现代数学基础丛书·典藏版 111

环与代数

（第二版）

刘绍学 郭晋云
朱 彬 韩 阳 著

科学出版社

现代数学基础丛书·典

环与代数

（第二版）

刘绍学　郭晋云　朱　彬　韩　阳　著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书主要介绍国内外环与代数的最新研究成果和发展方向, 在第一版的基础上, 除删除了一些陈旧内容外, 还增添关于分次环、路代数、箭图表示、有限表示型箭图 4 章, 力图向读者介绍分次环、箭图及其表示最基本的知识, 使之能够了解和进入环与代数当前研究的一些非常具有活力的领域. 我们将介绍分次环、分次模、分次 Artin 环、Smash 积、分次本原环、箭图的路代数、路代数的性质、路代数的张量积和箭图的直积; 箭图表示的基本内容、箭图表示的 Auslander-Reiten 理论; Dynkin 图及其表示, Bernstein-Gelfand-Ponomarev 反射函子, 有限表示型的箭图的刻画(Gabriel 定理)等内容.

本书适合数学及相关专业高年级大学生、研究生、教师及科研人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

现代数学基础丛书: 典藏版. 第 3 辑 / 杨乐主编. —北京: 科学出版社, 2015. 5

ISBN 978-7-03-044411-0

Ⅰ. ①现… Ⅱ. ①杨… Ⅲ. ①数学-丛书 Ⅳ. ①O1-51

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 111256 号

责任编辑: 张 扬 房 阳 / 责任校对: 钟 洋
责任印制: 徐晓晨 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京京华虎彩印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2009 年 1 月第 二 版 开本: B5(720×1000)
2015 年 7 月 印 刷 印张: 20 1/2
字数:394 000

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言, 书籍与期刊起着特殊重要的作用. 许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍, 从中汲取营养, 获得教益.

20 世纪 70 年代后期, 我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经被破坏与中断了 10 余年, 而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着. 1978 年以后, 我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会. 当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述. 据此, 科学出版社陆续推出了多套数学丛书, 其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出, 前者出版约 40 卷, 后者则逾 80 卷. 它们质量甚高, 影响颇大, 对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用.

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者, 针对一些重要的数学领域与研究方向, 作较系统的介绍. 既注意该领域的基础知识, 又反映其新发展, 力求深入浅出, 简明扼要, 注重创新.

近年来, 数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用, 还形成了一些交叉学科. 我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域.

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持, 编辑人员也为其付出了艰辛的劳动. 它获得了广大读者的喜爱. 我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展, 使它越办越好, 为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献.

杨　乐

2003 年 8 月

第二版前言

很高兴看到这本 25 年前出版的《环与代数》基础教材再版, 当年很多通过此书入门“环与代数”的年轻研究生 (包括本书的另三位作者) 如今都已成为活跃在环与代数领域的研究者. 25 年来, 国内外环与代数理论的研究发生了很多变化, 曾经占据中心地位的 Wedderburn-Artin-Jacobson 结构理论已不再有昔日的辉煌. 当年不该有的避开同调代数的做法今日看来是绝对应该补上的一课. 既要保持基础教材的特点, 又要顺应发展, 加强基础的内涵, 这是我们四个人在再版时考虑最多的问题.

环 (代数) 与模是环论的两个主要研究对象. 多看一些具体构建的环类, 多看一些具体环 (代数) 上的模范畴, 使我们在研究环与模时, 在头脑中始终保有环的具体形象及模的具体形象, 应该是非常有益的. 这样我们用新的一章 (第 10 章, 郭晋云撰写) 介绍路代数和张量代数, 用新的一章 (第 11 章, 朱彬撰写) 介绍有限维路代数的模范畴的骨架 ——AR 箭图.

在新的第 9 章 (韩阳撰写) 中, 在对环的 Artin-Jacobson 结构理论温故知新的气氛下, 介绍了分次环的基础. 这些内容在这个基础教材中有一个非常自然的位置, 是本书中非常和谐的一部分.

在新的第 12 章 (郭晋云撰写) 中介绍了有限表示型路代数的分类定理. 这是 20 世纪代数表示论中, 也是环论中最漂亮最富推动力的结果之一, 是可和单李代数分类相媲美的一个重要结果, 是当今介绍有限维代数时不可不提到的一个定理.

由于在第 11, 12 章中广泛地使用了同调代数工具, 又考虑到同调代数已有所普及, 故写了一个同调代数简介 (朱彬撰写), 作为附录放在书末以备读者查询.

此次再版去掉了原书中的第 9 章 (根与根的一般理论) 和第 10 章 (Goldie 环). 有很多理由说明原书的一些章节可以去掉, 也有很多理由表明原书中一些章节, 包括已去掉的两章是该保留下来的. 这样的取舍只是一种做法, 是不需要说明理由的.

一个人写书是一种享受 (每每回味, 仍常享受着当初写根论那一章时自我陶醉的状态), 四个人合作写书是一种愉快, 每一章节都经历了初稿、讨论、修改、再讨论、再修改的过程 (可惜旧章节缺少了这样洗练的过程). 四次集体讨论给我们留下了美好的回忆.

借再版的机会修改了原书中一百余处的笔误和疏漏. 感谢读者 (特别是哈尔滨师范大学张之凰教授寄来三页的勘误表) 的帮助和指正. 期盼读者继续指出和帮助我们改正不妥的地方.

非常欣慰在耄耋之年看到这本书再版. 和本书编辑张扬同志的合作很是愉快, 衷心感谢北京师范大学数学科学学院的大力支持. 非常感谢三位新作者的加盟, 没有他们的合作与热情, 这本书将不会以这样一个新的面貌呈现在读者面前.

刘绍学

2008 年 8 月 18 日于北京

我们三位新作者谨以所撰写的新章节恭祝刘绍学先生八十华诞!

郭晋云、朱　彬、韩　阳

2008 年 8 月 18 日

第一版前言

本书是在我为研究生讲授环论课时所用讲义的基础上写成的.

这是一本介绍非交换结合环理论的基础的书. 结合环在一般 (即不一定是结合的) 环中占居中心地位; 其他重要的非结合环类, 如 Lie 环、Jordan 环、交错环, 几乎都和结合环有相同的发展过程.

非交换结合环论的发展过程, 可以设想分为以下三个阶段: (一) 关于有限维代数的研究, (Albert, 1939) 可以看作是这方面的总结; (二) 关于有极小条件的环的研究, (Artin et al., 1946) 可以看作是这方面的总结; (三) 关于一般 (即不附加有限条件) 环的研究, 以及关于有极大条件环的研究, 并广泛地使用同调代数的工具, (Jacobson, 1964) 可以看作是前者的总结, 而 (Faith, 1973) 可以看作是后者的总结.

在本书中, 我们避开同调代数而介绍这三个发展阶段的基本内容. 在叙述上, 我们基本上按照环论原来的发展过程依次介绍. 当然某些早期结果可由后期较一般的结果直接得出. 然而我们没有去避开这些重复. 这是因为: 某些重复, 以及从这些重复中能看到的发展过程的痕迹, 对初学者来说, 是很有好处的.

Wedderburn 的结构理论对整个环论的影响是很大的, 我们选择的内容基本上都是围绕这一理论的, 为的是使读者对它有一个全面深入的理解.

我们假定读者已经熟悉抽象代数、线性代数以及域的 Galois 理论 (后者只在第三章中用到).

本书的目的是为进一步学习环论中的专门著作和有关论文打下一个良好的基础. 书后附有参考书目, 书中顺便介绍一些未解决的问题, 并介绍一些文献, 有些是属于经典性的, 有些则能提示我们在环论中如何提出问题.

使用本书作为教材可有下面几种方案: (一) 每周四节课两学期可全部讲完; (二) 选用前四章或前五章作为结合代数课, 每周四节课一学期可讲完; (三) 选用后五章 (或去掉第十章) 作为环论课, 每周四节课一学期可讲完; (四) 选用第六、七、九章作为环的根论课, 每周三节课一学期可讲完; (五) 选用第一、二、四章作为有限代数课, 每周两节课一学期可讲完.

作者是从 A.G.Kurosh 教授和张禾瑞教授那里学习环与代数的, 在此对他们表示怀念和感谢. 在编写时主要参考了张禾瑞, 1957; Albert, 1939; Artin et al., 1946; Jacobson, 1943, 1964; Herstein, 1968; Curtis, 1962; Kaplansky, 1969 等文献.

万哲先同志一直鼓励我写一本关于环论的书, 聂灵沼同志对选材提出了宝贵意见, 谢邦杰、许永华同志寄来了我向他们要的材料, 吴品三同志仔细阅读了每一个

证明, 提出了修改意见并补充了一些习题, 在此一并表示感谢. 进修教师谢冰璋、徐忠明、陈维新、厉立德、王春森、马志大、马文新等同志以及研究生张英伯、王成德在学习上述讲义的过程中都提出了许多修改意见, 在此也一并表示感谢.

书中一定会有不当之处, 殷切地希望读者指正.

作　者

于北京师范大学

目　录

第 1 章　有限结合代数的基本概念

1.1　一些基本概念与定义

本节简单介绍一下关于代数的最基本的定义. 关于群与环的相应概念认为是已知的、熟悉的.

定义 1.1.1　域 F 上一个向量空间 A 叫做域 F 上的代数, 如果除数乘 (用 αa 表示, $\alpha \in F, a \in A$) 和 A 的加法运算 (用 $+$ 表示) 外, A 中还定义有一个乘法运算 (用 $\cdot$ 表示或用 ab 表示运算结果, $a, b \in A$) 满足下列条件:

(i) $a \cdot (b+c) = ab + ac, (b+c) \cdot a = ba + ca, \forall a, b, c \in A$①;

(ii) $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b), \forall a, b \in A, \forall \alpha \in F$.

如果 A 是 F 上有限维空间, 就称 A 为 F 上有限 (维) 代数.

如果代数 A 中的乘法适合结合律, 即若有 $(ab)c = a(bc), \forall a, b, c \in A$, 则称 A 为结合代数.

如果代数 A 中乘法适合条件: $ab = ba, \forall a, b \in A$, 则称 A 为交换代数.

如果代数 A 中的乘法适合条件: $a^2 = 0, (ab)c + (bc)a + (ca)b = 0, \forall a, b, c \in A$, 则称 A 为 Lie 代数.

如果代数 A 中乘法适合条件: $ab = ba, (a^2b)a = a^2(ba), \forall a, b \in A$, 则称 A 为 Jordan 代数.

如果代数 A 中乘法适合条件: $a(ab) = (aa)b, a(bb) = (ab)b, \forall a, b \in A$, 则称 A 为交错代数.

设 A 是域 F 上的代数, 不一定是有限维的, 也不一定是结合代数, 与群的子群、环的子环等概念相平行的可定义 A 的子代数的概念. 与群、环中相平行的还可定义代数的同构、代数的同态等概念.

定义 1.1.2　设 A 是域 F 上的代数, $B \subseteq A, B$ 不空. 如果

(i) B 是 A 的子空间;

(ii) B 对 A 中的乘法是封闭的, 即有

$$bc \in B, \quad \forall b, c \in B,$$

则称 B 是 A 的子代数.

---

① 指对 A 中所有的 a, b, c, 其中, $\forall$ 指“所有的”.

易见, 结合 (或 Lie- 或 Jordan-) 代数的子代数本身仍是结合 (或 Lie- 或 Jordan-) 代数, 有限代数的子代数仍是有限代数.

设 X 是代数 A 的一个子集. A 中含有 X 的一切子代数的交当然仍是一个子代数, 称之为由 X 生成的子代数, 记作 $\langle X\rangle$. 易见, $\langle X\rangle$ 是由一切形如 $\alpha x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$, $\alpha\in F, x_{i_i}\in X$ 的有限和组成的.

定义 1.1.3　设 A, B 都是域 F 上的代数, φ 是集 A 到 B 内的一个对应, 如果 φ 保持运算, 即若有

(i) $(ab)\varphi=(a\varphi)(b\varphi)$;

(ii) $(\alpha a)\varphi=\alpha(a\varphi)$;

(iii) $(a+b)\varphi=a\varphi+b\varphi$.

$\forall a,b\in A,\forall\alpha\in F$, 则称 φ 是 F 上代数 A 到 F 上代数 B 内的一个同态对应, 或简称代数 A 到代数 B 的一个同态对应.

如果 φ 是代数 A 到代数 B 的一个同态对应, 且知 φ 还是集 A 到集 B 上的对应, 则称 φ 为代数 A 到代数 B 的一个满同态对应, 此时记 $A\sim B$.

如果 φ 是代数 A 到代数 B 的满同态对应, 且知 φ 还是集 A 到集 B 上的一一对应, 则称 φ 为代数 A 到代数 B 的同构对应. 此时记作 $A\simeq B$.

如果 φ 是代数 A 到代数 B 的一个子代数上的同构对应, 则称 φ 为代数 A 到代数 B 的入射同态对应或简称入射对应, 并称 A 同构嵌入于 B.

易见, 若已知 $A\sim B$, 则若 A 是结合 (Lie, Jordan, 交换, 有限) 代数, B 也必是. 反过来一般是不对的, 即若已知 B 是结合的, A 当然不一定是结合的.

与代数的同态对应密切有关的是代数的理想概念, 这是和群的正规子群与环的理想相平行的概念.

定义 1.1.4　设 φ 是代数 A 到代数 B 的一个同态对应, 称 A 的子集 $K=\{x\in A|x\varphi=0\}$ 为同态 φ 的核.

定义 1.1.5　说 $K\subseteq A$ 是代数 A 的理想, 如果

(i) K 是 A 的子代数;

(ii) $KA\subseteq K, AK\subseteq K$[①].

和环的情况完全类似地可以证明, 域 F 上代数 A 的同态对应的核是 A 的理想. 反过来, 对于 F 上代数 A 的任意理想 I 可引进集 A 的一个等价关系 $\sim$: $a,b\in A, a\sim b$ 当且仅当 $a-b\in I$. 用 $\overline{a}$ 表示 a 所在的 $\sim$ 等价类, 而用 $\overline{A}$ 表示一切 $\overline{a}, a\in A$, 的集. 在 $\overline{A}$ 中引入下列运算: $\alpha\overline{a}=\overline{\alpha a}$, $\overline{a}+\overline{b}=\overline{a+b}, \overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{ab}, \alpha\in F, \overline{a}, \overline{b}\in\overline{A}$. 利用理想 I 的性质不难验证上述定义是合理的, 即 $\alpha, \overline{a}, \overline{b}$ 的运算结果 $\overline{a+b}, \overline{ab}, \overline{\alpha a}$ 与代表 a, b 之选择无关. 与我们熟悉的商空间和商环的情况一样, 可验证 $\overline{A}$ 作成 F

① KA 表示一切形如 $x\alpha, x\in K, \alpha\in A$ 的元素的有限和.

上的一个代数. 这样得到的代数 $\overline{A}$, 将称之为 代数A关于理想I的商代数 或简称为A的商代数. 令

$$\varphi : A \to \overline{A},$$
$$a \mapsto \overline{a}^{①},$$

则不难证明 φ 是代数到其商代数 $\overline{A}$ 上的满同态对应, φ 的核恰是定义等价关系 $\sim$ 时用的那个理想 I. 和环的情形一样, 把这样定义的 φ 称为代数 A 到其商代数 $\overline{A}$ 上的 自然同态对应. 为了指明理想 I, 常将 $\overline{A}$ 记作 $A/I, \overline{a} = a + I$.

与群或环的同态基本定理完全平行的有下述关于代数的同态基本定理, 同构定理, 略去其证明.

定理 1.1.1 设 A 是域 F 上的代数, 则

(i) A 的商代数 $\overline{A}$ 是 A 的同态象, 即有 $A \sim \overline{A}$;

(ii) A 的任意同态象 B, 即若 $A \sim B$, 则代数 B 必和 A 的一个商代数同构.

定理 1.1.2 设 φ 是代数 A 到代数 A' 上的满同态对应, φ 的核是 I, 设 $B \supseteq I$ 是 A 的理想, 则 $B\varphi^{②} = B'$ 是 A' 的理想且 $A/B \simeq A'/B'$, 其间的同构对应可取作 $a + B \mapsto a\varphi + B'$, 并称之为 A/B 与 A'/B' 间的自然同构对应.

定理 1.1.3 设 A 是代数, B 是 A 的子代数而 I 是 A 的理想, 则

(i) $B \bigcap I$ 是 B 的理想;

(ii) $(B + I)/I \simeq B/(B \bigcap I)$, 其间的同构对应可取作 $b + I \mapsto b + (B \bigcap I)$.

这些定理的证明可仿照关于群和环的平行定理的证法去证明.

最后给出下面的定义:

定义 1.1.6 代数 A 的子代数 B, 若满足条件 $AB \subseteq B (BA \subseteq B)$, 就称之为代数 A 的左 (右) 理想.

1.2 有限结合代数的例子

以下将只讨论有限结合代数, 如无特别声明, "代数" 将永远指有限结合代数.

在讨论任意代数之前, 先看一批具体代数的例子.

代数与环的差别在于环的加法群只是一个 Abel 群, 而代数的加法群是域 F 上的向量空间, 这样, 代数就比环有一个结构简单得多的加法群. 在选定向量空间 A 的一个基: $a_i, i = 1, \cdots, n$ 后, A 中任意元素 a 都可唯一地表示成

① 指 φ 是集 A 到 $\overline{A}$ 的对应, 而具体对应法则是 $a \mapsto \overline{a}, a \in A$.

② 指 B 在 φ 下的象, 即 $B\varphi = \{x \in A' | x = b\varphi, b \in B\}$.

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i, \quad \alpha_i \in F.$$

若 $b \in A$ 而 $b = \sum \beta_i a_i$, 则

$$ab = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j (a_i a_j).$$

这样, 基元 a_i 之间的乘法表就完全确定了整个代数 A 的乘法运算了. 易见 A 是结合代数, 当且仅当基元之间的乘法满足结合律, 即

$$(a_i a_j) a_k = a_i (a_j a_k), \quad \forall i, j, k.$$

因此, 要给出域 F 上 n 维结合代数 A, 只要给定 F 和维数 n, 再给定 A 的某个基的基元间满足结合律的乘法表就行了.

例 1.2.1　取 $F = A$ 为全体实数, 对通常数的加法和乘法, A 是实数域 F 上的一维结合代数. 易见这个代数是可除代数, 即有 $1 \in A$, 使 $1a = a1 = a, \forall a \in A$, 且对任意 $0 \neq a \in A$, $\exists$ 唯一的 $b \in A$, 使得 $ab = ba = 1$. 或简言之, 说一个代数 A 是可除代数, 指 $\{A \backslash 0, \cdot\}$ 是一个群.

例 1.2.2　取 F 为实数域而 C 为复数域, 对通常数的加法和乘法, C 是 F 上二维结合代数. 易见它也是可除代数.

例 1.2.3　取 F 为实数域, Q 为 F 上四维空间以 $1, i, j, k$ 为基, 定义基元间的乘法表如下:

$\cdot$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

直接检验可知, 基元之间的乘法有结合律, 因而 Q 是结合代数. 1 是 Q 的单位元. Q 中元称为四元数.

附注　Q 中单位元 1 和域 F 中的单位元 1 是两个不同元素, 然而用同样的符号将不致引起混乱.

Q 还是可除代数, 这可由下述方法证得: Q 的任意元 a 可唯一地表成

$$a = \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot i + \alpha_3 \cdot j + \alpha_4 \cdot k, \quad \alpha_1, \cdots, \alpha_4 \in F,$$

规定

$$\overline{a} = \alpha_1 \cdot 1 - \alpha_2 \cdot i - \alpha_3 \cdot j - \alpha_4 \cdot k,$$

称之为 a 的共轭元. 直接计算可得与复数类似的结果: $a\cdot\overline{a}=\overline{a}\cdot a=(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2)\cdot 1$. 将系数 $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2$ 记作 $|a|$, 称之为四元数 a 之模. 若 $a\neq 0$, 则 $|a|\neq 0$, 此时有

$$a\cdot(|a|^{-1}\overline{a})=(|a|^{-1}\overline{a})\cdot a=1,$$

即 Q 的每一非零元都有逆元, 即 Q 是可除代数.

有趣的是, 上面 3 个例子给出实数域上所有可能的有限可除结合代数, 这就是著名的 Frobenius 定理 (参看 3.6 节).

定义 1.2.1 称代数 A 为单代数, 如果除其本身和 0 以外 A 没有别的理想, 并且 $A^2\neq 0$.

由于 A^2 是 A 的理想, 如果 A 没有真理想 (即异于 A 本身和 0 的理想), 则必有 $A^2=0$ 或 $A^2=A$. 因而单代数的定义中要求 $A^2\neq 0$ 的这一条件, 只是把一维零乘代数 ($A^2=0$ 的代数 A, 称为零乘代数) 这一简单情况排除在外.

易见, 可除代数是单代数. 单代数不一定是可除代数可由下例看出.

例 1.2.4 设 F 是任意域, n 为任意正整数, 令 F_n 为 F 上 $n\times n$ 矩阵的全体, 则对通常的矩阵运算, F_n 是 F 上 n^2 维结合代数. 令 e_{ij} 为第 i 行第 j 列交叉处为 1, 其余位置全是 0 的矩阵, 并将称之为矩阵单位, 则 $e_{ij},i,j=1,\cdots,n$ 组成 F_n 的一个基, 其乘法表为

$$e_{ij}\cdot e_{lm}=\delta_{jl}e_{im},\quad i,j,l,m=1,\cdots,n,$$

其中, δ_{jl} 为 Kronecker 符号 (即当 $j=l$ 时, $\delta_{jl}=1$, 否则 $\delta_{jl}=0$).

F_n 是一个单代数. 欲证此, 只需证 $0\neq a\in F_n$, 则 a 所生成的理想 (a)(即包含 a 的所有理想之交) 必等于 F_n. 设 $a=\sum\alpha_{ij}e_{ij}$, $\alpha_{ij}\in F$. 因为 $a\neq 0,\alpha_{ij}$ 中必有一, 说是 $\alpha_{st}\neq 0$. 用 F_n 的元素右乘或左乘 a, 其结果当然仍属于理想 (a), 故

$$\alpha_{st}^{-1}(e_{ss}ae_{ii})=e_{st}\in(a),$$
$$e_{is}e_{st}e_{tj}=e_{ij}\in(a),\quad\forall i,j,$$

即全部基元 e_{ij} 都在 (a) 中, 故 $(a)=F_n$, 即证得 F_n 是单代数.

在第 2 章中将看到, F 上有限结合单代数可通过 F 上可除代数以及 F_n 完全刻画之.

例 1.2.5 设 A 为域 F 上的 n 维空间. 在 A 中引进零乘法, 即规定 A 中任意两个元素的乘积都是零. 这样 A 成为零乘代数, 这样的代数当然是结合代数.

例 1.2.6 设 F 为任意域, n 为任意大于 1 的正整数. 设 N 为 F 上所有上三角 $n\times n$ 矩阵的集, 即 N 为一切形如