



全新升级版

全国十二大考研辅导机构指定用书

2013 王式安·李永乐考研数学系列

数学 复习全书

数学二

SHUXUE FUXI QUANSHU (SHUXUEER)

主 编 李永乐 王式安

编 委 “高数”：武忠祥 蔡燧林
“线代”：李永乐 胡金德 “概率论”：王式安



超值赠送

1. 考研数学基础导学课程视频
2. 《数学复习全书习题全解》

强强联手/最具实力辅导名师、考研出版专业大社、金榜品牌鼎力合作
全新升级/体例结构科学合理、内容讲解精准到位、导学视频超值赠送



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS





全国十二大考研辅导机构指定用书

2013 王式安·李永乐考研数学系列

数学 复习全书

数学二



编委：北京理工大学
清华大学
西安交通大学
清华大学
浙江大学
(按姓氏笔画排序)

王式安
李永乐
武忠祥
胡金德
蔡燧林



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学复习全书. 数学. 2/李永乐,王式安主编. —
西安:西安交通大学出版社,2011.4
ISBN 978-7-5605-3896-9

I. ①数… II. ①李… ②王… III. ①高等数学—研
究生—入学考试—自学参考资料 IV. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 057760 号

敬告读者

本书封面粘有专用防伪标识,凡有防
伪标识的为正版图书,敬请读者识别。

数学复习全书(数学二)

主 编:李永乐 王式安
策 划:张伟 陈丽
责任编辑:王欣 桂亮 雷萧屹 张梁
装帧设计:金榜图文设计室
出版发行:西安交通大学出版社
地 址:西安市兴庆南路 10 号(邮编:710049)
电 话:(029)82668315 82669096(总编办)
(029)82668357 82667874(发行部)
印 刷:保定市中华美凯印刷有限公司
开 本:787mm×1092mm 1/16
印 张:21.5
字 数:509 千字
版 次:2012 年 2 月第 2 版
印 次:2012 年 2 月第 1 次印刷
书 号:ISBN 978-7-5605-3896-9/O·358
定 价:56.00 元

图书如有印装质量问题,请与印刷厂联系调换

电话:(010)82570560

版权所有 侵权必究

前言

为了帮助广大考生能够在较短的时间内,准确理解和熟练掌握考试大纲知识点的内容,全面提高解题能力和应试水平,本书编写团队依据 15 年的命题与阅卷经验,并结合 10 多年的考研辅导和研究精华,精心编写了本书,真正起到帮助同学们提高综合分析和综合解题的能力。

一、本书的编排结构

1. 考点与要求 设置本部分的目的是使考生明白考试内容和考试要求,从而在复习时有明确的目标和重点。

2. 内容精讲 本部分对考试大纲所要求的知识点进行全面阐述,并对考试重点、难点以及常考知识点进行深度剖析。

3. 例题分析 本部分对历年真题中常见的题型进行归纳分类,总结各种题型的解题方法,注重一题多解,以便能够开阔考生的解题思路,使所学知识融会贯通,并能灵活地解决问题。针对以往考生在解题过程中普遍存在的问题及常犯的错误,给出相应的注意事项,对有难度的例题给出解题思路的分析,以便加强考生对基本概念、公式和定理等内容的理解和正确运用。

4. 自测题 只有适量的练习才能巩固所学的知识,数学复习离不开做题。为了使考生更好地巩固所学知识,提高实际解题能力,本书作者精心优化设计了一定数量的与真题难度相近的题目作为练习题,供考生练习,以便使考生在熟练掌握基本知识的基础上,达到轻松解答真题的水平。同时,本书精选的练习题,都配备了详细的参考答案和解题提示,为考生解答疑难问题给出详细的指导,真正达到一书在手,犹如名师在侧的境界。

二、本书的主要特色

1. 权威打造 命题专家和阅卷专家联袂打造,站在命题专家的角度命题,站在阅卷专家的角度解题,为考生提供最权威的复习指导。

2. 综合提升 与其他同类图书相比,本书加强了考查知识点交叉出题的综合性,真正起到帮助考生提高综合分析和综合解题的能力。

3. 分析透彻 本书既从宏观上把握考研对知识的要求,又从微观层面对重要知识点进行深入细致的剖析,让考生思路清晰、顺畅。

4. 一题多解 对于常考热点题型,均给出巧妙、新颖、简便的几种解法,拓展考生思维,锻炼考生知识应用的灵活性。这些解法均来自各位专家多年教学实践总结和长期命题阅卷经验。

5. 解析全面 本书附赠送《数学复习全书习题全解》,以便于考生迅速浏览答案,检验学习效果,并且明确解题过程,学习多种解题方法。

建议考生在使用本书时不要就题论题,而是要多动脑,通过对题目的练习、比较、思考,总结并发现题目设置和解答的规律性,真正掌握应试解题的金钥匙,从而迅速提高知识水平和应试能力,取得理想分数。

另外,为了更好地帮助同学们进行复习,“李永乐考研数学辅导团队”特在网络上开设答疑专区,同学们在考研数学复习中,如若遇到任何问题,即可在线留言,团队老师将尽心为你解答。详情见“金榜教育网”首页(www.jinbangjiaoyu.com)。

最后,本书的成稿还要感谢考研数学原命题组组长单立波老师和中国人民大学师潭老师在编校过程中所付出的努力。

希望本书能对同学们的复习备考带来更大的帮助。对书中的不足和疏漏之处,恳请读者批评指正。

祝同学们复习顺利,心想事成,考研成功!

编者

2012年2月

目 录

第一篇 高等数学

第一章 函数 极限 连续 (1)

考点与要求 (1)

§1 函 数 (1)

内容精讲 (1)

一、定义 (1)

二、重要性质、定理、公式 (4)

例题分析 (4)

一、求分段函数的复合函数 (4)

二、由函数的奇偶性与周期性构造函数 (6)

三、求反函数的表达式 (6)

四、关于函数有界(无界)的讨论 (7)

§2 极 限 (8)

内容精讲 (8)

一、定义 (8)

二、重要性质、定理、公式 (9)

三、计算极限的一些有关方法 (10)

例题分析 (13)

一、求函数的极限 (13)

二、已知极限值求其中的某些参数,或已知极限求另一与此有关的某极限 (18)

三、含有 $|x|, e^{\frac{1}{x}}$ 的 $x \rightarrow 0$ 时的极限,含有取整函数 $[x]$ 的 x 趋于整数时的极限 (21)

四、无穷小的比较 (21)

五、数列的极限 (22)

六、极限运算定理的正确运用 (25)

§3 函数的连续与间断 (28)

内容精讲 (28)

一、定义 (28)

二、重要性质、定理、公式 (29)

例题分析 (29)

一、讨论函数的连续与间断 (29)

二、在连续条件下求参数 (30)

三、连续函数的零点问题 (31)

自测题 (31)

第二章 一元函数微分学 (34)

考点与要求 (34)

§1 导数与微分,导数的计算 (34)

内容精讲 (34)

一、定义 (34)

二、重要性质、定理、公式 (35)

例题分析 (38)

一、按定义求一点处的导数 (38)

二、已知 $f(x)$ 在某点 $x=x_0$ 处可导,求与此有关的某极限或其中某参数,或已知某极限求 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数 (39)

三、绝对值函数的导数 (44)

四、由极限式表示的函数的可导性 (45)

五、导数与微分、增量的关系 (46)

六、求导数的计算题 (46)

§2 导数的应用 (48)

内容精讲 (48)

一、定义 (48)

二、重要性质、定理、公式与方法 (49)

例题分析 (50)

一、增减性、极值、凹凸性、拐点的讨论 (50)

二、渐近线 (53)

三、曲率与曲率圆 (54)

四、最大值、最小值问题 (55)

§3 中值定理、不等式与零点问题 (56)

内容精讲 (56)

一、重要定理 (56)

二、重要方法 (57)

例题分析 (59)

一、不等式的证明 (59)

二、 $f(x)$ 的零点与 $f'(x)$ 的零点问题 (63)

三、复合函数 $\psi(x, f(x), f'(x))$ 的零点	...	一、反常积分的计算与反常积分的敛散性	...
.....	(65)		(95)
四、复合函数 $\psi(x, f(x), f'(x), f''(x))$ 的 零点		二、关于奇、偶函数的反常积分	
.....	(66)		(97)
五、“双中值”问题		§ 4 定积分的应用	
.....	(67)		(98)
六、零点的个数问题		内容精讲	
.....	(67)		(98)
七、证明存在某 ξ 满足某不等式		一、基本方法	
.....	(68)		(98)
八、 $f'(x)$ 与 $f(x)$ 的一些极限性质的关系		二、重要几何公式与物理应用	
.....	(70)		(99)
自测题		例题分析	
.....	(70)		(100)
第三章 一元函数积分学		一、几何应用	
.....	(74)		(100)
考点与要求		二、物理应用	
.....	(74)		(103)
§ 1 不定积分与定积分的概念、性质、 理论		§ 5 定积分的证明题	
.....	(74)		(106)
内容精讲		内容精讲	
.....	(74)		(106)
一、定义		例题分析	
.....	(74)		(106)
二、重要性质、定理、公式		一、讨论变限积分所定义的函数的奇偶性、 周期性、极值、单调性等	
.....	(75)		(106)
例题分析		二、由积分定义的函数求极限	
.....	(76)		(108)
一、分段函数的不定积分与定积分		三、积分不等式的证明	
.....	(76)		(109)
二、定积分与原函数的存在性		四、零点问题	
.....	(79)		(114)
三、奇、偶函数、周期函数的原函数及变限积分		自测题	
.....	(79)		(116)
§ 2 不定积分与定积分的计算		第四章 多元函数微积分学	
.....	(82)		(120)
内容精讲		考点与要求	
.....	(82)		(120)
一、基本积分公式		§ 1 多元函数的极限、连续、偏导数与 全微分	
.....	(82)		(120)
二、基本积分方法		内容精讲	
.....	(83)		(120)
例题分析		一、多元函数	
.....	(85)		(120)
一、简单有理分式的积分		二、二元函数的极限与连续	
.....	(85)		(120)
二、三角函数的有理分式的积分		三、二元函数的偏导数与全微分	
.....	(86)		(121)
三、简单无理式的积分		例题分析	
.....	(87)		(123)
四、两种不同类型的函数相乘的积分		一、讨论二重极限	
.....	(88)		(123)
五、被积函数中含有导数或变限函数的积分		二、讨论二元函数的连续性、偏导数存在性	
.....	(89)		(125)
六、对称区间上的定积分, 周期函数的定积分		三、讨论二元函数的可微性	
.....	(91)		(126)
七、含参变量带绝对值号的定积分		§ 2 多元函数的微分法	
.....	(92)		(130)
§ 3 反常积分及其计算		内容精讲	
.....	(93)		(130)
内容精讲		一、复合函数的偏导数与全微分	
.....	(93)		(130)
一、定义		二、隐函数的偏导数与全微分	
.....	(93)		(131)
二、重要性质、定理、公式		例题分析	
.....	(94)		(132)
例题分析		一、求复合函数的偏导数与全微分	
.....	(95)		(132)
		二、求隐函数的偏导数与全微分	
			(139)
		§ 3 极值与最值	
			(143)

内容精讲	(143)
一、无条件极值	(143)
二、条件极值	(144)
例题分析	(145)
一、无条件极值问题	(145)
二、条件极值(最值)问题	(147)
三、多元函数的最大(小)值问题	(148)
§ 4 二重积分	(152)
内容精讲	(152)
一、二重积分的定义及几何意义	(152)
二、二重积分的性质	(152)
三、二重积分的计算	(152)
例题分析	(155)
一、计算二重积分	(155)
二、累次积分交换次序及计算	(164)
三、与二重积分有关的综合题	(167)
四、与二重积分有关的积分不等式问题	(170)
自测题	(172)
第五章 常微分方程	(176)
考点与要求	(176)
§ 1 常微分方程	(176)
考点与要求	(176)
一、微分方程的基本概念	(176)
二、常见的几类一阶方程及解法	(176)
三、可降阶的高阶微分方程	(177)
四、高阶线性方程	(177)
例题分析	(179)
一、微分方程求解	(179)
二、微分方程的综合题	(185)
三、微分方程的应用	(187)
自测题	(190)
第二篇 线性代数	
第一章 行列式	(192)
考点与要求	(192)
内容精讲	(192)
例题分析	(195)
一、数字型行列式的计算	(195)
二、抽象型行列式的计算	(201)
三、行列式 $ A $ 是否为零的判定	(203)
四、关于代数余子式求和	(204)

自测题	(206)
第二章 矩 阵	(208)
考点与要求	(208)
内容精讲	(208)
§ 1 矩阵的概念及运算	(208)
一、矩阵的概念	(208)
二、矩阵的运算	(209)
三、矩阵的运算规则	(209)
四、特殊矩阵	(210)
§ 2 可逆矩阵	(211)
一、可逆矩阵的概念	(211)
二、 n 阶矩阵 A 可逆的充分必要条件	(211)
三、逆矩阵的运算性质	(211)
四、求逆矩阵的方法	(211)
§ 3 初等变换、初等矩阵	(212)
一、定义	(212)
二、初等矩阵与初等变换的性质	(212)
§ 4 矩阵的秩	(213)
一、矩阵秩的概念	(213)
二、矩阵秩的公式	(213)
§ 5 分块矩阵	(213)
一、分块矩阵的概念	(213)
二、分块矩阵的运算	(214)
例题分析	(215)
一、矩阵的概念及运算	(215)
二、特殊方阵的幂	(219)
三、伴随矩阵的相关问题	(222)
四、可逆矩阵的相关问题	(225)
五、初等变换、初等矩阵	(229)
六、矩阵秩的计算	(230)
七、矩阵方程的求解	(233)
自测题	(236)
第三章 向 量	(238)
考点与要求	(238)
内容精讲	(238)
§ 1 向量、向量组的线性相关性	(238)
§ 2 极大线性无关组、秩	(239)
§ 3 内积,正交规范化方法	(241)
例题分析	(242)
一、线性相关性的判别	(242)

二、向量的线性表示	(244)
三、向量组线性无关的证明	(246)
四、秩、极大线性无关组	(249)
五、正交矩阵、施密特正交化方法 ...	(254)
自测题	(256)
第四章 线性方程组	(258)
考点与要求	(258)
内容精讲	(258)
§1 克莱姆法则	(258)
§2 齐次线性方程组	(258)
§3 非齐次线性方程组	(260)
例题分析	(261)
一、线性方程组的基本概念题	(261)
二、线性方程组的求解	(265)
三、基础解系	(272)
四、 $AX=0$ 的系数行向量和解向量的关系， 由 $AX=0$ 的基础解系反求 A ...	(273)
五、非齐次线性方程组系数列向量与解向量 的关系	(275)
六、两个方程组的公共解	(276)
七、同解方程组	(278)
八、线性方程组的有关杂题	(280)
自测题	(282)
第五章 特征值、特征向量、相似 矩阵	(285)
考点与要求	(285)
内容精讲	(285)
§1 特征值、特征向量	(285)
一、定义	(285)
二、特征值的性质	(285)
三、求特征值、特征向量的方法	(286)
§2 相似矩阵、矩阵的相似对角化	(286)
一、定义	(286)
二、矩阵可相似对角化的充分必要条件	(286)
三、相似矩阵的性质及相似矩阵的必要条件	(287)
§3 实对称矩阵的相似对角化	(287)

一、定义	(287)
二、实对称阵的特征值、特征向量及 相似对角化	(287)
三、实对称矩阵正交相似于对角阵的步骤	(287)
例题分析	(288)
一、特征值、特征向量的求法	(288)
二、两个矩阵有相同的特征值的证明	(292)
三、关于特征向量及其他给出特征值特征 向量的方法	(293)
四、矩阵是否相似于对角阵	(295)
五、利用特征值、特征向量及相似矩阵 确定参数	(297)
六、由特征值、特征向量反求 A	(298)
七、矩阵相似及相似标准形	(300)
八、相似对角阵的应用	(305)
自测题	(309)
第六章 二次型	(311)
考点与要求	(311)
内容精讲	(311)
§1 二次型的定义、矩阵表示，合同 矩阵	(311)
一、二次型概念	(311)
二、二次型的矩阵表示	(311)
§2 化二次型为标准形、规范形、合同 二次型	(312)
一、定义	(312)
§3 正定二次型、正定矩阵	(313)
一、定义	(313)
例题分析	(314)
一、二次型的矩阵表示	(314)
二、化二次型为标准形、规范形	(315)
三、合同矩阵、合同二次型	(322)
四、正定性的判别	(325)
五、正定二次型的证明	(330)
六、综合题	(332)
自测题	(335)

第一篇 高等数学

第一章 函数 极限 连续

考点与要求

理解 掌握

函数的概念及其表示法,复合函数与分段函数,基本初等函数的性质及其图形,极限的概念与左、右极限的概念以及它们之间的关系,极限的性质及其运算法则,极限存在的两个准则并用它们判别极限的存在性,两个重要极限,无穷小与无穷大的概念以及它们之间的关系,无穷小的比较的概念并会用等价无穷小替换定理求极限,几个重要的等价无穷小,洛必达法则,佩亚诺余项泰勒公式并用它求某些极限,函数的连续与左、右连续,闭区间上连续函数的性质(有界性,最大最小值定理,介值定理,零点定理).

了解 会用

函数的单调性、奇偶性、周期性与有界性,建立简单应用问题的函数关系,反函数与隐函数的概念,参数方程所表示的函数,初等函数的概念,判别函数的间断点及其类型,基本初等函数的连续性,初等函数的连续性,利用积分和式求某些极限.

§ 1 函 数

内容精讲

一、定义

定义 1.1.1(邻域) 设 $\delta > 0$, 实数集 $U_\delta(x_0) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}$ 称为 x_0 的 δ 邻域, 如果不必说及邻域半径 δ 的大小, 则简记为 $U(x_0)$, 称为 x_0 的某邻域, $\dot{U}_\delta(x_0) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$ 称为 x_0 的去心 δ 邻域, 类似地有记号 $\dot{U}(x_0)$ 及相应的名称.

此外还有 x_0 的左(右)半 δ 邻域与 x_0 的左(右)半去心 δ 邻域等概念.

引入 ∞ 的(去心)邻域一词在今后的叙述上会带来一些方便, 这是指 $U = \{x \mid |x| > X\}$, 其中 X 为充分大的正数.

定义 1.1.2(函数) 设有两个变量 x 与 y , X 是一个非空的实数集. 若存在一个对应规则 f , 使得对于每一个 $x \in X$, 按照这个规则, y 有唯一确定的实数值与之对应, 则称 f 是定义在 X 上的一个函数, x 称为自变量, X 称为函数 f 的定义域, y 称因变量. 函数 f 在 $x \in X$ 对应的 $y = f(x)$, $x \in X$ 的函数值所成的集合, 常记为 Y , $Y = \{y \mid y = f(x), x \in X\}$, 称为函数的值域, 以后“实数”的“实”字常省去, 习惯上, 也称 y 或 $f(x)$ 为 x 的函数.

在定义域的不同部分用不同的解析式子表示的函数称为分段函数.

【注】 分段函数是一个函数,不能认为每一段是一个函数、是多个函数.

常见的几种分段函数:

绝对值函数(其图像如图 1-1)

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0. \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

符号函数(其图像如图 1-2)

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0. \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

它表示 x 的符号. 显然有 $|x| = x \operatorname{sgn} x$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

取整函数 $[x]$, 它表示不超过 x 的最大整数. 例如, $[3.2] = 3$, $[4] = 4$, $[-\pi] = -4$. 一般地, $[x] = n$, 当 $n \leq x < n+1$, $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$.

$y = [x]$ 的图像如图 1-3, 显然有性质: 对于 $x \in (-\infty, +\infty)$, 有 $[x] \leq x < [x] + 1$, 且 $[x+1] = [x] + 1$.

狄里克雷函数 $D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数时} \\ 0, & x \text{ 为无理数时} \end{cases}$.

狄里克雷函数无法描出它的图像.

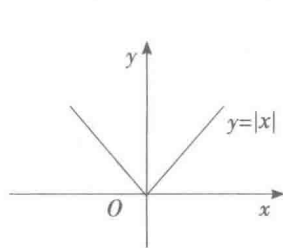


图 1-1

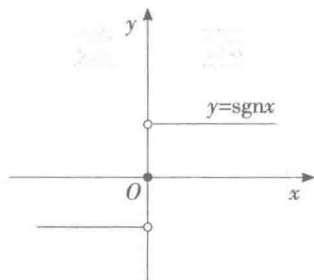


图 1-2

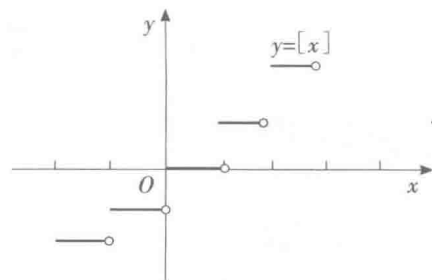


图 1-3

定义 1.1.3 (隐函数) 设 x 在某数集 X 内每取一个值时, 由方程 $F(x, y) = 0$ 可唯一确定一个 y 的值, 则称由 $F(x, y) = 0$ 确定一个隐函数 y , 虽然不一定能将 y 明显地解出来.

定义 1.1.4 (参数式表示的函数) 设 $x = x(t)$, $y = y(t)$. 若 x 在某数集 X 内每取一个值时, 由 $x = x(t)$ 可唯一确定一个 t 的值, 并且对于此 t , 由 $y = y(t)$ 可确定唯一的一个 y 的值, 则称由参数式 $x = x(t)$, $y = y(t)$ 确定了 y 为 x 的函数.

定义 1.1.5 (函数的单调性) 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义, 如果对于任意的 $x_1 \in X, x_2 \in X, x_1 < x_2$, 就一定有 $f(x_1) \leq f(x_2)$, ($f(x_1) \geq f(x_2)$) 则称 $f(x)$ 在 X 上是单调增加(减少)的. 如果一定有 $f(x_1) < f(x_2)$, ($f(x_1) > f(x_2)$) 则称 $f(x)$ 在 X 上是严格单调增加(减少)的.

定义 1.1.6(函数的奇、偶性) 设函数 $f(x)$ 在对称于原点的某数集 X 上有定义,并且对于任意 $x \in X$,必有 $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$),则称 $f(x)$ 在 X 上是偶(奇)函数.

在直角坐标系 xOy 中,偶函数的图像关于 y 轴对称,奇函数的图像关于坐标原点 O 对称.

定义 1.1.7(函数的周期性) 设 $f(x)$ 的定义域是数集 X ,如果存在常数 $T > 0$,当 $x \in X$ 时,有 $x \pm T \in X$,并且 $f(x+T) = f(x)$,则称 $f(x)$ 为周期函数, T 称为它的一个周期.通常称的周期是指使 $f(x+T) = f(x)$ 成立的最小正数 T (如果存在的话).

定义 1.1.8(函数的有界性) 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义,如果存在常数 M ,当 $x \in X$ 时 $f(x) \leq M$,则称 $f(x)$ 在 X 上有上界;如果存在 m ,当 $x \in X$ 时 $f(x) \geq m$,则称 $f(x)$ 在 X 上有下界;如果 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界,则称 $f(x)$ 在 X 上有界.

定义中的 m 与 M 分别为 $f(x)$ 在 X 上的下界与上界.显然,如果 $m(M)$ 是 $f(x)$ 在 X 上的下(上)界,则比 m 小(比 M 大)的任何数,都是 $f(x)$ 在 X 上的下(上)界.

如果不论 M 多么大,总有 $x \in X$ 使 $f(x) > M$,则称 $f(x)$ 在 X 上无上界;类似地可以定义无下界.

定义 1.1.9(反函数) 设函数 $y = f(x)$ 的定义域是 X ,值域是 Y .如果对于 Y 内的每一个 y ,由 $y = f(x)$ 可以确定唯一的 $x \in X$.这样在 Y 上定义了一个函数,称为 $y = f(x)$ 的反函数,记为 $x = f^{-1}(y)$ 或 $x = \varphi(y)$, $y \in Y$.

由反函数的定义,有 $y \equiv f(f^{-1}(y))$, $y \in Y$; $x \equiv f^{-1}(f(x))$, $x \in X$

有时,也常将 $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 写成 $y = f^{-1}(x)$.

在同一坐标系中, $y = f(x)$ 与它的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的图形是一致的,而 $y = f(x)$ 与它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.

定义 1.1.10(复合函数) 设函数 $y = f(u)$ 的定义域是 D_f ,函数 $u = \varphi(x)$ 的定义域是 D_φ ,值域是 R_φ .若 $D_f \cap R_\varphi \neq \emptyset$ ($\emptyset$ 表示空集),则称函数 $y = f(\varphi(x))$ 为 x 的复合函数,它的定义域是 $\{x \mid x \in D_\varphi \text{ 且 } \varphi(x) \in D_f\}$. u 称为中间变量, x 称为自变量.

定义 1.1.11(基本初等函数) 下列一些函数称为基本初等函数:

① 常值函数: C (C 为常数), $x \in \mathbf{R}$.

② 幂函数: x^a (a 为常数),其定义域由 a 确定,但不论 a 如何,在 $(0, +\infty)$ 内总有定义.

③ 指数函数: a^x (常数 $a > 0, a \neq 1$), $x \in \mathbf{R}$.

④ 对数函数: $\log_a x$ (常数 $a > 0, a \neq 1$), $x \in (0, +\infty)$.

⑤ 三角函数: $\sin x, x \in (-\infty, +\infty)$; $\cos x, x \in (-\infty, +\infty)$; $\tan x, x \in \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$,

$k \in \mathbf{Z}$; $\cot x, x \in (k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbf{Z}$.

⑥ 反三角函数: $\arcsin x, x \in [-1, 1]$; $\arccos x, x \in [-1, 1]$; $\arctan x, x \in \mathbf{R}$; $\operatorname{arccot} x, x \in \mathbf{R}$.

定义 1.1.12(初等函数) 由基本初等函数经有限次加、减、乘、除及复合而成并用一个式子表示的函数称初等函数.

二、重要性质、定理、公式

1. 关于奇偶性

定理 1.1.1(关于函数的奇偶性)

- (1) 奇 $\times$ 奇为偶函数;
- (2) 奇 $\times$ 偶为奇函数;
- (3) 偶 $\times$ 偶为偶函数;
- (4) 奇函数与奇函数复合为奇函数;
- (5) 偶函数与偶函数复合为偶函数;
- (6) 偶函数与奇函数复合为偶函数;
- (7) 任一函数在对称于原点的数集 X 上的函数 $f(x)$, 必可分解成一奇一偶函数之和:

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)].$$

2. 关于有界性、无界性的若干充分条件

定理 1.1.2(关于有界、无界的充分条件)

(1) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则存在 $\delta > 0$, 当 $-\delta < x - x_0 < 0$ 时, $f(x)$ 有界; 对 $x \rightarrow x_0^+$, $x \rightarrow x_0$ 有类似的结论.

(2) 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 存在, 则存在 $X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, $f(x)$ 有界; 对 $x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$ 有类似的结论.

(3) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

(4) 设 $f(x)$ 在数集 U 上有最大值(最小值), 则 $f(x)$ 在 U 上有上(下)界.

(5) 有界函数与有界函数之和、积均为有界函数.

以上均为充分条件, 其逆均不成立.

(6) 设 $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = \infty$, 则 $f(x)$ 在 $\square$ 的去心邻域内无界. 但其逆不成立. 这里的 $\square$ 可以是 $x_0, x_0^-, x_0^+, \infty, -\infty, +\infty$ 中 6 种情形的任一种.

例题分析

一、求分段函数的复合函数

【例 1】 设 $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{当 } |x| < 1 \\ 0, & \text{当 } |x| \geq 1 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } |x| \leq 2 \\ 1, & \text{当 } |x| > 2 \end{cases}$.

则 $f(g(x)) = \underline{\hspace{2cm}}, g(f(x)) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解题思路 求 $f(g(x))$ 时, 由外层函数 f , 写出复合函数的表达式, 并同时写出中间变量(即内层函数 g) 的取值范围; 然后按内层函数, 即 $g(x)$ 的分段表达式, 过渡到自变量的变化范围, 得到分段表达式. 对于求 $g(f(x))$ 亦类似.

【解】 应填 $f(g(x)) = \begin{cases} 2, & \text{当 } |x| \leq 2 \\ 0, & \text{当 } |x| > 2 \end{cases}, g(f(x)) \equiv 0, x \in (-\infty, +\infty).$

由 $f(x)$ 的表达式, 有 $f(g(x)) = \begin{cases} 2, & \text{当 } |g(x)| < 1 \\ 0, & \text{当 } |g(x)| \geq 1 \end{cases}$.

再由 $g(x)$ 的表达式知, $|g(x)| < 1 \Leftrightarrow |x| \leq 2$; $|g(x)| \geq 1 \Leftrightarrow |x| > 2$. 从而得到

$$f(g(x)) = \begin{cases} 2, & \text{当 } |x| \leq 2 \\ 0, & \text{当 } |x| > 2 \end{cases}$$

由 $g(x)$ 的表达式, 有 $g(f(x)) = \begin{cases} 0, & \text{当 } |f(x)| \leq 2 \\ 1, & \text{当 } |f(x)| > 2 \end{cases}$.

再由 $f(x)$ 的表达式知, $|f(x)| \leq 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, +\infty)$; $|f(x)| > 2 \Leftrightarrow x \in \emptyset$. 所以

$$g(f(x)) \equiv 0, \text{ 当 } x \in (-\infty, +\infty).$$

【评注】 这个例子中的 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上都有定义, 分别有间断点 $x = \pm 1$ 与 $x = \pm 2$, 但复合函数 $g(f(x)) \equiv 0$ 在 $x \in (-\infty, +\infty)$ 上却是连续的.

【例 2】 设 $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & \text{当 } x \leq 1 \\ \frac{1}{1-x}, & \text{当 } x > 1 \end{cases}$, 则 $f(f(x)) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解题思路 按例 1 的方法处理.

【解】 应填 $f(f(x)) = \begin{cases} (x^2 + 2x + 2)^2, & \text{当 } -2 \leq x \leq 0 \\ \left(\frac{2-x}{1-x}\right)^2, & \text{当 } x > 1 \\ -\frac{1}{x^2 + 2x}, & \text{当 } x < -2 \text{ 或 } 0 < x \leq 1 \end{cases}$.

由 $f(x)$ 的表达式, 有

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= \begin{cases} (f(x)+1)^2, & \text{当 } f(x) \leq 1 \\ \frac{1}{1-f(x)}, & \text{当 } f(x) > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} ((x+1)^2+1)^2, & \text{当 } (x+1)^2 \leq 1, x \leq 1 \\ \left(\frac{1}{1-x}+1\right)^2, & \text{当 } \frac{1}{1-x} \leq 1, x > 1 \\ \frac{1}{1-(x+1)^2}, & \text{当 } (x+1)^2 > 1, x \leq 1 \\ \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}, & \text{当 } \frac{1}{1-x} > 1, x > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} (x^2+2x+2)^2, & \text{当 } x^2+2x \leq 0, x \leq 1 \\ \left(\frac{2-x}{1-x}\right)^2, & \text{当 } \frac{1}{1-x} \leq 1, x > 1 \\ -\frac{1}{x^2+2x}, & \text{当 } x^2+2x > 0, x \leq 1 \\ -\frac{1-x}{x}, & \text{当 } \frac{1}{1-x} > 1, x > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

分别写出各段自变量的取值范围,易见第4式中 $\frac{1}{1-x} > 1$ 与 $x > 1$ 的交集为空集.最后化简如上所填.

二、由函数的奇偶性与周期性构造函数

【例3】 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义,且是周期为2的奇函数.已知 $x \in (2, 3)$ 时 $f(x) = x^2 + x + 1$,则当 $x \in [-2, 0]$ 时 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解题思路 从几何图形可以得到如下解题途径.由周期2,将 $x \in (2, 3)$ 时的 $f(x)$ 的图形向左分别移2个单位与4个单位便可分别得到 $x \in (0, 1)$ 与 $x \in (-2, -1)$ 时的 $f(x)$ 的图形;再由 $x \in (0, 1)$ 时的 $f(x)$ 及奇函数的性质,便得 $x \in (-1, 0)$ 时的 $f(x)$.从而便得到 $x \in (-2, -1) \cup (-1, 0)$ 时的 $f(x)$.再计算出 $f(0), f(-1), f(-2)$ 的值即可.实际操作时按下述步骤进行.

$$\text{【解】 应填 } f(x) = \begin{cases} x^2 + 9x + 21, & \text{当 } x \in (-2, -1) \\ 0, & \text{当 } x = -2, -1, 0. \\ -x^2 + 5x - 7, & \text{当 } x \in (-1, 0) \end{cases}$$

设 $x \in (0, 1)$,有 $x+2 \in (2, 3)$,由周期性,有

$$f(x) = f(x+2) = (x+2)^2 + (x+2) + 1 = x^2 + 5x + 7;$$

设 $x \in (-2, -1)$,有 $x+4 \in (2, 3)$,由周期性,有

$$f(x) = f(x+4) = (x+4)^2 + (x+4) + 1 = x^2 + 9x + 21;$$

设 $x \in (-1, 0)$,有 $-x \in (0, 1)$,由奇函数性质,有

$$f(x) = -f(-x) = -[(-x)^2 + 5(-x) + 7] = -x^2 + 5x - 7.$$

$$\text{最后得 } f(x) = \begin{cases} x^2 + 9x + 21, & \text{当 } x \in (-2, -1) \\ -x^2 + 5x - 7, & \text{当 } x \in (-1, 0) \end{cases}$$

题设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义且为奇函数,故 $f(0) = 0$.又因周期为2,从而 $f(-2) = f(0) = 0$.并且 $f(-1) = -f(1) = -[f(1-2)] = -f(-1)$,所以 $f(-1) = 0$.结论如上所填.

三、求反函数的表达式

【例4】 求函数 $y = f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1}$ 的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 及其定义域.

解题思路 由 $y = f(x)$ 解出 $x = f^{-1}(y)$.在具体操作上,有一些技术上的问题及一些细节,请看解法.

【解】 因为 $f(-x) = -f(x)$,所以 $f(x)$ 为奇函数.

由 $y = \sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1}$,易见,当 $x > 0$ 时 $y < 0$,当 $x < 0$ 时 $y > 0$.为了解出 x ,两边平方,得

$$\begin{aligned}
 y^2 &= x^2 - x + 1 + x^2 + x + 1 - 2\sqrt{(x^2 + 1)^2 - x^2} \\
 &= 2(x^2 + 1) - 2\sqrt{x^4 + x^2 + 1}.
 \end{aligned} \quad (1.1)$$

移项,得

$$2\sqrt{x^4 + x^2 + 1} = 2(x^2 + 1) - y^2,$$

两边再平方,化简,得 $x^2(4 - 4y^2) = 4y^2 - y^4$, $x^2 = \frac{y^2}{4} \left(\frac{4 - y^2}{1 - y^2} \right)$.

解出 x , 并注意到 x 与 y 反号, 得 $x = -\frac{y}{2} \sqrt{\frac{4 - y^2}{1 - y^2}}$. (1.2)

为了确定反函数(1.2)的定义域, 为此要讨论直接函数的值域. 由(1.1)去证 $y^2 < 1$ 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} y^2 = 1$. 若确实如此, 则说明直接函数的值域为 $\{y \mid |y| < 1\}$.

设 $y^2 \geq 1$, 即设 $2(x^2 + 1) - 2\sqrt{x^4 + x^2 + 1} \geq 1$, 移项得 $2x^2 + 1 \geq 2\sqrt{x^4 + x^2 + 1}$, 两边平方得 $4x^4 + 4x^2 + 1 \geq 4(x^4 + x^2 + 1)$, 这是个矛盾. 所以 $y^2 < 1$. 又

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} y^2 &= \lim_{x \rightarrow \infty} (2(x^2 + 1) - 2\sqrt{x^4 + x^2 + 1}) \\
 &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 1 - (x^4 + x^2 + 1)}{x^2 + 1 + \sqrt{x^4 + x^2 + 1}} = 1.
 \end{aligned}$$

所以直接函数的值域为 $\{y \mid |y| < 1\}$, 因此反函数(1.2)的定义域为 $\{y \mid |y| < 1\}$. 改写记号, 所以反函数为

$$y = -\frac{x}{2} \sqrt{\frac{4 - x^2}{1 - x^2}}, \text{ 定义域为 } \{x \mid |x| < 1\}.$$

【评注】 仅由(1.2)式还无法推知反函数(1.2)的定义域, 而应该由“直接函数的值域为反函数的定义域”来确定反函数的定义域.

四、关于函数有界(无界)的讨论

【例 5】 当 $x \neq 0$ 时设 $f(x) = \frac{(x^3 - 1)\sin x}{(x^2 + 1)x}$, $g(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$. 下述命题

① 对任意 $X > 0$, 在 $0 < |x| < X$ 上 $f(x)$ 有界, 但在 $(-\infty, +\infty) (x \neq 0)$ 上 $f(x)$ 无界.

② 在 $(-\infty, +\infty) (x \neq 0)$ 上 $f(x)$ 有界.

③ $g(x)$ 在 $x = 0$ 的去心邻域内无界, 但 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \neq \infty$.

④ $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \infty$.

正确的是

(A) ①、③.

(B) ①、④.

(C) ②、③.

(D) ②、④.

解题思路 由定理 1.1.2 中关于有界性、无界性的若干充分条件来考虑 ①、②、③、④.

【解】 应选(C).

因为 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$, 所以存在 $\delta > 0$, 在 $0 < |x| < \delta$ 上 $f(x)$ 有界. 又 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{(x^2 + 1)x} =$

1, 所以存在 $X > 0$, 在 $|x| > X$ 上 $\frac{x^3 - 1}{(x^2 + 1)x}$ 有界. 而函数 $\sin x$ 是有界的, 所以在 $|x| > X$ 上 $f(x)$ 有界. 而在区间 $[-X, -\delta], [\delta, X]$ 上 $f(x)$ 是连续的, 所以是有界的, 于是知在 $(-\infty, +\infty)$ 上 $f(x)$ 是有界的. ② 正确.

以下证明 ③ 也是正确的. 对于任给的 $M > 0$, 取 $x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, 有

$$g(x_n) = (2n\pi + \frac{\pi}{2}) \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 2n\pi + \frac{\pi}{2},$$

当 $n > \frac{M}{2\pi} - \frac{1}{4}$ 时, $g(x_n) > M$. 即对于任给的 $M > 0$, 总存在 x_n , 其中 $n > \frac{M}{2\pi} - \frac{1}{4}$ (这种 n 总是有的), 使 $g(x_n) > M$, 说明 $g(x)$ 在 $x = 0$ 的去心邻域内无界. 但另一方面, 若取 $x'_n = \frac{1}{2n\pi}$, 则有 $g(x'_n) = 0$. 此说明 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \neq \infty$. 所以 ③ 正确. 选(C).

【评注】 将来到第二章还会见到用导数讨论函数的有界(无界)问题.

§ 2 极 限

内容精讲

一、定义

定义 1.2.1 (数列的极限) 数列 $\{u_n\}$ 与常数 A , 如果它们之间满足下列关系: “对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 存在正整数 $N > 0$, 当(序号) $n > N$ 时, 就有 $|u_n - A| < \epsilon$ ”, 则称数列 $\{u_n\}$ 收敛, 且收敛于 A , 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = A$, 也称“当 $n \rightarrow \infty$ 时 u_n 的极限为 A ”.

定义 1.2.2 (函数的极限) 函数极限的定义有下述一些形式:

序号与记号	定义表述			
	对于任给	存在	当...时	就有
① $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$	$\epsilon > 0$	$X > 0$	$ x > X$	$ f(x) - A < \epsilon$
② $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$	$\epsilon > 0$	$\delta > 0$	$0 < x - x_0 < \delta$	$ f(x) - A < \epsilon$

以上 ① 中 ∞ 改为 $+\infty$ 或 $-\infty$, $|x| > X$ 分别改为 $x > X$ 或 $-x > X$ (即 $x < -X$), 就分别得到 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 与 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 的定义.

以上 ② 中 $x \rightarrow x_0$ 改为 $x \rightarrow x_0^+$ 或 $x \rightarrow x_0^-$, $0 < |x - x_0| < \delta$ 分别改为 $0 < x - x_0 < \delta$ 或 $-\delta < x - x_0 < 0$, 就分别得到 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ 的定义. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 分别称为 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的右、左极限, 这两个极限也可简记为 $f(x_0^+)$ 与 $f(x_0^-)$.

【注】 对于 $\epsilon > 0, X, \delta > 0$ 等等, 有类似于 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = A$ 中关于 $\epsilon > 0, N$ 等等的说明.