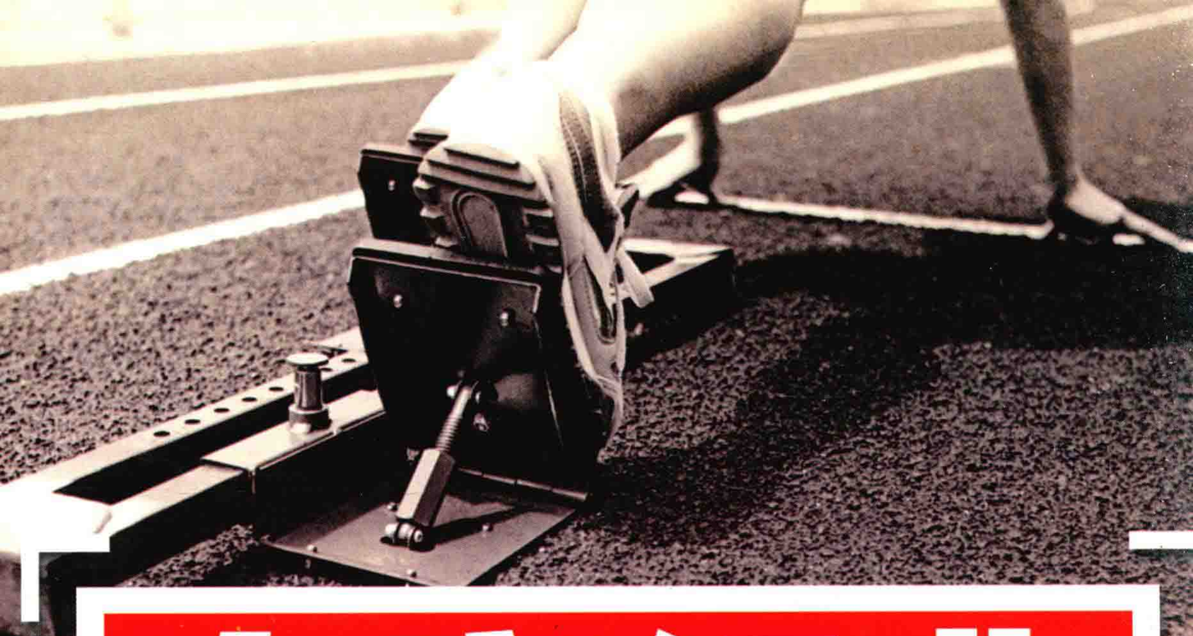


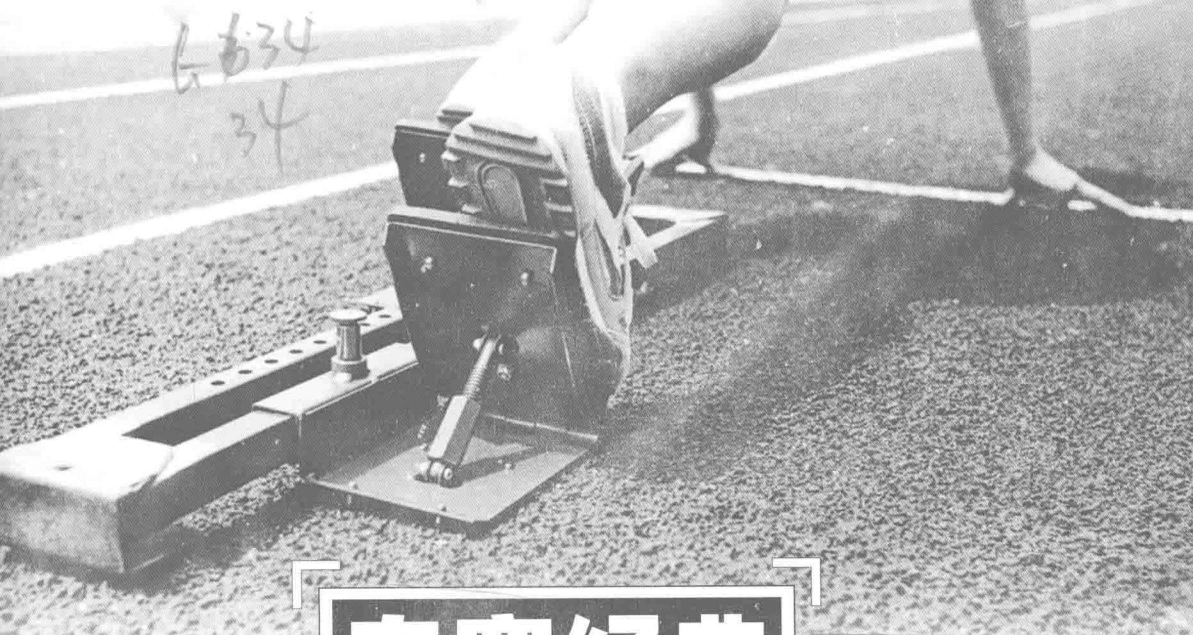
奥赛经典

分级精讲与测试系列

高二物理

◇黄洪才/编著

湖南师范大学出版社



奥赛经典

分级精讲与测试系列

高二物理

◇黄洪才／编著

湖南师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

分级精讲与测试系列·高二物理 /黄洪才编著 .—长沙:湖南师范大学出版社,2004.5
(奥赛经典丛书)
ISBN 7-81081-425-7

Ⅰ.分… Ⅱ.黄… Ⅲ.物理课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 038749 号

分级精讲与测试系列·高二物理

黄洪才 编著

◇丛书策划:陈宏平 廖建军 周玉波 何海龙
◇组稿编辑:何海龙
◇责任编辑:尹金石
◇责任校对:刘琼琳
◇出版发行:湖南师范大学出版社
地址/长沙市岳麓山 邮编/410081
电话/0731.8853867 8872751 传真/0731.8872636
网址/www.hunnu.edu.cn/press
◇经销:湖南省新华书店
◇印刷:长沙华中印刷厂

◇开本:730×960 1/16
◇印张:15.75
◇字数:326 千字
◇版次:2004 年 10 月第 1 版 2005 年 3 月第 2 次印刷
◇印数:5001—10000 册
◇书号:ISBN 7-81081-425-7/G·269
◇定价:15.00 元

目　　录

第九讲　静电场

竞赛要点

一、电学实验定律

1. 库仑定律

真空中两个静止的点电荷之间相互作用的电力，跟它们的电荷量的乘积成正比，跟它们的距离的二次方成反比，作用力的方向在它们的连线上，即

$$F = k\frac{Q_1Q_2}{r^2}.$$

式中的 k 是一个常量，叫做静电力常量.在国际单位制中，将 k 写成$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$，这样，库仑定律又写成

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_1Q_2}{r^2}.$$

$\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\cdot m^2}$，为真空介电常数.相应地，$k = 9.0\times10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2}$.

同种电荷相互排斥，异种电荷相互吸引.

库仑定律研究的是两个点电荷间的相互作用力.当空间中有两个以上点电荷时，作用于每一电荷上的静电力等于其他点电荷单独存在时作用于该电荷静电力的矢量和.

2. 电荷守恒定律

电荷既不能创造，也不能消灭，只能从一个物体转移到另一个物体，或者从物体的一部分转移到另一部分，在转移过程中，电荷的总量不变.

二、电场强度

1. 电场强度

放入电场中某点的电荷所受的电场力 F 跟它的电荷量 q 的比值，叫做该点的电场强度，简称场强，即

$$E = \frac{F}{q}.$$

电场强度是描述电场的力的性质的物理量，跟试探电荷无关.

2. 电场线

为了形象地描述场强,我们在电场中画出一些有方向的曲线,使得:①曲线上每一点的切线方向都跟该点的场强方向一致;②穿过跟电场方向垂直的单位面积的曲线条数跟该处的场强大小成正比.这样的曲线叫做电场线.

在电场中某点取一跟该处场强垂直的微小面积ΔS,设穿过该面积的电场线为ΔN条,则$\Delta N/\Delta S$称为该点的电场线数密度.我们规定,某点的电场线数密度与该点场强的数值相等,即

$$E=\frac{\Delta N}{\Delta S}.$$

因此,电场线的疏密程度反映了场强的大小.

3. 高斯定理

通过电场中某个面的电场线条数叫做穿过这个面的电通量.设面元ΔS的法线跟场强方向的夹角为θ(如图9-1),则穿过面元的电通量

$$\Delta\Phi_e=\vec{E}\cdot\Delta\vec{S}=E\Delta S\cos\theta.$$

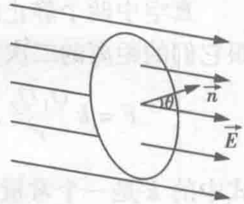


图9-1

高斯定理:通过一个任意闭合曲面S的电通量,等于该曲面内所有电荷电荷量的$\frac{1}{\varepsilon_0}$倍,即

$$\sum(\vec{E}\cdot\Delta\vec{S})=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i.$$

高斯定理表明静电场是有源场.利用高斯定理可以简便地求出某些具有对称性的电场的电场强度.

4. 场强叠加原理

若空间存在多个点电荷,则空间某点的场强等于各个点电荷在此点的场强的矢量和:

$$E=\sum E_i.$$

将带电体分成很多带电小体积元,每个小体积元可视为点电荷,因此,利用场强叠加原理,可求得带电体产生的电场的场强.

5. 几种典型电场的场强

①点电荷产生的电场　设电荷的电荷量为Q,则

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2}.$$

②无限长的均匀带电细棒产生的电场　设电荷量的线密度为λ,则

$$E=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda}{r}.$$

③均匀带电球壳产生的电场　设球壳的半径为 R,电荷量为 Q,则

$$E=\begin{cases}0 & (r<R),\\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{Q}{r^2} & (r>R).\end{cases}$$

④均匀带电球体产生的电场　设球的半径为 R,电荷量为 Q,则

$$E=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{Qr}{R^3} & (r<R),\\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{Q}{r^2} & (r\geqslant R).\end{cases}$$

⑤无限大的均匀带电平面产生的电场　设带电平面电荷量的面密度为 σ,则

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

显然,一对无限大的均匀带电平行平面,带等量的异种电荷时,两板之外场强为零,两板之内为匀强电场,场强为 σ/ε_0.

三、电势

1. 环路定理

电荷在静电场中沿任意闭合回路运行一周,静电力所做的总功为零.换句话说,电荷在静电场中两点间移动时,静电力所做的功只与两点的位置有关,与路径无关,即

$$\sum(\vec{E}\cdot\Delta\vec{l})=0.$$

环路定理表明静电场是保守场.

2. 电势差

电荷在电场中由一点 A 移到另一点 B 时,电场力所做的功与电荷量的比值,叫做 A、B 两点间的电势差:

$$U_{AB}=\frac{W_{AB}}{q}.$$

3. 电势

在电场中选定一个参考点(通常选大地或无限远处),某点 A 与参考点 O 之间的电势差叫做 A 点的电势,即 $\varphi_A=U_{AO}$.

电场中某点的电势,等于单位正电荷由该点移到参考点(零电势点)时电场力所做的功,即 $\varphi_A=W_{AO}$;电场中两点间的电势差等于这两点的电势之差,即 $U_{AB}=\varphi_A-\varphi_B$.

电势是描述电场的能的性质的物理量,跟试探电荷无关.

4. 电势能

电荷在电场中具有电势能,电荷在某点的电势能等于该点的电势与电荷量的乘积:

$$\varepsilon_A = q\varphi_A.$$

电荷在电场中两点间移动时,电场力所做的功等于电势能的减少量:

$$W_{AB} = \varepsilon_A - \varepsilon_B.$$

5. 等势面

为了形象地描述电势分布,我们在电场中画出一些曲面,使得同一曲面上各点的电势相等,这些曲面叫等势面.

利用等势面也可以形象地描述场强.等势面上任一点的场强方向都跟等势面垂直;若相邻等势面的电势差相等,则等势面的疏密程度可反映场强的大小.

6. 电势梯度

电势梯度是一个矢量,它的方向是电势升高最快的方向,它的大小是该方向上电势随距离的变化率.因此,电场中某点的电场强度就是该点电势梯度的负值:

$$E = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta l}.$$

7. 电势叠加原理

若空间存在多个点电荷,则空间某点的电势等于各电荷单独存在时在该点的电势的代数和:

$$\varphi = \sum\varphi_i.$$

8. 几种典型电场的电势(取无限远处为参考点)

①点电荷产生的电场　设电荷的电荷量为 Q,则

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r}.$$

②均匀带电球壳产生的电场　设球壳的电荷量为 Q,半径为 R,则

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{Q}{R} & (r\leqslant R), \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{Q}{r} & (r > R). \end{cases}$$

③均匀带电球体产生的电场　设球的电荷量为 Q,半径为 R,则

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(3-\dfrac{r^2}{R^2}\right) & (r\leqslant R), \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{Q}{r} & (r > R). \end{cases}$$

四、电场中的导体和电介质

1. 静电感应

将导体置于静电场中,导体内的自由电荷在电场力的作用下定向运动,导体两端

出现等量的异种电荷,这种现象叫静电感应.

当感应电荷产生的电场与外电场叠加使得导体内部的场强为零时,电荷分布不再变化,这种状态称为静电平衡状态.其特点:

①导体是等势体,导体表面是等势面;

②净电荷只分布在导体表面;

③导体表面附近的场强与导体表面垂直,其大小与导体表面对应点的电荷面密度成正比,即 $E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

2. 静电屏蔽

当导体壳内无带电体时,静电平衡时电荷分布在外表面上,导体及壳内空间场强为零.因此,导体壳能保护它的内部空间,使之不受外界电场或自身所带电荷的影响,这种现象叫静电屏蔽.

如果导体壳接地,则导体壳可屏蔽外部空间,使其外部不受内部电荷的影响.

3. 电介质的极化

由于分子结构的不同,电介质分为两类:一类介质分子的正负电荷中心重合,这样的分子称为无极分子;一类介质分子的正负电荷中心不重合,形成一个电偶极子,这样的分子称为有极分子.

将电介质置于静电场中,无极分子正负电荷中心错开,沿外电场方向形成电偶极子;有极分子的电偶极矩将趋于按外电场方向排列,两端面出现等量的异种电荷(如图9-2),这种现象叫电介质的极化,两端面产生的电荷称为极化电荷或束缚电荷.

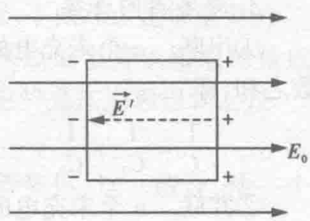


图9-2

由于极化电荷产生的附加电场 E' 跟外电场 E_0 反向,所以介质内的场强 E 的比外场强 E_0 小.我们把 E_0 与 E 的比值称为电介质的相对介电常数:

$$\varepsilon_r=\frac{E_0}{E}\quad(\varepsilon_r>1).$$

电介质的相对介电常数与真空介电常数的乘积 $\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0$,称为电介质的绝对介电常数,简称介电常数.

点电荷 Q 放在均匀的无限大介质中时,场强和电势分别为

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{Q}{r^2},\quad \varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{Q}{r}.$$

五、电容

1. 孤立导体的电容

设孤立导体的电荷量为 Q,电势(取无限远为参考点)为 φ,则 Q/φ 与 Q 无关.我们定义这个比值为孤立导体的电容,即

$$C=\frac{Q}{\varphi}.$$

对半径为 R 的球形导体,$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{R}$,故其电容 $C=4\pi\varepsilon_0 R$.

2. 电容器的电容

任何两个彼此绝缘又相隔很近的导体,都可以看成是一个电容器.电容器所带的电荷量与电容器两极间电势差的比值叫电容器的电容,即

$$C=\frac{Q}{U}.$$

几种常见电容器的电容:

①平行板电容器:$C=\frac{\varepsilon S}{d}$;

②球形电容器:$C=4\pi\varepsilon\cdot\frac{R_1R_2}{R_1-R_2}$.

3. 电容器的连接

①串联　n 个未充电的电容器串联时的总电容的倒数等于各个电容器电容的倒数之和,即

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_n}.$$

②并联　n 个未充电的电容器并联时的总电容等于各个电容器电容之和,即

$$C=C_1+C_2+\cdots+C_n.$$

4. 电容器的能量

用电池对电容器充电,实质上是电源做功将电荷从电容器的一个极板移到另一个极板.在此过程中,电池的化学能转化成了电容器的电能.

对一给定的电容器,$U-Q$ 图象如图 9-3 所示.因 $\Delta W=U\Delta Q$,所以图象下的"面积"就是电池克服电场力做的功,也等于电容器储存的电能,即

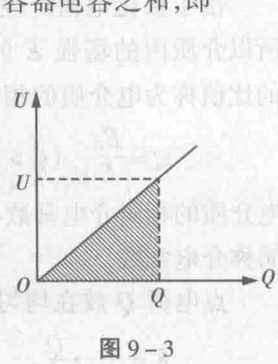


图 9-3

$$W=\frac{1}{2}QU=\frac{1}{2}CU^2=\frac{Q^2}{2C}.$$

名题精析

例1 （第十二届全国中学生物理竞赛决赛试题）正四面体 $ABCD$ 各面均为导体，但又彼此绝缘，如图9-4所示，已知带电后四个面的电势分别为 φ_1、φ_2、φ_3、φ_4，求四面体中心 O 的电势 φ.

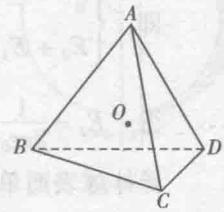


图9-4

解析 先任意考查一面，当其电势升高后 O 点电势也将升高，且满足线性关系．再根据电势叠加原理，O 点电势可表示为

$$\varphi = k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + k_3\varphi_3 + k_4\varphi_4. \quad ①$$

其中 k_1、k_2、k_3、k_4 为常数，只与导体的形状、大小及 O 点相对导体的位置有关．

由于 $ABCD$ 是正四面体，且 O 在其中心，根据对称性，k_1、k_2、k_3、k_4 相等，即

$$\varphi = k(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4). \quad ②$$

假设 φ_1、φ_2、φ_3、φ_4 相等，均为 φ_0，则系统为一等势体，$\varphi = \varphi_0$，得 $k = \frac{1}{4}$，所以 O 点电势

$$\varphi = \frac{1}{4}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4). \quad ③$$

启迪与思考 初看此题，似乎很难求解．要顺利解答本题，下面几点是很重要的：

(1)带电导体的电势跟它本身的电荷量成正比，其附近某点的电势也跟电荷量成正比，因而 O 点的电势跟各面的电势存在线性关系，再根据电势叠加原理得到①式．

(2)根据对称性，$k_1 = k_2 = k_3 = k_4$，从而得到②式．

(3)为求得 k，我们假设 $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4$，则系统为一等势体．这一假设，使一个陌生的问题转化成为一个熟悉的问题（静电平衡问题），从而得到 $k = \frac{1}{4}$.

例2 （美国麻省理工学院1981年研究生招生试题）一个带电荷量为 Q 的导体球被切成两半．若要保持两半球还在一起，至少需要多大的力？已知球的半径为 R.

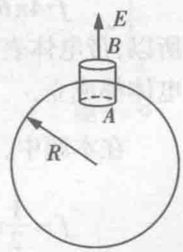


图9-5

解析 对导体球，电荷分布在导体的表面上，电荷面密度

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}.$$

如图9-5，在导体表面附近取一个底面积为 ΔS（很小），高度极小的高斯面．设电荷 $\Delta Q = \sigma\Delta S$ 在 A、B 处的场强大小为 E_1，其他电荷在 A、B 处的场强大小为 E_2，因 A、B 处的场强

$$E_A=0,\quad E_B=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{R^2},$$

即 $\begin{cases}E_2-E_1=0,\\ E_2+E_1=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{Q}{R^2},\end{cases}$

得 $E_2=\dfrac{1}{8\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{Q}{R^2}.$

导体球表面单位面积所受的力(力密度)

$$f=\frac{\sigma\Delta S\cdot E_2}{\Delta S}=\frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4}.$$

将导体球等效为一个气体球,气体球的压强 $P=f$,则两个半球之间的相互排斥力

$$F=f\cdot\pi R^2=\frac{1}{32\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q^2}{R^2}.$$

为使两半球还在一起,所需的外力的最小值

$$F_{\min}=F=\frac{1}{32\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q^2}{R^2}.$$

启迪与思考 (1)上述解答中用高斯定律得出了带电导体表面电荷所受力的密度.下面从能的角度分析这一问题.设想带电体的半径由 R 变为 $R+\Delta R$(如图 9-6),则图中阴影部分的场强由 E 变为零.电场能减少

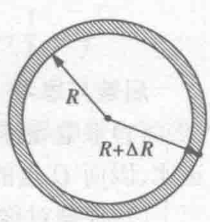


图 9-6

$$\Delta W=w\cdot 4\pi R^2\Delta R.$$

其中 w 是电场的能量密度,可以证明(请读者自行证明)

$$w=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2.$$

根据功和能的关系,电场力所做的功等于电势能的减少量,故

$$f\cdot 4\pi R^2\Delta R=w\cdot 4\pi R^2\Delta R,\quad 即\ f=w.$$

所以,带电体表面电荷受力密度等于其表面附近的电场能量密度.这一结论对任何带电体都成立.

在本题中,$E=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{Q}{R^2}$,所以

$$f=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2=\frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4}.$$

这正是前面所得结果.

(2)本题的另一种解法:

设想右半球在电场力及外力 F 作用下缓慢分开很小的距离 x,如图 9-7 所示,则

图中阴影区域的场强由 E 减为零. 电场能减少

$$W=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\cdot\Delta V=\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{R^2}\right)^2\Delta V.$$

其中 ΔV 是阴影区域的体积, 等于 πR^2x, 故

$$W=\frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0 R^2}x.$$

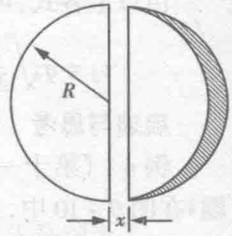


图 9-7

电场能的减少量等于电场力做的功, 即 $A_1=\frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0 R^2}x$. 因导体缓慢分开, 根据动能定理, 外力 F 所做的功 A_2 与 A_1 的代数和为零, 即

$$A_1-Fx=0.$$

故 $$F=\frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

例 3 (第十九届全国中学生物理竞赛复赛试题) 如图 9-8 所示, 在水平光滑的绝缘桌面上, 有三个带正电的质点 1、2、3, 位于边长为 l 的等边三角形的三个顶点处, C 为三角形的中心, 三个质点的质量皆为 m, 带电量皆为 q. 质点 1、3 之间和 2、3 之间用绝缘的轻而细的刚性杆相连, 在 3 的连接处为无摩擦的铰链. 已知开始时三个质点的速度为零, 在此后运动过程中, 当质点 3 运动到 C 处时, 其速度多大?

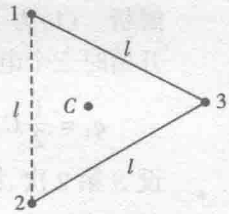


图 9-8

解析 C 是三角形的中心, 即系统的质心, 根据质心运动定理, 质心固定不动, 当质点 3 到达 C 处时, 三个质点必在同一直线上. 根据对称性, 质点 1、2 的运动情况相对质点 3 对称. 因此, 此时三个质点的相对位置如图 9-9 所示, 且 $v_1=v_2$.

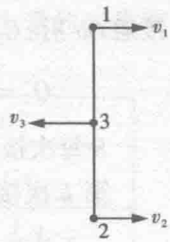


图 9-9

根据动量守恒定律

$$mv_3-mv_1-mv_2=0.$$

开始时系统的电势能

$$E_{p1}=3k\frac{q^2}{l}.$$

图 9-9 所示状态系统的电势能

$$E_{p2}=2k\frac{q^2}{l}+k\frac{q^2}{2l}.$$

质点运动过程中, 只有电场力做功, 所以系统的电势能与动能之和是守恒的, 即

$$E_{p1}=E_{p2}+\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}mv_2^2+\frac{1}{2}mv_3^2.$$

由以上各式,可解得

$$v_3 = q\sqrt{\frac{2k}{3ml}}.$$

启迪与思考 请读者进一步分析,三个质点此后将怎样运动?

例4 (第十一届全国中学生物理竞赛预赛试题)在图9-10中,三个电容器 C_1、C_2、C_3 的电容值均为 C,电源的电动势为 ε,R_1、R_2 为定值电阻,S 为单刀双掷开关.开始时,三个电容器都不带电,先接通 Oa,再接通 Ob,又接通 Oa,再接通 Ob……如此反复换回,设每次接通前都已达到静电平衡,试求

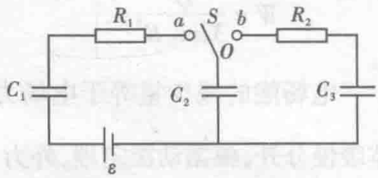


图9-10

(1)当 S 第 n 次接通 Ob 并达到平衡后,每个电容器两端的电压各是多少?

(2)当反复换向的次数无限增多时,在所有电阻上消耗的总电能是多少?

解析 (1)为了求每个电容器两端的电压,我们先来求每个电容器上的电荷量.

开始时三个电容器都不带电,S 第1次接通 Oa 后,C_1 的带电量

$$q_1 = \frac{1}{2}C\varepsilon.$$

设 S 第2次、第3次……接通 Oa 时,电源对 C_1 充电的电荷量分别为 q_2、q_3……则 S 第 n 次接通 Oa 后 C_1 的带电量

$$Q_1 = q_1 + q_2 + \cdots + q_n.$$

因 S 接通 Oa 时,C_1、C_2 串联,C_1、C_2 增加的电量相等.又因 C_2、C_3 相等,所以 S 接通 Ob 后,C_2、C_3 的带电量相等.S 第 n 次接通 Ob 后,C_2、C_3 的带电量

$$Q_2 = Q_3 = \frac{1}{2}(q_1 + q_2 + \cdots + q_n).$$

S 每次接通 Oa 并达到平衡时,C_1、C_2 的电压之和等于 ε.

第 k 次接通 Oa 后,

$$\frac{1}{C}(q_1 + q_2 + \cdots + q_k) + \frac{1}{C}\left[\frac{1}{2}(q_1 + q_2 + \cdots + q_{k-1}) + q_k\right] = \varepsilon.$$

第 $k+1$ 次接通 Oa 后,

$$\frac{1}{C}(q_1 + q_2 + \cdots + q_{k+1}) + \frac{1}{C}\left[\frac{1}{2}(q_1 + q_2 + \cdots + q_k) + q_{k+1}\right] = \varepsilon.$$

以上两式相减,得

$$q_{k+1} = \frac{1}{4}q_k.$$

可见,C_1 每次充电时增加的电量是按等比数列的规律增加的,其通项

$$q_k=\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{2}C\,\varepsilon.$$

所以 $Q_1=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{2}C\varepsilon=\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]C\,\varepsilon,$

$$Q_2=Q_3=\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]C\,\varepsilon.$$

由 $U=\frac{Q}{C}$,得 S 第 n 次接通 Ob 并达到平衡时,三个电容器的电压分别为

$$U_1=\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]\varepsilon,\qquad U_2=U_3=\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]\varepsilon.$$

(2)当 $n\to\infty$ 时,C_1 的带电量,也就是通过电源的电量

$$Q=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]C\,\varepsilon=\frac{2}{3}C\,\varepsilon.$$

电源所做的功

$$A=Q\varepsilon=\frac{2}{3}C\,\varepsilon^2.$$

电容器储存的电场能

$$W=\frac{1}{2C}Q^2+\frac{1}{2C}\left(\frac{Q}{2}\right)^2+\frac{1}{2C}\left(\frac{Q}{2}\right)^2=\frac{3}{4}\cdot\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{3}C\,\varepsilon^2.$$

根据能量守恒定律,所有电阻消耗的总电能

$$W_R=A-W=\frac{1}{3}C\,\varepsilon^2.$$

启迪与思考 (1)解答本题的关键是寻找到 C_1 每次充电后增加的电量的变化规律,其规律也可用逐次递推法得出,结果如下:

接通 Ob 的次数	Q_1	Q_2	Q_3
1	$\frac{1}{2}C\,\varepsilon$	$\frac{1}{4}C\,\varepsilon$	$\frac{1}{4}C\,\varepsilon$
2	$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}\right)C\,\varepsilon$	$\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{4}\right)C\,\varepsilon$	$\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{4}\right)C\,\varepsilon$
3	$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\right)C\,\varepsilon$	$\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\right)C\,\varepsilon$	$\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\right)C\,\varepsilon$
4	$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}\right)C\,\varepsilon$	$\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}\right)C\,\varepsilon$	$\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}\right)C\,\varepsilon$
⋮			
n	$\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right]C\,\varepsilon$	$\frac{1}{4}\left[1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right]C\,\varepsilon$	$\frac{1}{4}\left[1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right]C\,\varepsilon$

(2)从本题的解答可以看出,电源对电容器充电时,电容器储存的电场能仅是电源消耗化学能的一半,即电容器充电时的效率为50%.这一结论具有普遍意义.另一半的能量将转化为内能或以电磁波的形式辐射到空间中去.如本例中,这些能量可认为是电阻产生的内能.请读者思考的问题是:如果电路的电阻可以忽略,能量的转化情况怎样?题目的解答结果是否还一样?

例5 一点电荷 $+q$ 和半径为 a 的接地导体的球心相距 h,求空间的电势分布.

解析 如图9-11,取球心为原点,球心到点电荷的方向为 z 轴,则点电荷的坐标为 $(0,0,h)$.求解区域以球面为界分为两部分,球内区域的电势显然为零,故只需求解球外区域的电势分布.

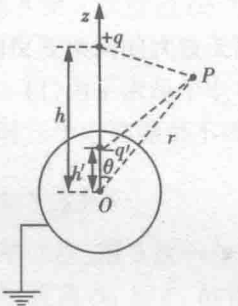


图9-11

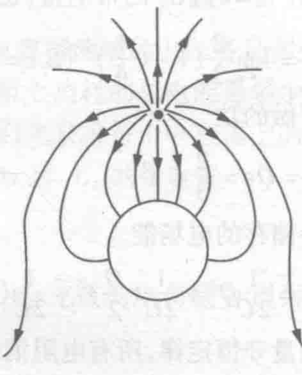


图9-12

在导体球上,电场线跟球面垂直(如图9-12),从电场线会聚的趋势来看,球面上感应电荷的贡献,相当于球内有一个点电荷 $-q'$.根据对称性,$-q'$ 一定在 z 轴上.设其坐标为 $(0,0,h')$,则球外任一点 P 处的电势

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{r^2+h^2-2rh\cos\theta}}-\frac{q'}{\sqrt{r^2+h'^2-2rh'\cos\theta}}\right].$$

因球面上电势为零,即 $r=a$ 时,$\varphi=0$,故

$$\frac{q}{\sqrt{a^2+h^2-2ah\cos\theta}}=\frac{q'}{\sqrt{a^2+h'^2-2ah'\cos\theta}},$$

即 $q^2(a^2+h'^2)-2ah'q^2\cos\theta=q'^2(a^2+h^2)-2ahq'^2\cos\theta$.

因为上式对任意 θ 均成立,必须

$$\begin{cases}q^2(a^2+h'^2)=q'^2(a^2+h^2),\\ ah'q^2=ahq'^2.\end{cases}$$

得 $\begin{cases} h' = \dfrac{a^2}{h} \\ q' = \dfrac{a}{h}q \end{cases}$ 或 $\begin{cases} h' = h, \\ q' = q. \end{cases}$

因为像电荷 $-q'$ 在球内,后一组解在球外,应舍去.

故球外区域电势

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{r^2 + h^2 - 2rh\cos\theta}} - \frac{q}{\sqrt{(\frac{h}{a})^2 r^2 + a^2 - 2rh\cos\theta}}\right].$$

综上所述,空间的电势分布如下:

$$\varphi = \begin{cases} 0 \quad (r \leqslant a), \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{\sqrt{r^2 + h^2 - 2rh\cos\theta}} - \dfrac{1}{\sqrt{(\frac{h}{a})^2 r^2 + a^2 - 2rh\cos\theta}}\right] \quad (r > a). \end{cases}$$

启迪与思考 如果导体球不接地,结果怎样呢?

如果导体球绝缘,且原来不带电,则导体球上感应等量的正负电荷,球外空间的电场由点电荷 q 及感应电荷 $+q'$、$-q'$ 共同产生. 由上述解答可知, q 及 $-q'$ 作用于导体球表面的电势为 0, 为了保证球面为等势面, $+q'$ 必须在球心 O 处(如图 9-13). 这时, P 处的电势

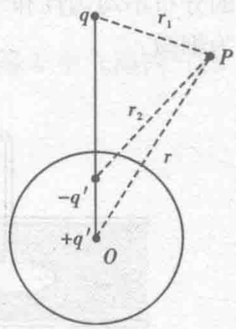


图 9-13

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_1} - \frac{q'}{r_2} + \frac{q'}{r}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2 - 2rh\cos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{(\frac{h}{a})^2 r^2 + a^2 - 2rh\cos\theta}} + \frac{a}{hr}\right]$$

(其中 $r > a$).

令 $r = a$,得球面的电势,亦即导体球内部的电势

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{h} \quad (r \leqslant a).$$

可见,导体球的电势相当于单独 q 存在时在球心 O 处产生的电势. 这个结论在解题时经常会用到.

下面继续讨论这一问题. 设想 $h \to \infty$,同时增大 q,使球心所在处的场强不变,其值为

$$E_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{h^2}.$$