高中数学
奥林匹克实用教程 第二册

（修订版）

田云江　编著

河北大学出版社

高中数学
奥林匹克实用教程 第二册

（修订版）

田云江 编著

河北大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学奥林匹克实用教程. 第2册 / 田云江编著. --保定：河北大学出版社, 2012.8（2015.1重印）

ISBN 978-7-5666-0153-7

Ⅰ.①高… Ⅱ.①田… Ⅲ.①中学数学课－高中－教学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第152099号

责任编辑：胡素杰
封面设计：王占梅
责任印制：蔡进建

出版发行：河北大学出版社
地　　址：河北省保定市五四东路180号
邮　　编：071002
印　　刷：保定市北方胶印有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：1/16(787mm × 1092mm)
印　　张：18.5
字　　数：374千字
版　　次：2012年8月第1版
印　　次：2015年1月第2次
书　　号：ISBN 978-7-5666-0153-7
定　　价：38.00元

写给读者的话

高中数学竞赛在我国是较早开展的一项学科竞赛活动，多年来，它犹如“强力磁铁”一般吸引着无数青少年数学爱好者和广大数学教育工作者，但凡“身临其境”者，无不被它丰富的内容、精美的试题、美妙的方法和创造性的解题思想所折服。特别是，在全社会呼唤开拓型、创新型人才的今天，课程改革、创新教育、研究性学习、自主发展、个性张扬争相斗妍，而高中数学竞赛活动“天然”的、“独特”的内涵优势，无疑是推动这百花绽放的一支不可或缺的重要力量。

但不可否认，与多年来开展高中数学竞赛活动的累累硕果相伴，也有一些问题亟待探讨如何能更好地解决：如怎样合理安排高中数学的日常学习和竞赛学习？选择哪些作为高中数学竞赛辅导的必修内容？如何才能更好地发挥竞赛学习在培养青少年数学素养、数学能力和创新意识等方面的作用？等等。

本书作者是在高中数学教学一线工作三十多年的特级教师，对高中数学竞赛辅导工作有着长时间的思考、探索和实践，积累了较为丰富的经验，对高中数学竞赛辅导工作中的困惑有着切身的体会和感受，作为探讨解决上述问题的一种尝试，作者把自己多年用于高中数学竞赛辅导的讲义进行了归纳整理，又融入了近年来对高中数学竞赛辅导的一些研究和心得，并借鉴了国内外许多名家的真知灼见，编写成此书，力图使其体现以下特点：

（1）新：本书是根据最新的《数学竞赛大纲》及近几年高校自主招生考试要求编写的；所选例习题尽量注明出处，且多为历年来国内外优秀的竞赛试题、高校自主招生试题和高考试题，既便于学生查对，又利于学生激发学习兴趣、正确把握竞赛方向、了解最新的竞赛信息。

（2）基础性强：竞赛学习必须以扎实掌握日常学习内容为基础。本书把突出高中数学竞赛中的基础知识、基本方法、基本技巧和重要数学思想作为基点，着力在挖掘学生的数学潜能，培养学生的数学素养和数学能力，尤其是探究能力上。

（3）系统性强：全套书分四册，涵盖了高中数学联赛和高校自主招生的主要内容，并对许多知识点作了适当的探究和拓展。

（4）实用性强：基于高中数学教学的实际情况和高中数学竞赛的学习特点来选编内容、整合内容是本书的主旨，它使本书更具生命力、更具针对性和实用性。

书中各节一般分为：知识精讲、应用举例、方法提炼、巩固练习四部分（若某节为专题讲座，则会有所变动）：

①知识精讲：梳理本节必备的知识点，重点是需要补充、提高的内容，对其中没

有给予证明的结论，其证明过程希望读者完成或查阅有关资料。

②应用举例：所选例题或属于知识应用，或属于典型问题，或涉及重要的解题思路和方法。很多例题配有分析、评注（如题目背景、注意事项、易错点等）、引申和链接（链接相近的典型问题、赛题、名题、名家佚事等）等。

每节选编的例题较多，有的一题多解，有的多题归类，相近问题相对集中，便于读者在比较中体会，在体会中提高。

③方法提炼：通过对典型例题的解析、归纳，提炼本节内容常涉及的典型方法、解题策略和注意事项，升华学生的学习质量，提高学生的学习能力。

④巩固练习：所选习题或用于巩固所学知识，或补充例题未涉及的题型和方法。

另外，每章配有一套自测题，供学生查缺补漏，自测学习效果。

(5) 选择空间大：不论是每节内的例习题，还是某些章节，均可视实际情况选用。选择的标准重在“质”和效果，而不在“量”。本书内容丰富，各章节独立性强，可满足不同层次的需求。

本书共四册，第一册的第一、二章可用于高中数学竞赛学习的起始阶段，第一册的第三、四章及第二册全册是对高考相应内容的巩固、补充和提高，可在课堂学习相应内容后再安排学习，第三、四册内容可顺次安排也可视情况穿插安排。

本书侧重于备考全国高中数学联赛和高校自主招生考试，同时兼顾高考，主要面向普通高中学有余力的学生，也可供中学数学教师和数学爱好者参考。

限于作者水平，书中可能有不少错误和不当之处，敬请读者不吝赐教、批评指正。

编　者

2015年1月

目　　录

第一章 数 列

1.1 等差数列

问题解析

例 1 (1998 年全国高中数学联赛试题) 各项为实数的等差数列的公差为 4,其首项的平方与其余各项之和不超过 100,这样的数列最多有______项.

解:设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是公差为 4 的等差数列,则 $a_n=a_1+4(n-1)$,由已知:

$$a_1^2+a_2+\cdots+a_n\leqslant 100\Leftrightarrow a_1^2+\frac{(a_1+4+a_n)(n-1)}{2}\leqslant 100$$

$$\Leftrightarrow a_1^2+(n-1)a_1+(2n^2-2n-100)\leqslant 0.$$

此关于 a_1 为未知数的一元二次不等式有解,应有 $\triangle=(n-1)^2-4(2n^2-2n-100)\geqslant 0$,有 $7n^2-6n-401\leqslant 0$,得 $\frac{3-\sqrt{2816}}{7}\leqslant n\leqslant\frac{3+\sqrt{2816}}{7}<9$.

又 $\frac{3+\sqrt{2816}}{7}>8$,$\therefore n\leqslant 8$.

又存在 8 项的等差数列:$-4,0,4,8,12,16,20,24$ 满足题设条件,故项数的最大值为 8.

注:不等式 $7n^2-6n-401\leqslant 0$ 的另解:化为 $n(7n-6)\leqslant 401$. 左边是 n 的增函数(n 是自然数),而且 $n=8$ 时不等式成立,$n=9$ 时不等式不成立,$\therefore n\leqslant 8$.

估计是数学竞赛中常用的方法.

例 2 (1997 年全国高中数学联赛试题) 设等差数列的首项及公差均为非负整数,项数不少于 3,且各项的和为 97^2,则这样的数列共有( )

A. 2 个 B. 3 个 C. 4 个 D. 5 个

解:设等差数列首项为 a,公差为 d,则依题意有 $na+\frac{n(n-1)}{2}d=97^2$,

即 $[2a+(n-1)d]n=2\times 97^2$. $\quad(*)$

因为 n 是不小于 3 的自然数,97 为素数,故数 n 的值必为 2×97^2 的约数(因数),它只能是 $97,2\times 97,97^2,2\times 97^2$ 四者之一.

若 $d>0$,则 $d\geqslant 1$,由($*$)式知 $2\times 97^2\geqslant n(n-1)d\geqslant n(n-1)$,故只可能有 $n=97$,

($*$)式化为:$a+48d=97$,这时($*$)有两组解:$\begin{cases}n=97,\\d=1,\\a=49,\end{cases}$ $\begin{cases}n=97,\\d=2,\\a=1.\end{cases}$

若 $d=0$,则(∗)式化为:$na=97^2$,这时(∗)也有两组解:$\begin{cases}n=97,\\d=0,\\a=97,\end{cases}$ $\begin{cases}n=97^2,\\d=0,\\a=1,\end{cases}$ 故符合题设条件的等差数列共 4 个,分别为:

49,50,51,…,145.　　(共 97 项)

1,3,5,…,193.　　(共 97 项)

97,97,97,…,97.　　(共 97 项)

1,1,1,…,1.　　(共 $97^2=9409$ 项)

故选(C).

例 3　(1999 年全国高中数学联赛试题)给定正整数 n 和正数 M,对于满足条件 $a_1^2+a_{n+1}^2\leqslant M$ 的所有等差数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots$,试求 $S=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n+1}$ 的最大值.

解:$S=\dfrac{a_{n+1}+a_{n+1}+nd}{2}(n+1)=\dfrac{n+1}{2}(3a_{n+1}-a_1)$.

$\because a_1^2+a_{n+1}^2\leqslant M$,

$\therefore (3a_{n+1}-a_1)^2+(3a_1+a_{n+1})^2=10(a_1^2+a_{n+1}^2)\leqslant 10M$,

$\therefore S\leqslant\dfrac{n+1}{2}\sqrt{10M}$.

即 S 的最大值为$\dfrac{n+1}{2}\sqrt{10M}$,在 $a_1=-\sqrt{\dfrac{M}{10}}$,$a_{n+1}=3\sqrt{\dfrac{M}{10}}$ 时,S 取最大值.

注:在 $x^2+y^2\leqslant M$ 时,要求 $cx+dy$(c,d 为常数)的最值,可利用恒等式 $(cx+dy)^2+(dx-cy)^2=(c^2+d^2)(x^2+y^2)$.

另法:利用柯西不等式 $(3a_{n+1}-a_1)^2\leqslant[3^2+(-1)^2]\cdot(a_{n+1}^2+a_1^2)$.

例 4　有 4 个正整数成等差数列,公差为 $2d$,其中 d 是 1 与 10 之间的一质数,这 4 个数的平方和刚好为一偶数的平方,求这 4 个数.

解:设这 4 个数为 $a-3d,a-d,a+d,a+3d$.

于是存在 $m\in\mathbf{N}_+$,使得 $(a-3d)^2+(a-d)^2+(a+d)^2+(a+3d)^2=(2m)^2$,

化简即得 $a^2+5d^2=m^2$,即 $5d^2=(m-a)(m+a)$.

若 $d=2$,则 $a>3d=6$,$m^2=a^2+20$.

另一方面,若 $a\geqslant 10$,则 $a^2<a^2+20<(a+1)^2$,此时 m 不为整数,所以 $6<a\leqslant 9$,当 $a=7,8,9$ 时,$m^2=69,84,101$,m 也不是整数.

同样讨论 $d=3,5,7$ 的情形,可得 $d=3$ 时,$a=22$;$d=5$ 时,$a=62$;$d=7$ 时,$a=22$ 或 122. 故所求的四个数是 13,19,25,31;47,57,67,77;101,115,129,143;1,15,29,43 共 4 组解.

例 5　设数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$满足:$b_n=a_n-a_{n+2}$,$c_n=a_n+2a_{n+1}+3a_{n+2}$($n=1,2,3,\cdots$),证明:$\{a_n\}$为等差数列的充分必要条件是$\{c_n\}$为等差数列且 $b_n\leqslant b_{n+1}$($n=1,2,3,\cdots$). (2006 年江苏高考数学试题)

证明:必要性. 设$\{a_n\}$是公差为 d_1 的等差数列,则

$b_{n+1}-b_n=(a_{n+1}-a_{n+3})-(a_n-a_{n+2})=(a_{n+1}-a_n)-(a_{n+3}-a_{n+2})=d_1-d_1=0$,

$\therefore b_n\leqslant b_{n+1}(n=1,2,3,\cdots)$ 成立.

又 $c_{n+1}-c_n=(a_{n+1}-a_n)+2(a_{n+2}-a_{n+1})+3(a_{n+3}-a_{n+2})=d_1+2d_1+3d_1=6d_1$(常数)$(n=1,2,3,\cdots)$,

$\therefore$ 数列$\{c_n\}$为等差数列.

充分性. 设数列$\{c_n\}$是公差为 d_2 的等差数列,且 $b_n\leqslant b_{n+1}(n=1,2,3,\cdots)$.

证法一:$\because c_n=a_n+2a_{n+1}+3a_{n+2}$, ①

$\therefore c_{n+2}=a_{n+2}+2a_{n+3}+3a_{n+4}$. ②

①－②得 $c_n-c_{n+2}=(a_n-a_{n+2})+2(a_{n+1}-a_{n+3})+3(a_{n+2}-a_{n+4})=b_n+2b_{n+1}+3b_{n+2}$.

$\because c_n-c_{n+2}=(c_n-c_{n+1})+(c_{n+1}-c_{n+2})=-2d_2$,

$\therefore b_n+2b_{n+1}+3b_{n+2}=-2d_2$. ③

从而有 $b_{n+1}+2b_{n+2}+3b_{n+3}=-2d_2$. ④

④－③得$(b_{n+1}-b_n)+2(b_{n+2}-b_{n+1})+3(b_{n+3}-b_{n+2})=0$. ⑤

$\because b_{n+1}-b_n\geqslant 0,b_{n+2}-b_{n+1}\geqslant 0,b_{n+3}-b_{n+2}\geqslant 0$,

$\therefore$ 由⑤得 $b_{n+1}-b_n=0(n=1,2,3,\cdots)$.

由此不妨设 $b_n=d_3(n=1,2,3,\cdots)$,则 $a_n-a_{n+2}=d_3$(常数).

由此 $c_n=a_n+2a_{n+1}+3a_{n+2}=4a_n+2a_{n+1}-3d_3$,

从而 $c_{n+1}=4a_{n+1}+2a_{n+2}-3d_3=4a_{n+1}+2a_n-5d_3$.

两式相减得 $c_{n+1}-c_n=2(a_{n+1}-a_n)-2d_3$,

因此 $a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{2}(c_{n+1}-c_n)+d_3=\dfrac{1}{2}d_2+d_3$(常数)$(n=1,2,3,\cdots)$,

$\therefore$ 数列$\{a_n\}$是等差数列.

证法二:令 $A_n=a_{n+1}-a_n$,由 $b_n\leqslant b_{n+1}$ 知 $a_n-a_{n+2}\leqslant a_{n+1}-a_{n+3}$,

从而 $a_{n+1}-a_n\geqslant a_{n+3}-a_{n+2}$,即 $A_n\geqslant A_{n+2}(n=1,2,3,\cdots)$.

由 $c_n=a_n+2a_{n+1}+3a_{n+2},c_{n+1}=a_{n+1}+2a_{n+2}+3a_{n+3}$,

得 $c_{n+1}-c_n=(a_{n+1}-a_n)+2(a_{n+2}-a_{n+1})+3(a_{n+3}-a_{n+2})$,

即 $A_n+2A_{n+1}+3A_{n+2}=d_2$. ⑥

由此得 $A_{n+2}+2A_{n+3}+3A_{n+4}=d_2$. ⑦

⑥－⑦得$(A_n-A_{n+2})+2(A_{n+1}-A_{n+3})+3(A_{n+2}-A_{n+4})=0$. ⑧

$\because A_n-A_{n+2}\geqslant 0,A_{n+1}-A_{n+3}\geqslant 0,A_{n+2}-A_{n+4}\geqslant 0$,

$\therefore$ 由⑧得 $A_n-A_{n+2}=0(n=1,2,3,\cdots)$.

于是由⑥得 $4A_n+2A_{n+1}=A_n+2A_{n+1}+3A_{n+2}=d_2$, ⑨

从而 $2A_n+4A_{n+1}=4A_{n+1}+2A_{n+2}=A_{n+1}+2A_{n+2}+3A_{n+3}=d_2$. ⑩

由⑨和⑩得 $4A_n+2A_{n+1}=2A_n+4A_{n+1}$,

故 $A_{n+1}=A_n$,即 $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n(n=1,2,3,\cdots)$,

$\therefore$ 数列$\{a_n\}$是等差数列.

例 6　(第二届(1987 年)中国数学奥林匹克试题)如图,把边长为 1 的正$\triangle ABC$的各边都 n 等分,过各边分点作平行于其它两边的直线,将正$\triangle ABC$分成小正三角形,各个

小正三角形的顶点都称为"结点",在每一结点上都放置了一个实数.

已知(ⅰ)A、B、C三点上放置的实数分别为a、b、c;

(ⅱ)在每个由有公共边的两个小正三角形组成的小菱形中,两组相对顶点上数的和相等.

试求:(1)放置最大数与最小数的两个点间的最短距离;

(2)所有结点上数的总和S.

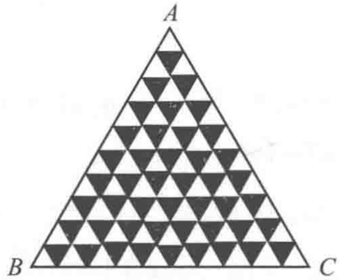

图1

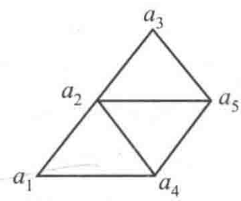

图2

解:(1)考察如图2所示的三个小三角形组成的图形(图中有两个菱形),在各顶点上放置的数分别为a_1,a_2,a_3,a_4,a_5.

依题意有$a_1+a_5=a_2+a_4$,$a_2+a_5=a_3+a_4$,相减得$a_2-a_1=a_3-a_2$,此式说明一条直线上放置的数依次序成等差数列.考虑到等差数列的通项公式是关于n的一次函数(或常值函数),具有单调性(常值函数非严格单调),从而最大数、最小数必在每条线的两端.又考虑到AB上放置的数、AC上放置的数、BC上放置的数也成等差数列,于是,最大数、最小数必在A、B、C三点处.

记放置最大数与最小数的两个点的最短距离为$d_{\min}$.

若$a>b>c$,则$d_{\min}=1$;

若$a=b=c$,则各结点上的数均相等,$d_{\min}=0$;

若$a>b=c$,则$d_{\min}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{2}, & n\text{ 为偶数},\\ \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2n}\right)^2}, & n\text{ 为奇数}.\end{cases}$

(2)将$\triangle ABC$旋转分别得到$\triangle BCA$、$\triangle CAB$,然后将三个正三角形叠放在一起,则点A上放置的三数和为$a+b+c$.同理,点B上放置的三数和与点C上放置的三数和也均为$a+b+c$.于是,每个结点上放置的三数和均为$a+b+c$.

所以,$3S=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}(a+b+c)$,$S=\dfrac{(n+1)(n+2)}{6}(a+b+c)$.

注:此题(2)的解法中,利用了结论——三个等差数列对应项相加构成的数列仍为等差数列(即三个一次函数或常值函数相加仍为一次函数或常值函数).

巩固练习

1. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_4+a_6+a_8+a_{10}+a_{12}=120$，则$2a_9-a_{10}=$

A. 20　　B. 22　　C. 24　　D. 28

2. 设S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项之和，$S_9=18$，$a_{n-4}=30(n>9)$，$S_n=336$，则n为

A. 16　　B. 21　　C. 9　　D. 8

3. 设S_n为已知数列$\{a_n\}$的前n项和，且$S_n=npa_n$，p为常数，若$a_1\neq a_2$，则下列结论正确的是

A. $p=1$　　B. $S_n>a_n$

C. $\{a_n\}$是等差数列　　D. $\{a_n\}$是递增数列

4. 设$x\neq y$，且两数列x,a_1,a_2,a_3,y和b_1,x,b_2,b_3,y,b_4均为等差数列，那么$\dfrac{b_4-b_3}{a_2-a_1}$ $=$ ______.(1988年全国高中数学联赛试题)

5. 已知正整数n不超过2000，并且能表示成不少于60个连续正整数之和，那么这样的n的个数是多少?(1999年全国高中数学联赛试题)

6. 设数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=2a_{n-1}(n=1,2,\cdots)$，数列$\{b_n\}$满足$b_1=3$，$b_{k+1}=a_k+b_k$ $(k=1,2,\cdots)$，求数列$\{b_n\}$的前n项和.(1996年全国高中数学联赛试题)

7. 10个人围圆桌而坐.现把10斤糖按下述规则分给他们，每个人所得是他的两个邻座所得之和的一半.试证明:这样的分糖方式是唯一的.

8. $n^2(n\geqslant 4)$个正数排成n行n列:

$$\begin{array}{cccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\
 & & \cdots & \cdots & & \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn}
\end{array}$$

其中每一行的数成等差数列，每一列的数成等比数列，并且所有公比相等，已知$a_{24}=1$，$a_{42}=\dfrac{1}{8}$，$a_{43}=\dfrac{3}{16}$，试求$a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$的值.

(1990年全国高中数学联赛试题)

1.2 等比数列

问题解析

例 1 等比数列$\{a_n\}$首项$a_1=1536$,公比$q=-\frac{1}{2}$.用π_n表示它的前n项之积,则$\pi_n(n\in\mathbf{N}*)$最大是______.(1996 年全国高中数学联赛试题)

A. π_9 B. π_{11} C. π_{12} D. π_{13}

分析:先求出π_n的表达式,再讨论该式的最大值问题.

解:(方法一)等比数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=1536\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,

前n项和$\pi_n=1536^n\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}=3^n\cdot 2^{9n}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$,

因为$\pi_{11}=3^{11}\cdot 2^{99}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{55}<0$,

$\pi_9=3^9\cdot 2^{81}\cdot 2^{-36}=3^9\cdot 2^{45}$,$\pi_{12}=3^{12}\cdot 2^{108}\cdot 2^{-66}=3^{12}\cdot 2^{42}>\pi_9$,

$\pi_{13}=3^{13}\cdot 2^{117}\cdot 2^{-78}=3^{13}\cdot 2^{39}<\pi_{12}$.

故π_{12}最大.选(C)

(方法二)由已知$a_n=1536\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-10}$,

得$\pi_n=(-3)^n\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n-19)}{2}}$,知$\pi_9,\pi_{12},\pi_{13}$为正数,$\pi_{11}$为负数,且

$\pi_{12}=a_{12}\cdot a_{11}\cdot a_{10}\cdot\pi_9=\left(-\frac{3}{4}\right)\times\frac{3}{2}\times(-3)\pi_9=\frac{27}{8}\pi_9>\pi_9$,

$\pi_{13}=a_{13}\cdot\pi_{12}=\frac{3}{8}\pi_{12}<\pi_{12}$,得$\pi_{12}$最大.

例 2 $\triangle ABC$的边长$a,b,c(a\leqslant b\leqslant c)$同时满足下列三个条件:

(1)a,b,c均为整数;

(2)a,b,c组成等比数列;

(3)a与c中至少有一个等于 100.

求出三元数组(a,b,c)的所有可能的解.

(1999 年上海市高中数学竞赛试题)

解:由题设正整数a,b,c满足$a\leqslant b\leqslant c$,$a+b>c$,$b^2=ac$,且a,c中至少有一个为 100.

(1) 若$a=100$,则$b^2=100c$,故$10\mid b$.

$\because 100+b>c=\frac{b^2}{100}$,$\therefore b^2-100b-100^2<0$

故 $100 \leqslant b < 50(\sqrt{5}+1)$

注意到 $10 \mid b$,故 b 可取 100,110,120,130,140,150,160;相应的 $c = 100,121,144,169,196,225,256$.

(2) 若 $c = 100$,则 $b^2 = 100a$,故 $10 \mid b$.

$\because \dfrac{b^2}{100} + b > 100$,

$\therefore b^2 + 100b - 100^2 > 0$.

故 $50(\sqrt{5}-1) < b \leqslant 100$.

注意到 $10 \mid b$,故 b 可取 70,80,90,100;相应的 $a = 49,64,81,100$.

综上所述,三元数组(a,b,c)共有 10 组可能的解:

(49,70,100),(64,80,100),(81,90,100),(100,100,100),(100,110,121),(100,120,144),(100,130,169),(100,140,196),(100,150,225),(100,160,256).

例 3 数 $1,2,3,\cdots,100$ 能否是 12 个等比数列的项?

(第二十一届全俄数学奥林匹克试题)

解:不能. 首先证明:3 个不同的素数不可能在同一个等比数列中.

假设三个素数 $p_1 < p_2 < p_3$,在以 a_1 为首项、q 为公比的等比数列中,$p_1 = a_1 q^{k-1}$,$p_2 = a_1 q^{i-1}$,$p_3 = a_1 q^{m-1}$,则 $p_2 = p_1 q^s = p_3 q^{-t}$,其中 $s = i-k$,$t = m-i$ 都是正整数.

从而 $p_2^{t+s} = p_1^t p_3^s$. 上式左边被 p_2 整除,而右边不被 p_2 整除,因而不可能成立.

由于 1 至 100 中含有 25 个素数,而根据上面所证,每个等比数列中至多含有两个素数,因此 25 个素数不可以包含于 12 个等比数列中.

故数 $1,2,3,\cdots,100$ 不能是 12 个等比数列的项.

例 4 在公比大于 1 的等比数列中,最多有几项是在 100 和 1000 之间的整数.

(第四届加拿大数学奥林匹克试题)

解:设已知等比数列的公比为 r_0,在 100 和 1000 之间的前两个整数为 a、b,$b = ar_0^m$. 若 r_0 是无理数,因 $r_0^m \in \mathbf{Q}$,则 r_0 一定是$\sqrt[s]{x}\,(x \in \mathbf{Q})$形式. 设 s 是使 $r_0^s \in \mathbf{Q}$ 的最小正整数,因 $r_0^{s+i} \notin \mathbf{Q}(1 \leqslant i < s)$,故下一个有理数一定是 ar_0^{2s},$\cdots$,因此可只考虑等比数列:$(100 \leqslant) a < ar < ar^2 < \cdots < ar^{n-1} (\leqslant 1000)$ 其中 $r > 1$,$r \in \mathbf{Q}$(如令 $r = r_0^m$).

设 r 为既约分数,则 r 的分母一定是 a 的因数,故问题转为考虑各项都是整数的等比数列$(100 \leqslant) a < ar < ar^2 < \cdots < ar^{n-1} (\leqslant 1000)$.

设 $r = \dfrac{p}{q}$,$(p,q) = 1$,$p > q$. 因为 $ar^{n-1} = a\left(\dfrac{p}{q}\right)^{n-1}$ 是整数,所以 q^{n-1} 整除 a.

如果 $q \geqslant 3$,则有 $1000 \geqslant a\left(\dfrac{p}{q}\right)^{n-1} \geqslant a\left(\dfrac{q+1}{q}\right)^{n-1} \geqslant (q+1)^{n-1} \geqslant 4^{n-1}$,而有 $n \leqslant 5$.

如果 $q = 1$,则 $1000 \geqslant a\left(\dfrac{p}{q}\right)^{n-1} \geqslant a\left(\dfrac{q+1}{q}\right)^{n-1} = a \cdot 2^{n-1} \geqslant 100 \cdot 2^{n-1}$,而有 $n \leqslant 4$.

如果 $q = 2$,则 $1000 \geqslant a\left(\dfrac{q+1}{q}\right)^{n-1} = a\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1} \geqslant 100 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$,得 $n \leqslant 6$.

取 $a = 2^7 = 128$,$r = \dfrac{3}{2}$ 为公比,数列的 6 项:128,192,288,432,648,972 在 100 与

1000 之间.

例 5 设 n,k 是正整数,正整数数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{k+1}$ 是等比数列,且 $n^k\leqslant a_i\leqslant(n+1)^k$, $i=1,2,\cdots,k+1$. 求这种数列的全体.

解:设所求数列公比为 q.

若 $q=1$,只需取 a_1,使得 $n^k\leqslant a_1\leqslant(n+1)^k$.

符合此不等式的 a_1 有几个,就有几个符合条件的数列.

若 $q>1$,设 $q=\dfrac{u}{v}$, $u>v>0$, $(u,v)=1$,

这时有 $n^k\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_{k+1}\leqslant(n+1)^k$.

于是 $\left(\dfrac{u}{v}\right)^k=\dfrac{a_{k+1}}{a_1}\leqslant\dfrac{(n+1)^k}{n^k}$, $\therefore\dfrac{u}{v}\leqslant1+\dfrac{1}{n}$.

但 $\dfrac{u}{v}\geqslant\dfrac{v+1}{v}=1+\dfrac{1}{v}$, $\therefore v\geqslant n$.

另一方面, $a_{k+1}=a_1(\dfrac{u}{v})^k$ 是自然数,故 $v^k\mid a_1$. 于是 $v^k\leqslant a_1<(n+1)^k$,因此 $v<n+1$.

综上可得, $v=n$.

$\because 1<\dfrac{u}{v}\leqslant1+\dfrac{1}{n}$, $\therefore u=n+1$,

$\because v^k\mid a_1$, $v^k\leqslant a_1<(n+1)^k$, $q=\dfrac{n+1}{n}$, $\therefore a_1=n^k$.

故此时所求数列是 $n^k,n^{k-1}(n+1),\cdots,(n+1)^k$.

若 $0<q<1$,则倒序排列时公比为 $\dfrac{1}{q}>1$,同上讨论,得此时所求数列为:

$(n+1)^k,(n+1)^{k-1}n,\cdots,n^k$.

例 6 两个无穷正整数数列满足:一个是以 $r(>0)$ 为公差的等差数列,一个是以 $q(>1)$ 为公比的等比数列,这里 r、q 互质. 证明:如果这两个数列中有一项相同,则存在无穷多项相同.

证明:不妨设这两个数列的首项都为 a(否则,将这两个数列的前面若干项都去掉后,再讨论). 依题意,我们只需证明:存在无穷多组正整数 (m,n),使得 $a+mr=aq^n$. 这只要证明:存在无穷多个 $n\in\mathbf{N}^*$,使得 $aq^n\equiv a(\bmod r)$.

下面证明:存在无穷多个 $n\in\mathbf{N}^*$,使得 $q^n\equiv1(\bmod r)$(从而有 $aq^n\equiv a(\bmod r)$,命题获证).

事实上,由于下面的 $r+1$ 个数: $1,q,q^2,\cdots,q^r$ 中必有两个数对模 r 同余,即存在 $0\leqslant i<j\leqslant r$,使得 $q^j\equiv q^i(\bmod r)$,所以,结合 $(q,r)=1$,就有 $q^{j-i}\equiv1(\bmod r)$. 于是记 $n_0=j-i$,则对任意 $k\in\mathbf{N}^*$,令 $n=kn_0$,就有 $q^n\equiv(q^{n_0})^k\equiv1^k\equiv1(\bmod r)$.

所以,命题成立.

例 7 实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n(n\geqslant3)$ 成等差数列,并且存在 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的排列 $a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_n}$ 成等比数列. 求满足上述条件,且两两不同,最大数为 2012 的实数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$.

解:不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_n=2012$,并设 $a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_n}$ 是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的一个排列,并且 $a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_n}$ 是以 q 为公比的等比数列,则 $q\notin\{0,1\}$. 注意到 $a_{i_n},a_{i_{n-1}},\cdots,a_{i_1}$ 是以 $\dfrac{1}{q}$ 为公比的等比数列,故我们不妨设 $|q|>1$,即 $|a_{i_1}|<|a_{i_2}|<\cdots<|a_{i_n}|$.

进一步,若 $q>1$,则 $a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_n}$ 具有相同的符号,从而都为正数(因为 $a_n=2012$),且 $a_{i_1}<a_{i_2}<\cdots<a_{i_n}$,即有 $i_k=k,k=1,2,\cdots,n$;若 $q<-1$,则 $a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_n}$ 正负交错,其中所有的正数依原来的次序形成一个公比为 q^2 的等比数列.

如果 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中至少有三个正数,则由前面的讨论可知 $0<a_{n-2}<a_{n-1}<a_n$,并且 a_{n-2},a_{n-1},a_n 既是等差数列,又是等比数列. 这导致 $a_{n-2}=a_{n-1}=a_n$ 矛盾. 所以 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中至多有两项为正数,进而 $n\leqslant 4$.

当 $n=4$ 时,依前面的讨论可知 $a_1<a_2<0<a_3<a_4$,且 $2a_2=a_1+a_3,2a_3=a_2+a_4$. 由它们构成的公比为 $q<-1$ 的等比数列只能是 a_3,a_2,a_4,a_1,或 a_2,a_3,a_1,a_4,对前一种情形,有 $2a_3q=a_3q^3+a_3$,且 $2a_3=a_3q+a_3q^2$,导致 $q=1$,矛盾;对后一种情形,类似可得矛盾. 故 $n=3$.

当 $n=3$ 时,分 $a_1<0<a_2<a_3$ 和 $a_1<a_2<0<a_3$ 两种情况讨论,可知 $(a_1,a_2,a_3)=(-4024,-1006,2012)$,或 $(-1006,503,2012)$.

这就是所有满足条件 $(a_1<a_2<\cdots<a_n)$ 的数列.

例 8　证明:对任意正整数 $n\geqslant 3$,存在由正整数组成的成等差的数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和成等比的数列 $b_1,b_2,\cdots,b_n$,使得 $b_1<a_1<b_2<a_2<\cdots<b_n<a_n$.

并就 $n=5$ 的情形,给出一组满足条件的具体数.

证明:构造数列 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 为 $k^{n-1},k^{n-2}(k+1),\cdots,k(k+1)^{n-2},(k+1)^{n-1}$,并令 $a_{n-1}=b_n-1,a_{n-2}=b_{n-1}-1,d=a_{n-1}-a_{n-2}=b_n-b_{n-1}$,其中 k 待定.

事实上,设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 与 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 如上定义,则对 $2\leqslant i,j\leqslant n-1$,均有 $b_{i+1}-b_i\leqslant b_n-b_{n-1}=d$,于是 $b_j=b_n+\sum\limits_{i=j}^{n-1}(b_i-b_{i+1})>a_{n-1}-(n-j)d=a_{j-1}$.

如果取适当的 k,使得 $b_1<a_1$,又有 $b_j=b_1+\sum\limits_{i=1}^{j-1}(b_{i+1}-b_i)<a_1+(j-1)d=a_j$,则这时将有 $b_1<a_1<b_2<a_2<\cdots<b_n<a_n$.

下面来证明 k 的存在性,如上定义,可知 $a_1=a_{n-1}-(n-2)d$,其中 $a_{n-1}=(k+1)^{n-1}-1$,而 $d=(k+1)^{n-1}-k(k+1)^{n-2}=(k+1)^{n-2}$,进而 $a_1=(k+1)^{n-2}(k+3-n)-1$,为使 $a_1>b_1$,我们需要 $(k+1)^{n-2}(k+3-n)-1-k^{n-1}>0$.

上式左边展开为 k 的多项式,最高项次数为 k^{n-2},其系数为 1,故对固定的 n,当 k 为充分大的正整数时,上述不等式成立,即存在满足条件的两个数列.

当 $n=5$ 时,经计算可知 $k=5$ 时,有 $(k+1)^3(k-2)-1-k^4>0$,所得的两个数列为:$625<647<750<863<900<1079<1080<1295<1296<1511$.

巩固练习

1. (1) 设 x,y,z 是实数,$3x$、$4y$、$5z$ 成等比数列,且 $\dfrac{1}{x}$、$\dfrac{1}{y}$、$\dfrac{1}{z}$ 成等差数列,则 $\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{x}$ 的

值是______.(1992 年全国高中数学联赛试题)

(2) 已知集合 $M=\{x,xy,\lg(xy)\}$,$N=\{0,|x|,y\}$,并且 $M=N$,那么 $(x+\frac{1}{y})+(x^2+\frac{1}{y^2})+(x^3+\frac{1}{y^3})+\cdots+(x^{2001}+\frac{1}{y^{2001}})$ 的值等于______.

(1987 年全国高中数学联赛试题)

2.(1989 年全国高中数学联赛试题,2006 年上海交大推优、保送生试题)

一个正数,若其小数部分、整数部分和其自身成等比数列,则该数为______.

3. 设 $\{a_n\}$ 是正项等比数列,且 $\sum_{i=1}^{n}a_i=S$,$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}=T$. 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的积.

4. 若非零实数 a_1,a_2,a_3,a_4 满足 $(a_1^2+a_2^2)a_4^2-2a_2(a_1+a_3)a_4+a_2^2+a_3^2=0$. 求证:$a_1,a_2,a_3$ 成等比数列,且公比为 a_4.

5. 从 n 个数:$1,a,a^2,\cdots,a^{n-1}(a>2)$ 中拿走若干个数,然后将剩下的数任意分成两个部分. 证明:这两部分之和不可能相等.

6. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d,$d\neq 0$,数列 $\{b_n\}$ 是以 q 为公比的等比数列,且 $a_1=b_1$,$a_3=b_3$,$a_7=b_5$. 试求:使得 $a_n=b_m$ 时的 n 与 m 的关系.

7. 求证:若各项均为正数的等差数列与等比数列,它们的首项相同,项数相同,末项也相同,则等差数列的和不小于等比数列的和.

8.(2008 年江苏高考数学试题)

(Ⅰ)设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是各项均不为零的 $n(n\geqslant 4)$ 项等差数列,且公差 $d\neq 0$,若将此数列删去某一项后得到的数列(按原来的顺序)是等比数列,

① 当 $n=4$ 时,求 $\frac{a_1}{d}$ 的数值;② 求 n 的所有可能值.

(Ⅱ)求证:对于给定的正整数 $n(n\geqslant 4)$,存在一个各项及公差都不为零的等差数列 $b_1,b_2,\cdots,b_n$,其中任意三项(按原来顺序)都不能组成等比数列.