新世纪高职高专
数学类课程规划教材

新世纪

新编应用数学学习指导

XINBIAN YINGYONG SHUXUE XUEXI ZHIDAO

新世纪高职高专教材编审委员会 组编
主 编 杨凤书 白景富

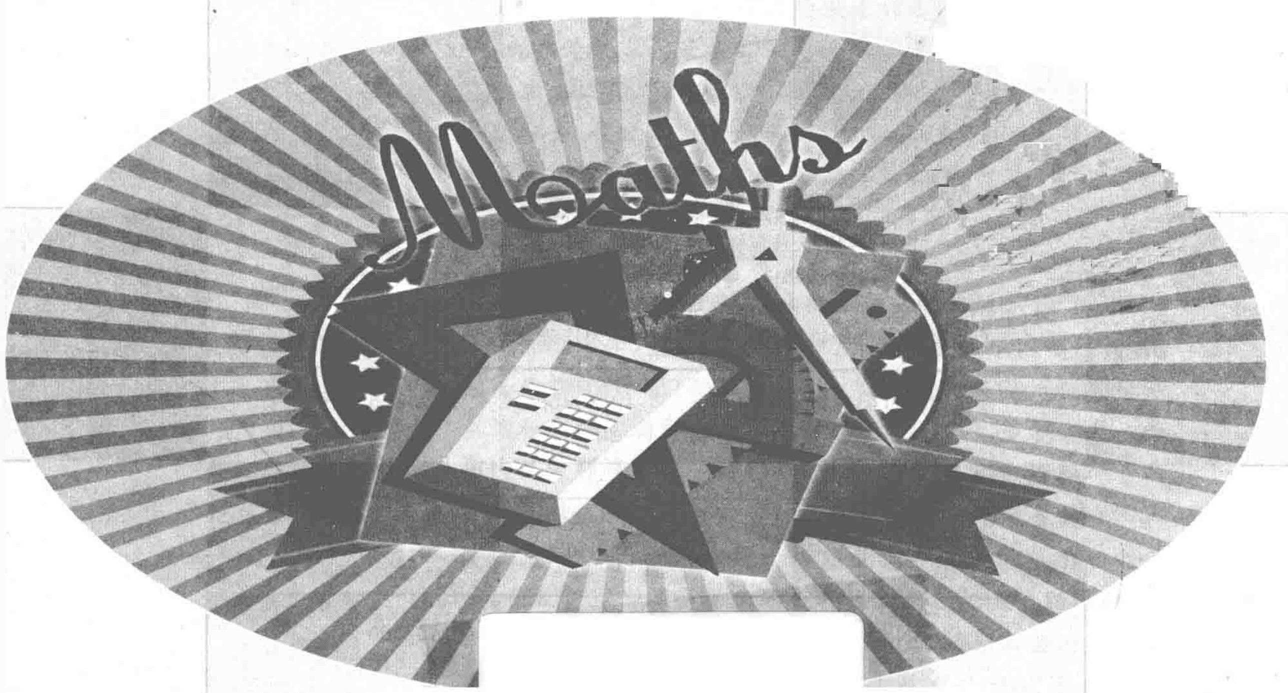
大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

新世纪高职高专
数学类课程规划教材

新编应用数学学习指导

XINBIAN YINGYONG SHUXUE XUEXI ZHIDAO

新世纪高职高专教材编审委员会 组编
主 编 杨凤书 白景富



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

新编应用数学学习指导 / 杨凤书，白景富主编. —
大连 ：大连理工大学出版社，2013.10
新世纪高职高专数学类课程规划教材
ISBN 978-7-5611-7952-9

Ⅰ. ①新… Ⅱ. ①杨… ②白… Ⅲ. ①应用数学—高等职业教育—教学参考资料 Ⅳ. ①O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 128204 号

大连理工大学出版社出版
地址：大连市软件园路 80 号 邮政编码：116023
发行：0411-84708842 邮购：0411-84703636 传真：0411-84701466
E-mail：dutp@dutp.cn URL：http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸：185mm×260mm 印张：15.5 字数：358 千字
印数：1～2000
2013 年 10 月第 1 版 2013 年 10 月第 1 次印刷

责任编辑：欧阳碧蕾 责任校对：周双双
封面设计：张 莹

ISBN 978-7-5611-7952-9 定 价：32.00 元

总　序

我们已经进入了一个新的充满机遇与挑战的时代，我们已经跨入了21世纪的门槛。

20世纪与21世纪之交的中国，高等教育体制正经历着一场缓慢而深刻的革命，我们正在对传统的普通高等教育的培养目标与社会发展的现实需要不相适应的现状作历史性的反思与变革的尝试。

20世纪最后的几年里，高等职业教育的迅速崛起，是影响高等教育体制变革的一件大事。在短短的几年时间里，普通中专教育、普通高专教育全面转轨，以高等职业教育为主导的各种形式的培养应用型人才的教育发展到与普通高等教育等量齐观的地步，其来势之迅猛，发人深思。

无论是正在缓慢变革着的普通高等教育，还是迅速推进着的培养应用型人才的高职教育，都向我们提出了一个同样的严肃问题：中国的高等教育为谁服务，是为教育发展自身，还是为包括教育在内的大千社会？答案肯定而且唯一，那就是教育也置身其中的现实社会。

由此又引发出高等教育的目的问题。既然教育必须服务于社会，它就必须按照不同领域的社会需要来完成自己的教育过程。换言之，教育资源必须按照社会划分的各个专业（行业）领域（岗位群）的需要实施配置，这就是我们长期以来明乎其理而疏于力行的学以致用问题，这就是我们长期以来未能给予足够关注的教育目的问题。

如所周知，整个社会由其发展所需要的不同部门构成，包括公共管理部门如国家机构、基础建设部门如教育研究机构和各种实业部门如工业部门、商业部门，等等。每一个部门又可作更为具体的划分，直至同它所需要的各种专门人才相对应。教育如果不能按照实际需要完成各种专门人才培养的目标，就不能很好地完成社会分工所赋予它的使命，而教育作为社会分工的一种独立存在就应受到质疑（在市场经济条件下尤其如此）。可以断言，按照社会的各种不同需要培养各种直接有用人才，是教育体制变革的终极目的。

随着教育体制变革的进一步深入，高等院校的设置是否会同社会对人才类型的不同需要一一对应，我们姑且不论。但高等教育走应用型人才培养的道路和走研究型（也是一种特殊应用）人才培养的道路，学生们根据自己的偏好各取所需，始终是一个理性运行的社会状态下高等教育正常发展的途径。

高等职业教育的崛起，既是高等教育体制变革的结果，也是高等教育体制变革的一个阶段性表征。它的进一步发展，必将极大地推进中国教育体制变革的进程。作为一种应用型人才培养的教育，它从专科层次起步，进而应用本科教育、应用硕士教育、应用博士教育……当应用型人才培养的渠道贯通之时，也许就是我们迎接中国教育体制变革的成功之日。从这一意义上说，高等职业教育的崛起，正是在为必然会取得最后成功的教育体制变革奠基。

高等职业教育还刚刚开始自己发展道路的探索过程，它要全面达到应用型人才培养的正常理性发展状态，直至可以和现存的（同时也正处在变革分化过程中的）研究型人才培养的教育并驾齐驱，还需要假以时日；还需要政府教育主管部门的大力推进，需要人才需求市场的进一步完善发育，尤其需要高职教学单位及其直接相关部门肯于做长期的坚忍不拔的努力。新世纪高职高专教材编审委员会就是由全国100余所高职高专院校和出版单位组成的旨在以推动高职高专教材建设来推进高等职业教育这一变革过程的联盟共同体。

在宏观层面上，这个联盟始终会以推动高职高专教材的特色建设为己任，始终会从高职高专教学单位实际教学需要出发，以其对高职教育发展的前瞻性的总体把握，以其纵览全国高职高专教材市场需求的广阔视野，以其创新的理念与创新的运作模式，通过不断深化的教材建设过程，总结高职高专教学成果，探索高职高专教材建设规律。

在微观层面上，我们将充分依托众多高职高专院校联盟的互补优势和丰裕的人才资源优势，从每一个专业领域、每一种教材入手，突破传统的片面追求理论体系严整性的意识限制，努力凸现高职教育职业能力培养的本质特征，在不断构建特色教材建设体系的过程中，逐步形成自己的品牌优势。

新世纪高职高专教材编审委员会在推进高职高专教材建设事业的过程中，始终得到了各级教育主管部门以及各相关院校相关部门的热忱支持和积极参与，对此我们谨致深深谢意，也希望一切关注、参与高职教育发展的同道朋友，在共同推动高职教育发展、进而推动高等教育体制变革的进程中，和我们携手并肩，共同担负起这一具有开拓性挑战意义的历史重任。

新世纪高职高专教材编审委员会

2001年8月18日

前　言

《新编应用数学学习指导》是新世纪高职高专教材编审委员会组编的数学类课程规划教材之一。

本教材是由白景富、杨凤书主编、大连理工大学出版社出版的高职高专数学类课程规划教材《新编应用数学(理工类)》(第三版)的学习辅导教材。

高等职业教育在中国从开办、发展到成熟是神速的，教育工作者对高等职业教育的人才培养目标的讨论一天也没有停止过。因此，高等职业教育的教学改革一刻也不能停止。大家仁者见仁，智者见智。但有一点是不可否认的，那就是基础课学时越来越少了。怎么根据现有学生的基础，在学时很少的情况下教给学生必需、够用的知识是教育工作者面临的一大课题。编者认为培养学生的自学能力是我们这些基础课教师首先要解决的问题。基于此，我们编写了这本《新编应用数学学习指导》，希望她像一位不知疲倦的教师，永远陪在你的身边，为你讲解课堂上没有及时领会的知识，随时帮你解决学习应用数学遇到的困难，教你学好数学，为你树立信心。

本教材有如下特点：

1. 对教材各章内容进行了系统的知识梳理和重点、难点归纳，并对学生学习过程中难于理解和容易产生错误的知识点进行了答疑，使重点突出、难点分解。

2. 通过典型例题解析指导学生如何分析问题、解决问题。每道例题都做了认真的分析，选择较好的解题思路，对每一步都做细致入微的讨论。有的例题解答之后还给出了思考题，让学生在学会解题的同时学会学习，进而自主学习。

3. 对教材中的习题及每章末的复习题进行了详细的解答。有些习题还采用多种解法，以培养学生的广泛思维及学习兴趣。

4. 每章配备了综合自测题，以便检验学生对每章内容的掌握情况。

本教材是一本具有工具书性质的学习参考书，力求满足高

职高专学生的学习需求，帮助读者在学习中总结规律、开拓思路。本教材内容丰富、解答明确、启发性强，相信只要认真学习，就既能巩固所学的基本理论知识，又能有效提高运算能力和解题技巧，对读者有较大帮助。

本教材由辽宁水利职业学院杨凤书、白景富任主编，具体编写分工如下：第一篇由白景富编写；第二篇、第三篇由杨凤书编写；全书由杨凤书审阅并统稿。

由于编者水平有限，书中难免存在错误和不足之处，敬请使用本教材的师生批评指正。同时，也对在本教材编写过程中给予帮助的有关人士表示诚挚的谢意。

编　者

2013 年 10 月

所有意见和建议请发往：dutpgz@163.com
欢迎访问教材服务网站：http://www.dutpbook.com
联系电话：0411-84708445　84708462

目　录

第一篇　微积分

第二篇　线性代数

第三篇 概率论与数理统计

第一篇

微积分

第一章

导数与微分

一、本章教学要求及重点、难点

教学要求

1. 理解　导数和微分的概念.

2. 了解　导数和微分的几何意义、高阶导数的概念、函数可导与连续的关系.

3. 掌握　隐函数与参数方程所确定的函数的求导方法.

4. 熟练掌握　导数与微分的运算法则及基本公式,能熟练地求初等函数的一二阶导数.

5. 知道　微分形式的不变性及一些近似公式.

6. 运用　导数、微分能解决一些简单的实际问题.

知识点、重点与难点

本章知识点

1. 导数与微分的概念及意义.
2. 导数与微分的基本计算公式及运算法则.
3. 隐函数及参数方程所确定的函数的求导法则及高阶导数的含义.
4. 导数与微分的应用.

本章重点

1. 导数与微分的概念.
2. 初等函数的求导公式及法则,特别是复合函数的求导法则.
3. 微分基本公式和法则.

本章难点

1. 复合函数的求导.
2. 隐函数的求导与微分.

二、内容简析

1. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 的导数

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的增量 Δy 与自变量增量 Δx 的比，取 $\Delta x \to 0$ 的极限值. 即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

2. 函数 $f(x)$ 的导函数

函数 $f(x)$ 在任意点 x 的导数叫作 $f(x)$ 的导函数，用 $f'(x)$ 表示. $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

导函数 $f'(x)$ 与函数在点 x_0 的导数 $f'(x_0)$ 的关系为 $f'(x_0)=f'(x)\Big|_{x=x_0}$.

3. 初等函数的求导法则

(1)函数的和、差、积、商的求导法则：略.

(2)复合函数的求导法则：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$(函数对自变量的导数等于函数对中间变量的导数乘以中间变量对自变量的导数)，还可以推广到多个中间变量的情形.

(3)隐函数确定的函数的求导法则：由方程 $F(x,y)=0$ 确定的函数称为隐函数. 求导法则是：方程两边分别对 x 求导，遇到 y 的求导时写 y'_x，遇到 y 的函数求导时先对 y 求导(y 为中间变量)再乘以 y 对 x 的导数 y'_x，得到一个关于 y'_x 的方程，解出 y'_x 即为所求.

(4)参数方程所确定的函数的求导法则：$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=f(t)\end{cases}$ (t 为参数)，$f(t)$，$\varphi(t)$ 均可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$，则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{f'(t)}{\varphi'(t)}$.

4. 导数的基本公式(16 个)

略.

5. 函数的微分定义

(1)函数 $f(x)$ 在点 x_0 的微分定义：如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 具有导数 $f'(x_0)$，那么 $f'(x_0)\cdot\Delta x$ 叫作函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的微分. 即 $dy\Big|_{x=x_0}=f'(x_0)\cdot\Delta x$.

(2)函数 $f(x)$ 的微分：函数 $f(x)$ 在任意点 x 处的微分，称为函数的微分，即 $dy=f'(x)\cdot\Delta x$(对于一元函数来说可微与可导是两个等价的概念).

规定：自变量的增量 Δx 为自变量的微分 dx，即 $\Delta x=dx$，这样 $dy=f'(x)dx$.

6. 微分基本公式(有一个导数公式，就有一个微分公式)

略.

7. 微分运算法则

(1)四则运算法则：略.

(2)复合函数的微分法则：$u=\varphi(x)$在点 x 可微，$y=f(u)$在相应的点 u 可微，则 $\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$. 无论 u 是中间变量还是自变量都成立. 因此，求复合函数的微分时，对谁求导数就乘以谁的微分，直到乘以自变量的微分时止. 如 $\mathrm{d}\ln(\sin x^2)=[\ln(\sin x^2)]'_{\sin x^2}\mathrm{d}\sin x^2=\dfrac{1}{\sin x^2}\mathrm{d}\sin x^2=\dfrac{(\sin x^2)'_{x^2}}{\sin x^2}\mathrm{d}x^2=2x\cot x^2\mathrm{d}x$.

8. 微分在近似计算中的应用

(1)当$|\Delta x|$很小时，$\Delta y\approx f'(x)\cdot\Delta x$.

(2)当$|\Delta x|$很小时，$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$.

特别当 $x_0=0$，$|x|$很小时，有以下近似公式：$\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\dfrac{x}{n}$；$\mathrm{e}^x\approx 1+x$；$\ln(1+x)\approx x$；$\sin x\approx x$($x$ 是弧度数)；$\tan x\approx x$(x 是弧度数).

三、疑难解答及典型例题解析

1. 关于导数概念

导数的概念是微分学中一个重要的基本概念，而导数的概念是用极限来定义的，它定义的是函数 $f(x)$在点 x_0 的导数. 导数是函数增量比值的极限，具体地说是，一差 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，二比$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$，三极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. 这样得出的结果(极限值)就是函数 $f(x)$在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$. 一般在求导中除了分段函数在分段点处的导数用定义求，其余函数的导数可用求导法则来求.

2. $f'(x_0)$与$[f(x_0)]'$的关系

$f'(x_0)$是函数 $f(x)$在点 x_0 的导数，或者说是导函数 $f'(x)$($f(x)$在任意点 x 处的导数)在点 x_0 处的函数值，即 $f'(x_0)=f'(x)|_{x=x_0}$. 而$[f(x_0)]'$是函数 $f(x)$在点 x_0 的函数值的导数(常数的导数)，即$[f(x_0)]'=0$.

3. $f(x)$处处有切线与 $f(x)$处处可导的关系

由导数的几何意义知：$f(x)$在点 x_0 的导数 $f'(x_0)$是 $y=f(x)$在点 $M(x_0,y_0)$的切线的斜率，即导数存在切线就存在；反之，曲线 $y=f(x)$在点 $M(x_0,y_0)$的切线存在，函数 $f(x)$在点 x_0 未必可导. 例如函数 $y=x^{\frac{1}{3}}$在点(0,0)有切线(y 轴)，但 $y=x^{\frac{1}{3}}$在 $x=0$ 不可导. 又如圆 $x^2+y^2=1$ 在点(1,0)有切线($x=1$)，但隐函数 $x^2+y^2=1$ 在 $x=1$(此时 $y=0$)导数不存在.

4. 可导与可微的关系

对于一元函数 $y=f(x)$来说，可导与可微是等价的. 因为 $y=f(x)$在点 x_0 可导，则 $f'(x_0)$存在，因此 $y=f(x)$在点 x_0 的微分$\mathrm{d}y|_{x=x_0}=f'(x_0)\mathrm{d}x$；反之，若 $y=f(x)$在点 x_0 可微，则 $f'(x_0)$必存在，即 $f(x)$在点 x_0 可导. 尽管如此，导数与微分仍是两个完全不同的概念. $f'(x_0)$是函数增量 Δy 与自变量增量 Δx 之比的极限，是一个只与 x_0 有关的确定的数值；而微分 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\mathrm{d}x$ 是一个自变量增量 $\Delta x=\mathrm{d}x$ 的线性函数，是 Δy 的近似值，它既依赖 x_0，也依赖 Δx. 在几何意义上，$f'(x_0)$是曲线在点(x_0,y_0)处的切线的斜率；而 $\mathrm{d}y$

是曲线 $y=f(x)$ 在点 (x_0,y_0) 处切线上纵坐标的增量.

5. 左导数与右导数

因为函数的导数是用极限定义的，所以函数在一点就有左右导数之说. 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导，则 $y=f(x)$ 在点 x_0 的左右导数必存在且相等，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0-0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0+0)=f'(x_0)$；若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 不可导，则有下面三种情形：

(1)函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的左右导数都是 ∞，此时也说 $y=f(x)$ 在点 x_0 的导数是 ∞.

(2)函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的左右导数之一存在，另一个不存在.

(3)函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的左右导数都存在，但不相等.

6. 可导与连续的关系

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导，由导数的定义有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$，再由函数与其极限的关系知 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha$（其中 α 是 $\Delta x\to 0$ 时的无穷小），两边同乘 Δx，$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x$，因此 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x]=0$（常数与无穷小的乘积为无穷小，无穷小与无穷小的乘积为无穷小，无穷小的和仍为无穷小），这说明 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续. 反之，则不一定. 例如函数 $f(x)=|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 是连续的（由 $y=f(x)$ 的图像可知），但是 $y=f(x)$ 在点 $x=0$ 却不可导. 因为 $y=f(x)$ 在点 $x=0$ 的左导数 $f'(0-0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$，$y=f(x)$ 在点 $x=0$ 的右导数 $f'(0+0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=1$，即函数 $y=f(x)$ 在点 $x=0$ 的左右导数存在但不相等，因此 $y=f(x)$ 在点 $x=0$ 不可导. 这就是连续但不可导的例子.

连续是可导的必要条件但不是充分条件；可导是连续的充分条件但不是必要条件.

7. 关于复合函数的导数

导数运算的重点是复合函数的求导，而复合函数求导的关键是下面两步：(1)分清函数的复合过程，明确所有的中间变量；(2)按照求导法则依次对中间变量直至自变量求导，再把相应的导数相乘.

例如，求 $y=e^{x^2+1}$ 的导数 y'.

函数 $y=e^{x^2+1}$ 是由 $y=e^u$，$u=x^2+1$ 复合而成的，$y'_u=(e^u)'=e^u$，$u'_x=(x^2+1)'=2x$，因此，$y'=y'_x=y'_u u'_x=e^u 2x=2xe^{x^2+1}$.

函数的求导永远是对自变量求导，中间变量是人们为了求导方便而添加的，不管有多少中间变量都要由外到内逐层求导，直到最后对自变量求导. 法则是：**函数对自变量的导数等于函数对中间变量的导数乘以中间变量对自变量的导数**. 公式是

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

这是只有一个中间变量的公式，此法则还可推广到有限多个中间变量的情形，如 $y=f\{g[\varphi(x)]\}$ 是由 $y=f(u)$，$u=g(v)$，$v=\varphi(x)$ 复合而成的，且每一个函数在相应点都可导，则 $y'_x=y'_u\cdot u'_v\cdot v'_x=f'(u)\cdot g'(v)\cdot\varphi'(x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$.

需要注意的是，要把每次求导的结果相乘，还要把 u 换成 $g(v)$，把 v 换成 $\varphi(x)$. 熟练之后，中间变量不必写出，在心里想着谁是中间变量对谁求导，再把结果相乘即可.

例如，求 $y=\ln\arctan e^{2x-3}$ 的导数 y'.

$$y'=\frac{1}{\arctan e^{2x-3}}(\arctan e^{2x-3})' \quad \text{这里 } \arctan e^{2x-3} \text{ 是中间变量}$$

$$=\frac{1}{\arctan e^{2x-3}}\cdot\frac{1}{1+(e^{2x-3})^2}\cdot(e^{2x-3})' \quad \text{这里 } e^{2x-3} \text{ 是中间变量}$$

$$=\frac{1}{\arctan e^{2x-3}(1+e^{4x-6})}\cdot e^{2x-3}(2x-3)' \quad \text{这里 } 2x-3 \text{ 是中间变量}$$

$$=\frac{2e^{2x-3}}{\arctan e^{2x-3}(1+e^{4x-6})}.$$

8. 关于高阶导数

如果函数 $y=f(x)$ 的一阶导数 y' 还可导，那么 y' 的导数叫作 $y=f(x)$ 的二阶导数，记作 y''，…，如果 $y=f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数还可导，那么 $y=f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数的导数叫作 $y=f(x)$ 的 n 阶导数，记作 $y^{(n)}$ 或 $f^{(n)}(x)$ 或 $\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$.

二阶及二阶以上的导数叫作高阶导数. 高阶导数的求法没有什么特别的新的法则和公式，只要按照阶数要求、导数公式、求导法则逐阶去求即可. 关键是对高阶导数记号的理解，特别是 $\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$，不能理解为对 x^n 求导，它表示 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right)$ 或 $\frac{\mathrm{d}y^{(n-1)}}{\mathrm{d}x}$，即 $y=f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数再对 x 求导.

例如，求由参数方程 $\begin{cases}y=2-3t+t^3\\x=-1+2t-t^2\end{cases}$ 确定的函数的二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

参数方程 $\begin{cases}y=f(t)\\x=\varphi(t)\end{cases}$ $(f(t),\varphi(t)$ 均可导，t 为参数）确定的函数的求导公式为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{f'(t)}{\varphi'(t)}$ 或直接用微分的商来求（参数方程确定的函数的求导用此法比较好）.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}(2-3t+t^3)}{\mathrm{d}(-1+2t-t^2)}=\frac{(-3+3t^2)\mathrm{d}t}{(2-2t)\mathrm{d}t}=\frac{3t^2-3}{2-2t}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\,\frac{3t^2-3}{2-2t}}{\mathrm{d}(-1+2t-t^2)}=\frac{\frac{6t(2-2t)+6(t^2-1)}{(2-2t)^2}\mathrm{d}t}{(2-2t)\mathrm{d}t}=\frac{3}{4(t-1)}$$

9. 曲线的切线方程和法线方程

导数在几何方面的第一个应用，就是求曲线在给定点的切线方程和法线方程. 给定点可以是曲线上的点也可以是曲线外的点，但关键是曲线的切线斜率，当给定点 (x_0,y_0) 在

曲线上且 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导时，所求切线斜率为 $f'(x_0)$，此时切线的点斜式方程为 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$. 若 $f'(x_0)\neq 0$，则曲线在点 (x_0,y_0) 的法线方程为 $y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$；当给定点不在曲线上且 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导时，应该先设切点坐标，写出切线方程，再把给定点代入得方程(1)，把切点坐标代入曲线方程得方程(2)，方程(1)(2)联立，解方程组得切点坐标，就可求出过曲线外一点曲线的切线方程. 进而可求得法线方程.

若 $y=f(x)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续，但在点 x_0 处不可导，例如，$f(x)=|x|$ 在点 $x=0$ 连续但不可导(点 $x=0$ 的左右极限存在但不相等)，即 $f(x)=|x|$ 在点 $(0,0)$ 不存在切线. 又如，圆 $x^2+y^2=1$ 在点 $(1,0)$ 连续，$f'(1)=\infty$(导数不存在)，然而 $x=1$ 是圆在该点的切线.

【例 1】 设 $f(x)=(x-a)\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 在点 $x=a$ 处连续，求 $f'(a)$.

分析 由已知条件仅知 $\varphi(x)$ 在点 $x=a$ 处连续，并未给出 $\varphi(x)$ 可导的条件，因此，不能应用乘积的求导法则求导(因为 $\varphi'(a)$ 可能不存在)，只能应用导数定义(一差二比三极限)来求导数.

解 (直接应用定义求导数)因为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(a+\Delta x-a)\varphi(a+\Delta x)-0}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\varphi(a+\Delta x)=\varphi(a)$$

所以 $f'(a)=\varphi(a)$.

【例 2】 求 $y=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$ 的导数 y'.

分析 这个函数不是传统定义下的复合函数，第一个中间变量 $\sqrt{x^2+1}-x$ 是一个复合函数 $\sqrt{x^2+1}$ 与自变量 x 的差，分解过程很难写出，但对 $\sqrt{x^2+1}-x$ 求导时，差的第一项是以 x^2+1 为中间变量的复合函数，注意不要把 x^2+1 看成是 $\sqrt{x^2+1}-x$ 的中间变量.

解 $y'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\cdot(\sqrt{x^2+1}-x)'$ 这里 $\sqrt{x^2+1}-x$ 是中间变量

$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\cdot\left[\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x^2+1)'-1\right]$ 这里 $\sqrt{x^2+1}$ 又是复合函数，x^2+1 是中间变量

$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\cdot\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}-1\right)$ 注意第二个因式不能写成 $\left(\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}-1\right)\cdot(x^2+1)'$

$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\cdot\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

【例 3】 求由方程 $e^{xy}=\sin(x+y^2)$ 所确定的函数的导数 y'.

分析 这是由方程确定的隐函数的求导，不要企图解出 y(没必要，有时也不可能)，