。

由全体实数构成的集合记为 $\mathbf{R}$，由自然数构成的集合记为 $\mathbf{N}$，整数集合记为 $\mathbf{Z}$，有理数集合记为 $\mathbf{Q}$，无理数集合记为 $\mathbf{W}$。显然，$\mathbf{N}$、$\mathbf{Z}$、$\mathbf{Q}$、$\mathbf{W}$ 都包含于 $\mathbf{R}$ 内，故它们分别为 $\mathbf{R}$ 的子集。

2. 区间

设 a,b 均为实数，且 $a<b$，则称$\{x|a<x<b\}$表示的实数 x 的集合为开区间，记为(a,b)。即$(a,b)=\{x|a<x<b\}$。

类似地，称 $[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 为闭区间；$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$ 以及 $[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$ 为半开半闭区间。

以上区间为有限区间，a 与 b 分别称为区间的端点，右端点与左端点的差称为区间的长度。在讨论问题时，为方便起见也常用 I 表示上述各区间。

引入无穷大的记号∞，则以下各区间为无限区间：

$(a,+\infty)=\{x|a<x<+\infty\}=\{x|x>a\}$，$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x<+\infty\}=\{x|x\geqslant a\}$；

$(-\infty,b)=\{x|-\infty<x<b\}=\{x|x<b\}$，$(-\infty,b]=\{x|-\infty<x\leqslant b\}=\{x|x\leqslant b\}$；

$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}=\{x|x\in\mathbf{R}\}$，即表示全体实数的集合。

应当注意的是，∞是一个记号，并不表示一个很大的数，且不能参与运算。

有了区间的概念之后,不等式或不等式组的解常用区间来表示。

3. 邻域

设$\delta>0$,x_0是一个实数,称集合

$$\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$$

为点x_0的δ邻域,记为$U(x_0,\delta)$,即$U(x_0,\delta)=\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$。其中,$x_0$为邻域的中心,$\delta$为邻域的半径。

在数轴上,点x_0的δ邻域表示以点x_0为中心,长度为2δ的开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$。

如果x在x_0的δ邻域内变化但不能取x_0,即x满足不等式$0<|x-x_0|<\delta$,则称此邻域为点x_0的去心邻域,记为$\mathring{U}(x_0,\delta)$,即$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$,相应地,称$U(x_0,\delta)$为点$x_0$的有心邻域。

例如,3的0.01邻域,就是满足不等式$|x-3|<0.01$的实数x的集合,即$2.99<x<3.01$,也就是开区间$(2.99,3.01)$。

又如,满足不等式$0<|x+2|<0.01$的实数x的集合,就表示点-2的去心邻域,半径也是0.01。该邻域即开区间$(-2.01,-2)\cup(-2,-1.99)$。

其中符号$\cup$是集合运算的一种符号,表示两个集合的并集,即$A\cup B=\{x \mid x\in A$或$x\in B\}$。

练一练

用区间表示下列各邻域:

(1) $U(1,0.1)$;　(2) 点3的0.001邻域;　(3) 点-3的0.002去心邻域。

1.1.2 函数的概念

1. 函数的定义

在我们的周围,变化无处不在,无时不有。在同一个自然现象或技术过程中,往往同时存在着几个变量,这些变量不是彼此孤立的,而是按照一定的规律相互联系着,其中一个量变化时,另外的变量也跟着变化;前者的值一旦确定,后者的值也就随之唯一确定。我们先观察下面的实例。

例1 某种机器的销售单价为每台5万元,销售总收入R万元与销售量x台的关系为:

$$R=5x$$

x在正整数内任取一个具体数值,根据上面的依赖关系,就得到一个确定的R值与之对应。

例2 某天一昼夜的气温T是随时间t的变化而变化的。气温的变化可以通过气温自动记录仪记录下来。如图1-1所示,利用气温自动记录仪我们得到一条曲线,对这一天00:00~24:00之间任一时刻t_0,气温T都有一个确定的值T_0与它对应,如当$t=0$时,气温$T=10$ ℃;当$t=12$时,气温$T=30$ ℃。

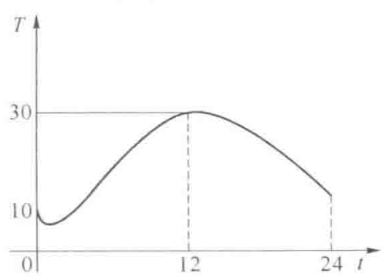

图1-1

例 3　某人的父母每年在他生日的那天记录下他的身高，表 1-1 是他从 1 周岁到 10 周岁的身高。

表 1-1　某人的身高

年龄/岁	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
身高/m	0.77	0.90	0.97	1.04	1.14	1.21	1.26	1.32	1.37	1.43

由该表可知这个人的身高随着年龄的增长而增高，例如，想要知道他 6 岁时的身高，只要查表就知道为 1.21 m。

现实世界中广泛存在着的变量间的相依关系，这正是函数关系的客观背景。将变量间的这种相依关系抽象化并用数学语言表达出来，便得到了函数的概念。

定义 1　设 x 和 y 为两个变量，D 为一个给定的非空数集，如果按照某个法则 f，对每一个 $x\in D$，变量 y 总有唯一确定的数值与之对应，那么 y 称为 x 的函数，记作 $y=f(x)$，$x\in D$。其中变量 x 称为自变量，变量 y 称为函数或因变量，自变量的取值范围 D 称为函数的定义域。

f 是函数符号，它表示 y 与 x 的对应规则。有时，函数符号也可以用其他字母来表示，如 $y=g(x)$，$y=\varphi(x)$等。

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，依法则 f 的对应值称为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 时的函数值，记作 $f(x_0)$或 $y\Big|_{x=x_0}$。只有 $x_0\in D$ 时，才有对应的函数值，这时称函数 $y=f(x)$在 x_0 有定义，否则称函数 $f(x)$在 x_0 无定义。所有函数值组成的集合 $W=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$称为函数 $y=f(x)$的值域。

关于函数概念，我们提出以下几点注释：

(1) 函数的概念中涉及定义域、对应法则和值域三个要素。在这三个要素中，最重要的是定义域和因变量关于自变量的对应法则，这两者常称为函数的二要素。只有定义域与对应法则都相同的两个函数才是相同的函数。

(2) 每个函数除定义域外，还有值域，它们随着函数的出现而出现，因此它们不可能是空集。

(3) 上述定义中所说的函数只有一个自变量，这样的函数就称为一元函数。且对于自变量 x 在定义域 D 中的每一个值，因变量 y 有唯一确定的值与之对应(而不是两个或两个以上值)，故称这样的函数为单值函数，如果对于自变量 x 在定义域 D 中的每一个值，因变量 y 的对应值不止一个，则称 y 是 x 的多值函数。在没有特别声明的情况下，以后凡提及的函数，均指一元单值函数。

(4) 在函数的定义中，并没有要求自变量变化时函数值一定要变，只要求对于自变量 $x\in D$，都有确定的 $y\in \mathbf{W}$ 和它对应。因此，常量 $y=C$ 也符合函数的定义，因为当 $x\in \mathbf{R}$ 时，所对应的 y 值都是确定的常数 C。

例 4　设 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$，求 $f\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$，$f(x+1)$。

解　$f\left(\dfrac{2}{\pi}\right)=\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}$；　　$f(x+1)=\dfrac{1}{x+1}\sin\dfrac{1}{x+1}$。

例 5　设 $f(x+1)=x^2-3x$，求 $f(x)$。

解　令 $x+1=t$，则 $x=t-1$，有　$f(t)=(t-1)^2-3(t-1)=t^2-5t+4$，

所以 $f(x)=x^2-5x+4$

例 6　求下列函数的定义域。

(1) $y=\dfrac{1}{(x-1)(x+4)}$。

分析　因为是分式,所以要求分母不等于零。

解　$(x-1)(x+4)\neq 0$,定义域为 $x\neq 1$,且 $x\neq -4$,用区间表示,即 $D=(-\infty,-4)\cup(-4,1)\cup(1,+\infty)$。

(2) $y=\sqrt{3-x}$。

分析　因为是二次根式,所以要求被开方数 $3-x$ 必须大于等于零。

解　$3-x\geqslant 0$,所以定义域为 $x\leqslant 3$,用区间表示,即 $D=(-\infty,3]$。

(3) $y=\dfrac{1}{x}\ln(x+1)$。

分析　首先有分式,要求分母 x 不等于零,其次有对数,要求真数 $x+1$ 大于零,所以,定义域是两者的公共部分。

解　由 $\begin{cases}x\neq 0,\\ x+1>0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x\neq 0,\\ x>-1。\end{cases}$

所以定义域为 $x>-1$ 且 $x\neq 0$,用区间表示,即 $D=(-1,0)\cup(0,+\infty)$。

应当指出,在实际应用问题中,除了要根据解析式子本身来确定自变量的取值范围外,还要考虑到变量的实际意义,一般而言,经济变量往往取正值,即变量都大于0。

例7　下列各对函数是否为同一函数。

(1) $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$;　　(2) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x, g(x)=1$;

(3) $y=f(x), u=f(t)$;　　(4) $f(x)=\dfrac{x}{x}, g(x)=1$。

解　(1) 不相同。因为对应法则不同,事实上 $g(x)=|x|$。

(2) 相同。因为定义域与对应法则都相同。

(3) $y=f(x)$ 与 $u=f(t)$ 是表示同一函数,因为对应法则相同,函数的定义域也相同。

(4) 不相同,因为定义域不同。

由此可知一个函数由定义域与对应法则完全确定,而与用什么字母表示无关。

2. 函数的表示法

表示函数的方法有许多,最常见的有表格法、图像法及解析法(又称公式法)。

(1) 表格法:把自变量的一系列数值与对应的函数值列成表来表示它们的对应关系,如例3。

(2) 图像法:用一条平面曲线表示自变量与函数的对应关系,它是函数关系的几何表示,如例2。

(3) 解析法:用数学式子表示自变量与函数的对应关系,如例1。

3. 分段函数

有时,我们会遇到一个函数在自变量不同的取值范围内用不同的式子来表示。

例8　邮电局规定信函邮包重量不超过50克支付邮资0.80元,超过部分按0.40元/克支付邮资,信函邮包重量不得超过5 000克,则邮资 y(单位:元)与邮包重量 x(单位:克)的关系可由解析表达式表示为

$$y=\begin{cases}0.80, & 0<x\leqslant 50,\\ 0.80+0.40(x-50), & 50<x\leqslant 5\,000。\end{cases}$$

该函数的定义域为$(0,5\,000]$,但它在定义域内不同的区间上是用不同的解析式来表示的,这样的函数称为分段函数。如下面几个特殊函数。

绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0。\end{cases}$(图1-2)与符号函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0。\end{cases}$(图1-3)

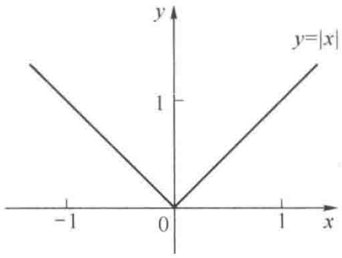

图 1-2

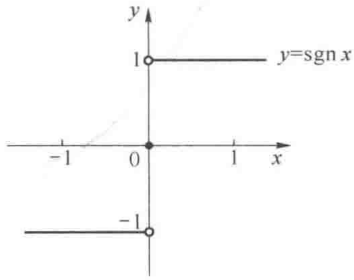

图 1-3

注意:分段函数是由几个关系式合起来表示一个函数,而不是几个函数。对于自变量 x 在定义域内的某个值,分段函数 y 只能确定唯一的值。分段函数的定义域是各段自变量取值集合的并集。

例 9　作出分段函数 $f(x)=\begin{cases}2, & x>2,\\ 2x-1, & 0<x\leqslant 2,\\ x^2-1, & x\leqslant 0\end{cases}$ 的图像,并求函数的定义域及 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$、$f(-2)$、$f(2)$。

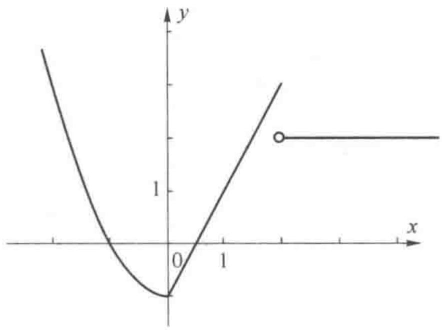

图 1-4

解　先分段作出分段函数的图像(图 1-4),函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$。

因 $\dfrac{1}{2}\in(0,2]$,

故 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\times\dfrac{1}{2}-1=0$。

因 $-2\in(-\infty,0]$,

故 $f(-2)=(-2)^2-1=3$。

因 $2\in(0,2]$,

所以 $f(2)=3$。

练一练

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$;　　(2) $y=\dfrac{1}{x}+\ln(x^2-4)$;　　(3) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{3}$。

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leqslant 0,\\ x^2-2, & x>0。\end{cases}$ 求 $f(0)$,$f(-2)$,$f(x-1)$。

1.1.3　函数的几种特性

1. 函数的有界性

定义 2　设函数 $y=f(x)$ 在集合 D 上有定义,如果存在正数 M,对于一切 $x\in D$,都有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 D 上是有界的。否则称函数 $f(x)$ 在 D 上是无界的。

函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内有界的几何意义是:曲线 $y=f(x)$在区间(a,b)内被限制在 $y=-M$ 和 $y=M$ 两条直线之间。

注意:

(1) 一个函数在某区间内有界,正数 M(也称界数)的取法不是唯一的。例如,$y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是有界的,$|\sin x|\leqslant 1=M$,我们还可以取 $M=2$。

(2) 有界性跟区间有关。例如,$y=\dfrac{1}{x}$在区间$(1,2)$内有界,但在区间$(0,1)$内无界。由此可见,笼统地说某个函数是有界函数或无界函数是不确切的,必须指明所考虑的区间。

2. 函数的奇偶性

定义 3 设函数 $y=f(x)$的定义域 D 关于原点对称,如果对任意的 $x\in D$,有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$为偶函数;若有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$为奇函数。

例如,$y=\cos x$,$y=x^2$ 是偶函数;$y=\sin x$,$y=x^3$ 是奇函数;$y=\sin x+\cos x$ 是非奇非偶函数。可以证明,奇函数的图像关于原点对称,如图 1-5(a)所示;偶函数的图像关于 y 轴对称,如图 1-5(b)所示。

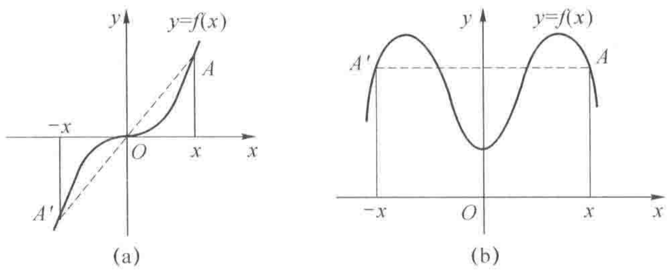

图 1-5

例 10 判断函数 $f(x)=x+\sin x$ 的奇偶性。

解 函数 $f(x)=x+\sin x$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$,且有 $f(-x)=-x+\sin(-x)=-(x+\sin x)=-f(x)$,所以函数是奇函数。

3. 函数的单调性

定义 4 设函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内有定义,如果对于任意的 $x_1,x_2\in(a,b)$,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在(a,b)内单调增加;若 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在(a,b)内单调减少。

单调增加和单调减少的函数,统称为单调函数,相应的区间称为函数的单调区间。

单调增加函数,它的图像沿横轴正向而上升,如图 1-6(a)所示,单调减少函数,它的图像沿横轴正向而下降,如图 1-6(b)所示。

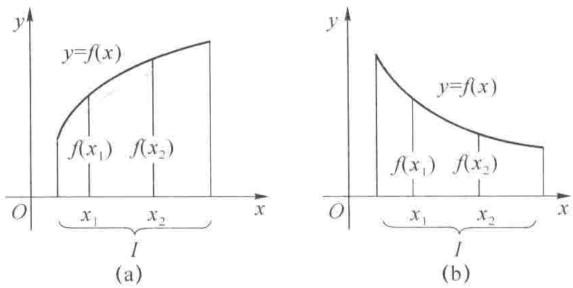

图 1-6

例如，函数 $f(x)=x^2$ 在区间$[0,+\infty)$内是单调增加的，在区间$(-\infty,0]$内是单调减少的；在区间$(-\infty,+\infty)$内函数 $f(x)=x^2$ 不是单调的。又如，函数 $f(x)=x^3$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的。

例 11　证明函数 $f(x)=5x-2$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的。

证　取任意 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，因 $f(x_1)-f(x_2)=(5x_1-2)-(5x_2-2)=5(x_1-x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，故 $f(x)=5x-2$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的。

4. 函数的周期性

定义 5　对于函数 $y=f(x)$，如果存在正数 T，使得对于任意 $x\in D$，必有 $x\pm T\in D$，并且使 $f(x)=f(x+T)$恒成立，则称此函数 $f(x)$为周期函数，T 称为 $f(x)$的周期。周期函数的周期通常是指满足该等式的最小正数 T。

例如，$y=\sin x$ 是周期函数，周期为 2π；$y=\tan x$ 的周期为 π。

对周期为 l 的周期函数，如果把其定义域分成长度为 l 的许多区间，那么在每个区间上，函数图形有相同的形状，如图 1-7 所示。

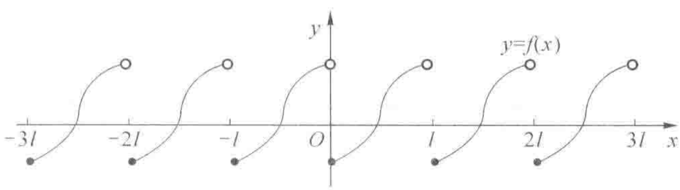

图 1-7

练一练

1. 判别函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在下列区间内的有界性：

(1) $(-\infty,-2)$；　(2) $(-2,0)$；　(3) $(0,2)$；　(4) $(1,2)$；　(5) $(2,+\infty)$。

2. 判断下列函数的奇偶性。

(1) $y=x^2\cos x$；　(2) $y=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$；　(3) $f(x)=\begin{cases}-x, & x<-1,\\ 1, & |x|\leqslant 1,\\ x, & x>1。\end{cases}$

1.1.4　反函数

在函数中，自变量与因变量的地位是相对的，任意一个变量都可根据需要作为自变量。例如，在自由落体运动规律中，t 是自变量，s 是因变量。则有公式 $s=\dfrac{1}{2}gt^2\ (t\geqslant 0)$，由公式可算出 t 时间内物体下落的路程 s。但有时也需要根据物体所经过的路程 s 来确定经过这段路程所需要的时间 t，这只要从上式中算出 t，就得到 $t=\sqrt{\dfrac{2s}{g}}\ (s\geqslant 0)$，这里 s 是自变量，t 就是因变量。上面两式反映了同一过程中两个变量之间地位的相对性，我们称它们互为反函数。

定义 6　设 $y=f(x)$是定义在 D 上的函数，值域为 W。如果对于任意的 $y\in W$，通过关系

式 $y=f(x)$,都有唯一确定的数值 $x\in D$ 与之对应,那么由此所确定的以 y 为自变量,x 为因变量的新函数称为函数 $y=f(x)$的反函数,其对应规律记作 f^{-1},$y=f(x)$的反函数记作 $x=f^{-1}(y)$,它的定义域为 W,值域为 D。原来的函数 $y=f(x)$称为直接函数。

事实上,$y=f(x)$与 $x=f^{-1}(y)$互为反函数。

习惯上用 x 表示自变量,而用 y 表示函数,因此,往往把反函数 $x=f^{-1}(y)$改写成$y=f^{-1}(x)$。

例 12 求函数 $y=2x+1$ 的反函数。

解 由 $y=2x+1$ 得 $x=\dfrac{y-1}{2}$,交换 x 和 y,得 $y=\dfrac{x-1}{2}$,即为$y=2x+1$ 的反函数。

从上面的定义容易得出,求反函数的过程可以分为两步:

第一步,从 $y=f(x)$解出 $x=f^{-1}(y)$;

第二步,交换字母 x 和 y。

注意:(1) 如果一个函数存在反函数,它的对应关系必定是一一对应的。单调函数一定存在反函数。

(2) 可以证明,在同一直角坐标系中,函数 $y=f(x)$的图像与反函数 $y=f^{-1}(x)$的图像关于直线 $y=x$ 对称,如图 1-8 所示。

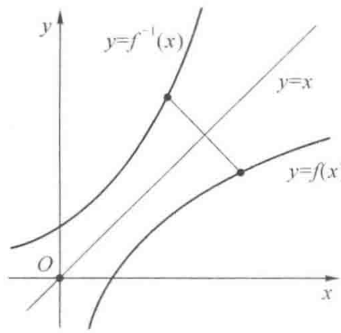

图 1-8

1.1.5 初等函数

1. 基本初等函数

在大量的函数关系中,有几种函数是最常见的、最基本的,它们是常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数以及反三角函数,这几类函数称为基本初等函数。

(1) 常数函数 $y=c$

它的定义域是$(-\infty,+\infty)$,由于无论 x 取何值,都有 $y=c$,所以它的图像是过点$(0,c)$平行于 x 轴的一条的直线,如图 1-9 所示,它是偶函数。

(2) 幂函数 $y=x^a$(a 为实数)

幂函数的情况比较复杂,我们分 $a>0$ 和 $a<0$ 来讨论。当 a 取不同值时,幂函数的定义域不同,为了便于比较,我们只讨论 $x\geqslant 0$ 的情形,而 $x<0$ 时的图像可以根据函数的奇偶性确定。

当 $a>0$ 时,函数的图像过原点$(0,0)$和点$(1,1)$,在$(0,+\infty)$内单调增加且无界,如图 1-10所示。

当 $a<0$ 时,图像不过原点,但仍过点$(1,1)$,在$(0,+\infty)$内单调减少、无界,曲线以 x 轴和 y 轴为渐近线。

(3) 指数函数 $y=a^x$($a>0,a\neq 1$)

它的定义域是$(-\infty,+\infty)$。由于无论 x 取何值,总有 $a^x>0$,且 $a^0=1$,所以它的图像全部在 x 轴上方,且通过点$(0,1)$。也就是说,它的值域是$(0,+\infty)$。

① 当 $a>1$ 时,函数单调增加且无界,曲线以 x 轴的负半轴为渐近线;

② 当 $0<a<1$ 时,函数单调减少且无界,曲线以 x 轴的正半轴为渐近线,如图 1-11 所示。