

清华大学研究生公共课教材——数学系列

偏微分方程数值解法

(第3版)

陆金甫 关治 编著

清华大学出版社

清华大学研究生公共课教材——数学系列

偏微分方程数值解法

(第3版)

陆金甫 关治 编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书介绍了偏微分方程数值解的两类主要方法:有限差分方法和有限元方法.其内容包括有限差分方法的基本概念;双曲型方程、抛物型方程及椭圆型方程的有限差分方法;数学物理方程的变分原理;有限元离散方法以及其他一些相关的课题等.在介绍每种具体方法的同时,还给出了相应的理论分析,各章附有习题.

本书可作为高等学校理工科专业研究生教材,有关本科专业也可作教材使用,此外也可供从事科学与工程计算的科技人员参考.

版权所有,侵权必究. 侵权举报电话: 010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

偏微分方程数值解法/陆金甫,关治编著.—3版.—北京:清华大学出版社,2016
(清华大学研究生公共课教材.数学系列)
ISBN 978-7-302-45472-4

I. 偏… II. ①陆… ②关… III. 偏微分方程—数值计算—研究生—教材 IV. O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 274746 号

责任编辑:刘颖
封面设计:常雪影
责任校对:王淑云
责任印制:杨艳

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社 总 机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:三河市金元印装有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×230mm 印 张:18.25 字 数:378千字

版 次:1987年1月第1版 2016年11月第3版 印 次:2016年11月第1次印刷

印 数:1~2000

定 价:39.00元

产品编号:070906-01

第3版前言

本书第2版自出版以来,被不少工科院校研究生用作教材,使用过程中发现了一些错误和不妥,在重印中我们曾作了一些勘误.这次修订除了改正一些已发现的不妥和错误外,对非线性问题的内容作了删减和调整.第3章增加了第7节,其内容部分取自原版第6章的第1~2节,第4章增加了3.7节以及第6节,其内容部分取自原版第6章第6节.原版第6章除上述已保留外全部删除.此外,还删去了介绍混合有限元方法的内容.

此次再版是在清华大学出版社刘颖博士提议、推动和支持下完成的.我们深表感谢.

陆金甫 关 治

2016年6月

第 2 版前言

本书初版至今已有十多年了,其间老师和同学指出了书中的一些不妥并提出修改意见,在这次修改中我们做了认真的研究和改进.有关偏微分方程初步知识以及有关数学知识专列一章,非线性问题的差分方法也集中于一章.这样本书的基本内容为第 1 章至第 5 章以及第 7 章和第 8 章.第 6 章和第 9 章分别为非线性问题的差分方法以及一些与有限元相关的课题,如特征值问题的有限元方法、边界元方法、多重网格方法等,这两章内容可选学.在这次修改中,第 2 章至第 6 章由陆金甫修改,其余均由关治修改.

陆金甫 关 治

2003 年 2 月

第1版前言

偏微分方程的数值解法在数值分析中占有重要的地位,很多科学技术问题的数值计算包括了偏微分方程的数值解问题.近三十多年来,它的理论和方法都有了很大的发展,而且在各个科学技术的领域中应用也愈来愈广泛.在我国,偏微分方程数值解法作为一门课程,不但在计算数学专业,而且也在其他理工科专业的研究生和大学生中开设.这本书的目的就是为大学课程提供一本教材,同时也为从事这方面工作的科研、工程技术人员提供一本参考书.

本书着重介绍当今流行的偏微分方程数值解的两类主要方法,即有限差分方法和有限元方法.目前,这两类方法在应用上有不同的侧重,所以本书在选材上也有差别.有限差分方法主要集中在依赖于时间的问题(双曲型和抛物型方程),而有限元方法则侧重于定态问题(椭圆型方程),至于用这两类方法离散化后得到的代数方程组的数值解法,虽然十分重要和引起人们浓厚兴趣的问题,但是为了不使本书篇幅过长,我们没有讨论它,好在一般数值分析教科书和有关专著中,对一些基本的数值代数方法都有所介绍.

本书讨论的两类方法,都以基本概念和基本方法为主,同时也介绍了一些近年发展起来的方法和技巧.我们希望本书能够帮助读者确切地理解基本概念,掌握和正确使用基本方法.书中对模型问题作了详细的分析,而对较为复杂的问题只作近似的分析或简单的介绍.本书没有采用高深的数学工具,因此学过微积分和线性代数,而且具有数值分析和数学物理方程初步基础的理工科学生和工程技术人员均可阅读.对专门从事计算数学的学生和研究人员来说,本书只是给出偏微分方程数值解的一些最基础的知识和方法.

本书的前4章是关于有限差分方法的,其中第1章集中讨论了有限差分法的基本概念,我们认为弄清楚这些基本概念再具体讨论各种差分格式,将会有较大的好处.第2、3、4章分别讨论双曲型、抛物型和椭圆型方程的差分解法.如上所说,对椭圆型方程的讨论是较为简单的.第5章叙述了基本的变分原理,为下一章打下基础.第6章讨论了椭圆型方程的有限元方法.为了阐述基本的概念和方法,这两章我们都从一维问题开始讨论.本书最后一章简单介绍了一些以上各章未涉及的问题.其中前4节是有限元方法进一步的应用.第5节利用变分原理列出差分方程.最后两节则不是专属于有限差分方法和有限元方法的.其一是在很多工程技术问题应用的边界元方法.其二是多网格方法,这是近年来十分活跃的课题.我们特别请顾丽珍同志执笔写了这一节.

本书的初稿是为清华大学理工科各专业研究生和应用数学专业大学生开设的偏微分

方程数值解课程的讲义,经过在教学中试用、修改而成书.本书得到胡显承同志的认真审阅.顾丽珍同志两次使用我们的讲义,十分详细地提出了改进意见,又认真看了修改后的书稿,改正了一些疏漏之处,并为本书补充了多重网格方法的一节.此外,从编写讲义到成书的整个过程中,我们都得到李庆扬同志的热情鼓励和支持.对他们的帮助,我们深表感谢.同时也希望读者指出本书的错误和不足,使我们的工作得到改进.

陆金甫 关 治

1985年4月于清华园

目 录

第 1 章 引论、准备知识	1
1 引论	1
2 关于偏微分方程的一些基本概念	2
2.1 几个典型方程	2
2.2 定解问题	5
2.3 二阶方程	5
2.4 一阶方程组	8
3 Fourier 变换和复数矩阵	10
3.1 Fourier 变换	10
3.2 复数矩阵	12
第 2 章 有限差分方法的基本概念	13
1 有限差分格式	13
1.1 网格剖分	13
1.2 用 Taylor 级数展开方法建立差分格式	14
1.3 积分方法	17
1.4 隐式差分格式	18
2 有限差分格式的相容性、收敛性及稳定性	19
2.1 有限差分格式的截断误差	19
2.2 有限差分格式的相容性	22
2.3 有限差分格式的收敛性	23
2.4 有限差分格式的稳定性	25
2.5 Lax 等价定理	27
3 研究有限差分格式稳定性的 Fourier 方法	28
3.1 Fourier 方法	28
3.2 判别准则	31
3.3 例子	34
4 研究有限差分格式稳定性的其他方法	37
4.1 Hirt 启示性方法	37
4.2 直接方法	38

4.3 能量不等式方法	42
习题	43
第3章 双曲型方程的有限差分方法	45
1 一阶线性常系数双曲型方程	45
1.1 迎风格式	45
1.2 Lax-Friedrichs 格式	46
1.3 Lax-Wendroff 格式	48
1.4 Courant-Friedrichs-Lewy 条件	49
1.5 利用偏微分方程的特征线来构造有限差分格式	50
1.6 蛙跳格式	52
1.7 数值例子	53
2 一阶线性常系数方程组	54
2.1 Lax-Friedrichs 格式	54
2.2 Lax-Wendroff 格式	55
2.3 迎风格式	55
3 变系数方程及方程组	56
3.1 变系数方程	56
3.2 变系数方程组	59
4 二阶双曲型方程	60
4.1 波动方程的初值问题	60
4.2 波动方程的显式格式	61
4.3 波动的方程差分格式的 C. F. L 条件	63
4.4 等价方程组的差分格式	65
5 双曲型方程及方程组的初边值问题	65
5.1 二阶双曲型方程的边界处理	66
5.2 一阶双曲型方程及方程组的边界条件	68
5.3 一阶双曲型方程及方程组的数值边界处理	69
6 二维问题	73
6.1 一阶双曲型方程	73
6.2 一阶双曲型方程组	76
6.3 隐式格式和 ADI 格式	77
7 非线性方程	80
7.1 守恒律的初值问题	80
7.2 Lax-Friedrichs 差分格式	83
7.3 守恒型差分格式	84

习题	86
第 4 章 抛物型方程的有限差分方法	89
1 常系数扩散方程	89
1.1 向前差分格式, 向后差分格式	89
1.2 加权隐式格式	90
1.3 三层显式格式	91
1.4 三层隐式格式	94
1.5 跳点格式	95
2 初边值问题	97
2.1 第一类边界条件	97
2.2 第三类边界条件	97
2.3 数值例子	98
2.4 关于稳定性分析的附注	101
2.5 Saul'ev 算法	101
2.6 分组显式方法	103
3 对流扩散方程	103
3.1 中心显式格式	104
3.2 修正中心显式格式	105
3.3 迎风差分格式	106
3.4 Samarskii 格式	107
3.5 指数型差分格式	109
3.6 隐式格式	111
3.7 特征差分格式	112
4 变系数方程	114
4.1 Taylor 级数展开方法	114
4.2 Keller 盒式格式	115
4.3 有限体积法	116
4.4 间断系数问题	118
4.5 隐式方程的解法	119
5 多维问题	120
5.1 一维格式的直接推广	121
5.2 交替方向隐式格式	122
5.3 局部一维格式	124
5.4 预测-校正格式	125
5.5 跳点格式	126

5.6	三维问题	127
6	非线性方程	129
6.1	Richtmyer 线性化方法	130
6.2	拟线性扩散方程的隐式格式	131
6.3	三层格式	133
6.4	预估-校正方法	134
	习题	136
第 5 章	椭圆型方程的差分方法	138
1	Poisson 方程	138
1.1	五点差分格式	138
1.2	九点差分格式	140
1.3	极坐标下的差分格式	141
2	差分格式的性质	143
2.1	存在惟一性问题	143
2.2	差分方程解的收敛性	144
3	边界条件的处理	146
3.1	矩形区域	146
3.2	一般区域	147
4	变系数方程	149
4.1	直接差分方法	150
4.2	有限体积法	150
5	双调和方程	151
6	特征值问题	152
	习题	153
第 6 章	数学物理方程的变分原理	155
1	变分问题介绍	155
1.1	古典变分问题	155
1.2	变分问题解的必要条件	157
1.3	\mathbb{R}^n 中的变分问题	160
2	一维数学物理问题的变分问题	162
2.1	两点边值问题的变分形式	163
2.2	非齐次约束边界条件的处理	166
2.3	第二、三类边界条件	167
3	高维数学物理问题的变分问题	167

3.1	第一类边值问题的变分问题	168
3.2	其他边值问题	170
3.3	间断系数问题——有内边界的情形	171
3.4	重调和方程边值问题的变分问题	173
4	变分问题的近似计算	174
4.1	Ritz 方法	174
4.2	Galerkin 方法	176
4.3	古典变分方法的数值例子	176
5	权余量方法及其他方法	178
	习题	181
第 7 章	有限元离散方法	185
1	一维问题的有限元方法、线性元	185
1.1	单元剖分及试探函数空间的构造	186
1.2	有限元方程的形成	187
1.3	数值例子	193
2	二维问题、三角形线性元	195
2.1	单元剖分及试探函数空间的构造	196
2.2	有限元方程的形成	200
2.3	例子	207
3	高次插值	211
3.1	一维问题的高次插值	211
3.1.1	Lagrange 插值	211
3.1.2	Hermite 插值	214
3.2	二维问题三角形元的高次插值	216
3.2.1	线性插值和面积坐标	217
3.2.2	二次插值	219
3.2.3	三次插值	220
3.3	二维问题的矩形元	221
3.3.1	双线性插值	221
3.3.2	双二次插值	222
3.3.3	Hermite 插值	223
3.4	等参数单元	223
3.4.1	任意四边形单元	224
3.4.2	等参数单元的概念和例	226
	习题	227

第 8 章 其他一些课题	230
1 基于变分原理的差分格式	230
1.1 一维问题	230
1.2 二维问题	233
2 抛物型方程的有限元方法	236
3 一些非线性问题	239
3.1 非线性问题的一个例子	239
3.2 变分不等方程简介	241
3.2.1 \mathbb{R}^n 中光滑函数的最小问题	241
3.2.2 障碍问题	242
3.2.3 水坝的渗流问题	243
4 特征值问题的变分形式及有限元方法	245
4.1 特征值问题	245
4.2 特征值问题的 Galerkin 变分形式	248
4.3 特征值问题的极小形式	248
4.4 特征值问题的有限元方法	250
4.5 例子	253
5 边界元方法	255
5.1 基本的边界积分关系式	256
5.2 边界元近似	258
5.3 数值例子	261
6 多重网格方法	264
6.1 模型问题, 迭代法的分析	264
6.1.1 一维和二维的模型例子	264
6.1.2 网格方程迭代法的分析	265
6.1.3 两层网格方程组的联系	268
6.2 二重网格方法	269
6.2.1 粗、细网上函数值的转移	269
6.2.2 二重网格上的一个循环	270
6.3 多重网格方法	271
6.3.1 多重网格的一个 V 循环	271
6.3.2 完全的多重网格方法	272
习题	273
索引	275
参考文献	278

第 1 章 引论、准备知识

1 引 论

在科学和技术的发展过程中,科学的理论和科学的实验一直是两种重要的科学方法和手段.虽然这两种科学方法都有十分重要的作用,但是一些研究对象往往由于它们的特殊性(例如太大或者太小,太快或者太慢等)不能精确地用理论描述或者用实验手段来实现.自从计算机出现和发展以来,情况就大大不同了,人们可以用计算机计算那些过去根本不能求解的科学技术问题,模拟那些不容易观察到的现象,得到实际应用所需要的数值结果,揭示各种现象的规律和基本性质.所以,现在普遍认为科学计算已经和两种传统的科学方法——理论和实验相并列,成为第三种科学方法.

科学计算在各门自然科学(物理学、气象学、地质学和生命科学等)和技术科学与工程科学(核技术、石油勘探、航空与航天和大型土木工程等)中起着越来越大的作用,在很多重要领域中成为不可缺少的工具.而科学与工程计算中最重要的内容就是求解在科学研究和工程技术中出现的各种各样的偏微分方程或方程组.

例如,核武器的研制要有理论设计和核试验.但核反应和核爆炸的过程是在高温高压的条件下进行的,而且巨大的能量在极短的时间内释放出来,核装置内部的细致反应过程及各个物理量的变化是根本不能用仪器测量出来的,核试验只是提供综合的数据.而描述核反应和爆炸物理过程的数学模型是一个很复杂的非线性偏微分方程组,也根本没有办法得到这个方程组理论上的精确解.所以发展核武器的国家都在计算机上对核反应过程进行数值模拟,这也称为“数值核试验”,它可以大大减少核试验的次数,节约大量的经费,缩短研制的周期.历史上各时期各国最先进的计算机总是装备在核研究部门,我国也不例外,有资料表明,从开始研制直至达到与美、苏基本相抗衡的水平时,我国当时只进行了 338 次核试验,而美、苏则分别进行了 936 次和 716 次,这是我国研制人员更多地利用数值模拟手段所取得的成果.^[1]

过去,在飞行器的设计过程中要做大量的风洞实验.实验设备的建设费用和每次实验的花费是十分昂贵的.但是人们现在可以在计算机上进行数值模拟,也就是数值求解有关空气动力学的偏微分方程组.20 世纪 90 年代初期,某公司研制出当时运算速度最快的计算机就称为“数值风洞”,用于航天飞机返回时的计算.进行这类数值实验有周期短、费用低及容易改变参数进行重复计算的特点.有资料说明,数值模拟已经使新型号飞机设计过程减少了三分之一以上的风洞实验.

科学计算在战争决策上应用的一个例子常常被人称道. 那是海湾战争期间, 某大国决策者要介入战争, 但又担心一旦该地区的数百口油井被人点燃, 是否会引起一场巨大的灾难, 使全球气候剧烈变化, 造成生态系统和经济系统的巨大损失. 科学家们设计了一个和 Navier-Stokes 方程组有关的计算模型, 用计算机进行了一系列的模拟试验, 得出的结论认为灾难是局部性的, 不会对全球产生严重后果, 这促使决策者下决心介入战争, 到后来油井果然被点燃, 事实也证明了的确没有造成全球性的灾难.

还可以举出如数值天气预报、大型水坝应力分析等许多例子, 说明数值求解偏微分方程在各门科学和工程中的应用. 解偏微分方程已经成为科学与工程计算的核心内容, 包括一些大型的计算和很多已经成为常规的计算. 为什么它在当代能发挥这样大的作用呢? 第一是计算机本身有了很大的发展; 第二是数值求解方程的计算方法也有了很大的发展, 这两者对人们计算能力的发展都是十分重要的. 科学家指出, 人类的计算能力正比于计算工具的效率与计算方法效率的乘积. 举例说, 从 20 世纪 50 年代初期(计算机刚出现不久)到 90 年代中期, 计算机的运算速度大约提高了一亿倍(从每秒几千次到几千亿次), 而在同一个时期, 求解科学与工程中大量出现的椭圆型偏微分方程的算法的速度却提高了一万亿倍, 从这里可以看到有效的数值计算方法的重要意义.

2 关于偏微分方程的一些基本概念

2.1 几个典型方程

含有未知函数 $u(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ 的偏导数的方程称为偏微分方程. 这里 u 是 $n+1$ 个自变量的函数. 在很多应用问题中, 专门用 t 表示时间变量, x_1, x_2, \dots, x_n 表示空间变量. 记 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, 当 $n=2, 3$ 时, 也常记 $\mathbf{x} = (x, y)$ 和 $\mathbf{x} = (x, y, z)$. 下面举几个常见的偏微分方程的例子, 其中遇到方程和未知函数不止一个时, 出现的是偏微分方程组, 用到的 Laplace 算子是

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

记

$$\nabla = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + \mathbf{e}_n \frac{\partial}{\partial x_n},$$

其中 $\mathbf{e}_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是 \mathbb{R}^n 中坐标轴上正向的单位向量, 我们有 $\Delta = \nabla \cdot \nabla$.

例 2.1 (Laplace 方程)

$$\Delta u = 0,$$

其中 $u = u(\mathbf{x})$ 称为调和函数. 在力学、电学常常遇到的势函数满足这个方程.

例 2.2 (Cauchy-Riemann 方程组) 在 $n=2$ 时, 对于调和函数 $u(x, y)$, 存在共轭调和

函数 $v(x, y)$, 它们满足方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

方程组的解 (u, v) 给出了一个复自变量 $z = x + iy$ 的解析函数

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

$(u(x, y), -v(x, y))$ 可以解释为流体力学中一个无旋不可压缩流的速度场.

例 2.3 (Poisson 方程)

$$-\Delta u = f(\mathbf{x}),$$

其中 $u = u(\mathbf{x})$, 而 $f(\mathbf{x})$ 是给定的函数. 这类方程的更一般形式是

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(k_1(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k_2(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} \left(k_n(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) \right] = F(\mathbf{x}),$$

其中 $k_i(\mathbf{x}) > 0$. 如果 $k_1(\mathbf{x}) = \cdots = k_n(\mathbf{x}) = k(\mathbf{x})$, 也可写成

$$-\nabla \cdot (k(\mathbf{x}) \nabla u) = F(\mathbf{x}),$$

当 $k(\mathbf{x})$ 为常数时, 就化为 Poisson 方程.

例 2.4 (波动方程)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + F(\mathbf{x}, t),$$

其中 $u = u(\mathbf{x}, t)$, 而 $F(\mathbf{x}, t)$ 给定. 在一些声学、光学和力学的波动问题中常常出现这类方程. 当 $n=2$ 时, 可以解释为膜的振动方程, 满足方程的 $u(x, y, t)$ 是位移函数. 当 $n=1$ 时, 方程可看成弦振动方程, 即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t),$$

或者是声波一维传播方程, 其中 $u = u(x, t)$.

例 2.5 (扩散方程、传热方程)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(k_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} \left(k_n \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) + F(\mathbf{x}, t),$$

其中, $u = u(\mathbf{x}, t)$ 是扩散过程中某种物质的浓度, 或是固体的传热过程中在 \mathbf{x} 处、 t 时刻的温度. 系数 $k_i = k_i(\mathbf{x}) > 0$ ($i=1, \cdots, n$) 称为扩散系数或热传导系数, 当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = a$ ($a > 0$) 时, 方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \Delta u + F(\mathbf{x}, t).$$

$n=1$ 时得到一维扩散(传热)方程, $u = u(x, t)$ 满足

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t).$$

在例 2.4 或例 2.5 中, 如果 $F=F(x)$, u 与时间 t 无关, 则方程化为例 2.3 方程的形式. 与时间无关的情形称为定常情形.

方程中出现的偏导数的最高阶, 称为方程的阶. 以上例 2.2 是一阶方程组, 其他的几个例子都是二阶的.

例 2.6(对流扩散方程) 在 $n=2$ 的情形,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = k\Delta u + F$$

为平面上的对流扩散方程, 其中 $u=u(x, y, t)$ 表示流场中某种物质的浓度. $a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y}$ 称对流项, 其中 (a, b) 是流速. $k\Delta u$ 为扩散项, k 是扩散系数, $k>0$.

例 2.7(对流方程) 如果例 2.6 中没有扩散项($k=0$), 方程为对流方程. $n=1$ 的对流方程是

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = F,$$

其中 $u=u(x, t)$, $F=F(x, t)$.

例 2.8(重调和方程)

$$\Delta^2 u = 0,$$

其中 $u=u(x)$. 在 $n=2$ 时, $u=u(x, y)$, 且

$$\Delta^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

重调和方程在流体力学和弹性力学中都有重要的应用, 它是一个 4 阶的方程, 也称双调和方程.

以上的例子中, 方程对未知函数 u, v 及其各阶导数都是线性的. 对于实际的问题, 更多的是非线性的方程, 下面再给出例子.

例 2.9(二维定常、绝热、无旋及等熵流) 速度势 $\phi=\phi(x, y)$ 满足方程

$$(1 - c^{-2} \phi_x^2) \phi_{xx} - 2c^{-2} \phi_x \phi_y \phi_{xy} + (1 - c^{-2} \phi_y^2) \phi_{yy} = 0,$$

其中 (ϕ_x, ϕ_y) 是速度向量, 其模 $q = \sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}$, c 是 q 的函数. 例如, 对某种满足状态方程

$$p = A \rho^\gamma$$

的气体, 有

$$c^2 = 1 - \frac{\gamma-1}{2} q^2,$$

其中 ρ 是密度, p 是压力.

例 2.10(Navier-Stokes 方程组) 描述三维不可压缩流动的方程组