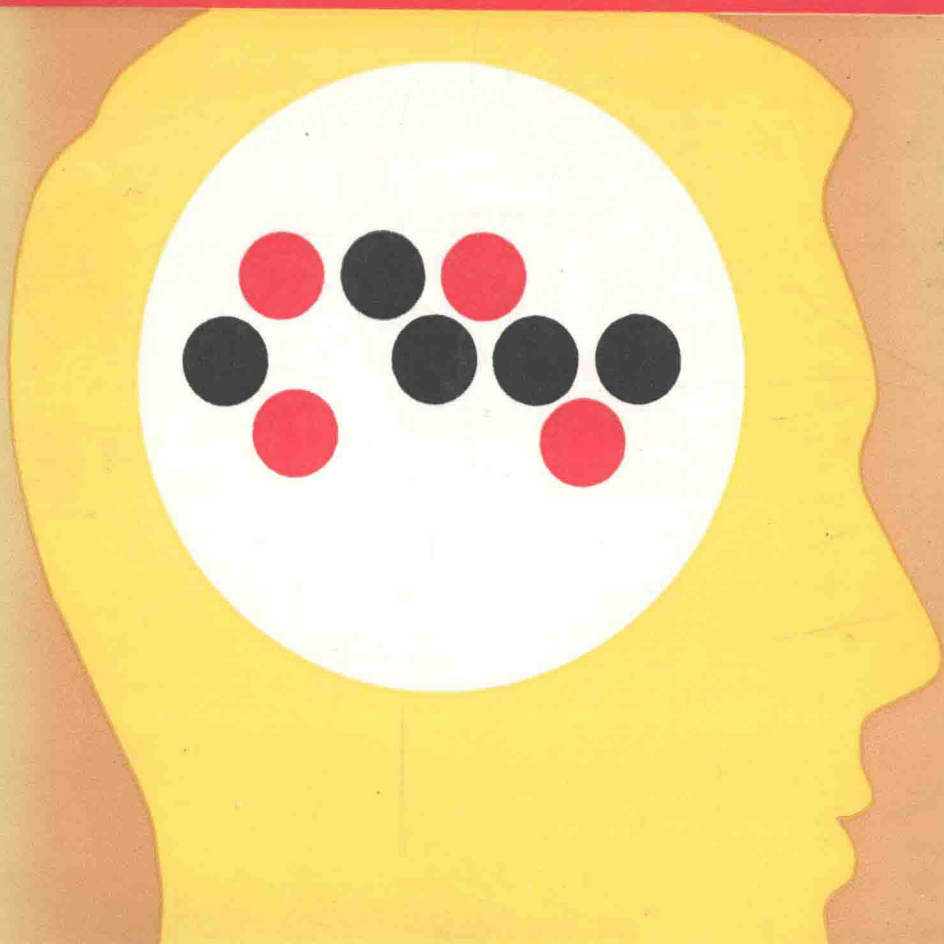


結 構 學

左 利 時 著

科學技術叢書 / 三民書局印行



結 構 學

(下冊)

左 利 時 著

逢甲大學土木工程系主任

三 民 書 局 印 行

行政院新聞局登記證 出版業字第二〇〇號



中華民國六十七年四月初版
中華民國七十二年八月再版

◎ 結

構 學 (下)

基本定價捌元叁角叁分

著者 左 利 時
發行人 劉 振 強
出版者 三民書局股份有限公司
印刷所 三民書局股份有限公司

臺北市重慶南路一段六十一號
郵政劃撥 九九九八號

自序

本書下冊，共計八章，第九章介紹結構變形之計算，為超靜定結構分析準備工作。第十章為連續梁、剛架及拱之各種傳統分析方法，為本書最長亦為最重要之一章，學者如能仔細揣摩，對於一般平面超靜定結構，能有一徹底之認識及問題解析關鍵之了解。第十一章為超靜定桁架之傳統解法，第十二章至十六章介紹結構之一般矩陣解法，包括常用之變位法及力法，以配合電子計算機之運用，本書矩陣解法及書末各有關電算程式，多取材於 C.K. Wang 氏之矩陣結構分析一書，作者未敢掠美。

本書自上册出版後，三載於茲，其間因作者擔任行政工作，案牘之餘，心力交疲，以致影響下冊之編著工作，遲遲不能問世。其間多承熱心讀者來函詢問，益增作者之慚疚，謹以此篇餘一角，聊致作者之歉意，尤於三民書局之劉經理，熱心協助襄贊其事，並多方忍耐，作者於此更表示衷心之謝忱。

本書為一極為淺薄之結構學介紹，錯誤自所難免，深望海內外學者，邦人君子，時予匡正，則為作者之幸矣。

左利時

民國六十六年八月廿九日識於成大

結構學(下)目錄

第九章 撓角及變位

§ 9-1 概 論.....	1
§ 9-2 積 分 法.....	3
(9-2.1) 梁之撓角變位間基本幾何關係.....	7
(9-2.2) 符號之規定.....	10
§ 9-3 彎矩面積法.....	15
§ 9-4 共軛梁法.....	28
(9-4.1) 真實梁轉變為共軛梁之方法.....	30
(9-4.2) 共軛梁之討論.....	41
§ 9-5 切力變位之計算.....	45
§ 9-6 能 量 法.....	53
(9-6.1) 能量之計算.....	54
(9-6.2) <i>Castigliano</i> 氏之變位定理.....	62
(9-6.3) 相對變位及相對旋轉角之觀念.....	86
§ 9-7 桿 鏈 法.....	101
§ 9-8 <i>Williot Mohr</i> 圖解法.....	114
(9-8.1) 三鉸拱桁架之 <i>Williot-Mohr</i> 圖作法.....	130
(9-8.2) 複合 <i>Fink</i> 桁架 <i>Williot</i> 圖之畫法.....	133
§ 9-9 <i>Betti</i> 及 <i>maxwell</i> 交換定理.....	140

第十章 連續梁、剛架及拱之分析

§ 10-1 剛架之超靜定性	159
§ 10-2 解析方法	162
§ 10-3 三力矩方程式法	163
§ 10-4 最小功法	176
§ 10-5 撓角變位法	187
(10-5.1) 由撓角變位以求節點彎矩之方程式	191
(10-5.2) 聯立方程式之行列式解法、行列式之數解法	203
(10-5.3) 撓角變位方程式之另一形式	208
(10-5.4) 荷重實例介紹相對剛度 K 及相對側移 R 之觀念	209
(10-5.5) 基礎沉陷、傾斜或溫度變化之影響	229
(10-5.6) 梁柱非正交問題，獨立側移與非獨立側移之觀念	238
§ 10-6 彎矩分配法	252
(10-6.1) 彎矩分配法用於只有旋轉而無移動之情況	254
(10-6.2) 遠端為鉸端，對稱端，或反對稱端之簡化算法 ——介紹剛度 K 之修正值 K	263
(10-6.3) 轉動移動兼而有之之彎矩分配法之一 —— <i>Morris</i> 法之物理觀念	276
(10-6.4) <i>Morris</i> 法中節點加鎖後，有移動而無轉動， 各柱之切力分配計算及固端力矩 $6EKR$ 之另一形式。	280
(10-6.5) <i>Morris</i> 法之簡單數例	284
(10-6.6) <i>Morris</i> 法複雜例——介紹切力分配時，柱系統 串聯及并聯與剛度柔度之運算	303
(10-6.7) 轉動移動兼而有之之彎矩分配法之二——比例法	314

§ 10-7 用彎矩分配法解非均勻斷面肢桿剛架·····	374
(10-7.1) 剛度、傳遞係數、及固端力矩·····	375
(10-7.2) 特殊情形下剛度之修正值·····	385
§ 10-8 代替剛架法——特種形式剛架彎矩分配法之簡易快 速算法·····	396
(10-8.1) 無切力情況下，節點側移及旋轉同時發生時 肢桿剛度之決定·····	397
(10-8.2) 節點旋轉側移同時進行，不產生切力干擾之剛架例	399
(10-8.3) 內外柱剛度無倍數關係，側移旋轉同時進行， 切力干擾時之代替剛架法·····	409
§ 10-9 柱比法·····	419
(10-9.1) 對稱結構·····	420
(10-9.2) 不對稱柱應力之計算法·····	447
(10-9.3) 不對稱結構之分析·····	453
§ 10-10 無鉸拱應力感應線·····	465
(10-10.1) 柱比法公式之應用·····	468
(10-10.2) 溫度變化、拱肋體積收縮、拱肋因應變而縮短， 及基礎沉陷等因素對拱之影響·····	496
§ 10-11 柱比法公式應用之討論（介紹薄環與厚環計算上之 差別）·····	509
§ 10-12 多層剛架承受橫向荷重之簡易計算法·····	516

第十一章 超靜定平面桁架之傳統解法，一般超靜定結構（包括桁架、連續梁剛架等）感應線之畫法，桁架次應力及複合結構之分析。

§ 11-1 最小功法.....	541
§ 11-2 變位法.....	549
§ 11-3 Betti's law法 (或 Williot Mobr 圖法)	554
§ 11-4 連續梁、超靜定桁架及剛架之感應線.....	565
§ 11-5 桁架次應力之分析.....	580
§ 11-6 複合結構之分析.....	588

第十二章 行列式及矩陣—介紹基本行列式及矩陣代數及其數解法

§ 12-1 行列式之基本性質.....	610
§ 12-2 矩陣代數之簡介.....	614
(12-2.1) 矩陣之各種形式與名稱.....	616
(12-2.2) 矩陣代數.....	617
§ 12-3 求逆矩陣之數解法.....	633

第十三章 位移矩陣法解桁架問題

§ 13-1 桁架之靜定及超靜定.....	651
§ 13-2 平衡矩陣 $[A]$ 及變形矩陣 $[B]$	656
§ 13-3 聯立方程式直接解靜定桁架.....	663
§ 13-4 位移矩陣法.....	667

第十四章 位移矩陣法解連續梁及剛架

§ 14-1 無側移之連續梁及剛架問題.....	679
§ 14-2 產生側移之剛架問題.....	698
§ 14-3 位移矩陣法解見有多次自由度側移之剛架問題實例.....	720

第十五章 力矩陣法解桁架問題

§ 15-1 概 論.....	747
§ 15-2 基本靜定桁架之選擇.....	748
§ 15-3 平衡矩陣, 變形矩陣, 及柔度矩陣.....	750
§ 15-4 力矩陣法公式之推衍.....	756
§ 15-5 舉 例.....	758

第十六章 力矩陣法解連續梁及剛架

§ 16-1 概 論.....	771
§ 16-2 超靜定次數及自由度之決定.....	773
§ 16-3 平衡矩陣、變形矩陣及柔度矩陣.....	774
§ 16-4 公式之推衍.....	779
§ 16-5 舉 例.....	780

附 錄

索 引

第九章 撓角及變位

(Slope and Deflection)

(本章§9-5, §(9-6, 3), §9-7, §(9-8, 7), §(9-8, 2) 各節, 五專教材, 可以略去)

§9-1 概 論

撓角及變位均為結構之變形 (*deformation*), 結構由於承受應力之影響, 或由於溫度之變化, 或由於基礎之移動, 或由於裝配長度之差誤等等原因, 均可產生變形, 變形分兩方面研究, 一為度量結構上某點切線在變形前之位置與變形後之位置所轉之角度變化, 是為撓角。一為度量結構某點在變形前之位置至變形後之位置所移動之距離, 是為變位 (*displacement*)。一般變位可分為二分量, 一為垂直變位, 一為水平變位, 普通稱為 *vertical deflection* 及 *horizontal deflection*。而一般習慣所稱之變位, 均泛指垂直變位而言, 因垂直變位特別重要也。

在未開始介紹計算撓角及變位之各種方法以前, 吾人必須應明瞭, 何以結構中計算撓角及變位之部門非常重要? 亦即吾人何以必須要研究撓角及變位? 原因何在? 歸納言之, 要研究撓角及變位, 其主因有二: 第一, 吾人因為要知道究竟本結構受某載重後, 究竟產生多大的撓角及變位, 因一般結構作成後, 工程師不但要充份把握其安全性 (*safety*), 而且要充份了解其服務性 (*serviceability*)。安全性之控制即在於應力之計算, 如最大應力不超過材料之安全應力, 則安全性無問題, 但工程師並不以僅僅安全性為滿足, 舉例如簡支梁跨度甚大, 荷

重甚輕，其最大應力常甚小，如根據最大應力為設計標準，其設計結果往往得到一斷面甚小，跨度甚大之梁，安全絕無問題，但此小斷面長跨度之梁，設計前如不妥為計算其“可能”之撓角及變位，往往變形後產生非常大之變位，整個梁變成弧形，不但影響美觀，而且使得鋼筋下混凝土裂口甚寬，梁內鋼筋因而銹蝕，且因變形太大，以致於門窗變形、不能開閉、管線彎曲、天花板破裂，種種影響，不一而足，此即所謂結構之服務性不够。故有經驗之工程師，在設計時必須同時考慮到雙方面，以安全性為設計之根據，以服務性作為校核，務使雙方面兼顧，方為上選，普通梁之最大變位，據一般建築或結構規範之規定，均不得超出跨度長度 l 之 $\frac{1}{360}$ ，即 $y_{max} \leq \frac{l}{360}$ (9-1)

在此範圍以內，則變位撓角均甚小，肉眼不能看出，必須用儀器測量，方可查知。因此由上所述，可看出，計算變形與計算應力同等重要，其次在建造橋梁時，變位之計算尤為重要，長跨橋梁因跨度太長，建造時，均由兩端開始同時起造，向中間會合，如工程師不能事先掌握變位之數量，則勢必會合時不能合筭，將差誤百出矣。由以上之敘述，均可了解撓角及變位計算之重要性，此為第一原因。要明瞭何以撓角及變位重要之第二原因，較第一原因尤為重要，吾人在第一章內已介紹過結構有靜定結構及超靜定結構之分，靜定結構其未知應力可由平衡方程式之聯立式完全求出，平衡方程式之數與結構未知應力數相等，超靜定結構，則平衡方程式數目小於結構未知應力數，亦即應力無法由平衡聯立方程式解出，必須要超出平衡關係以外，另外增加額外方程式，方能求解。此增加之方程式，只有在結構變形後之應力 (stress) 與應變 (strain) 間之關係中尋找，亦即撓角變位與荷重間之關係，故研究撓角變位，即係為解超靜定結構謀一重要工具，因超靜定結構為結構學之主要部門，學者於此章所述之各種計算方法必須徹底了解其觀念及應用。

本章以下擬分兩方面介紹，屬於

(A) 梁方面者（包含剛架在內）有

(a) 積分法 (*integration method*)

(b) 彎矩面積法 (*moment area method*)

(c) 共軛梁法 (*conjugate beam method*)（此法又稱為彈性荷重法 (*elastic weight method*)）

(d) 能量法 (*energy method*)

此法之各稱甚多，可稱為

(i) 卡氏定理法 (*Castiglians's theorem*)

(ii) 假置單位荷重法 (*dummy unit load method*)

(iii) 虛功法 (*virtual work method*)

(B) 桁架方面者有

(a) 假置單位荷重法 (*dummy unit load method*)

(b) 桿鏈法 (*bar chain method*)

（此法又稱為彈性荷重法 (*elastic weight method*)）

(c) Williot-Mohr 圖解法

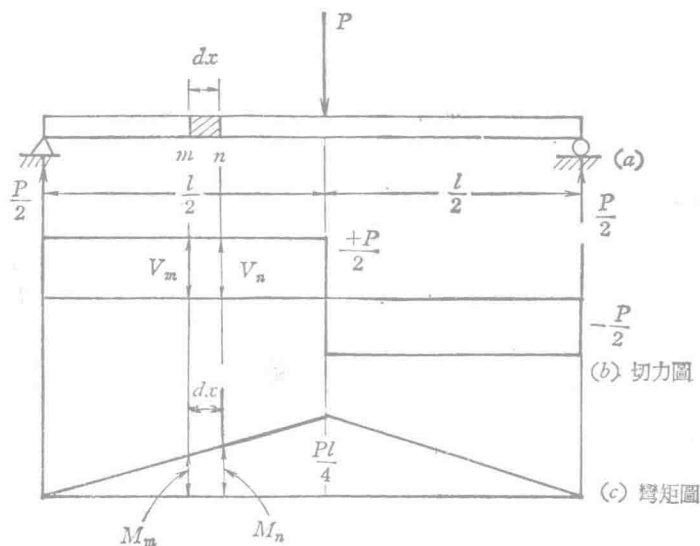
晚近電子之計算機問世後，結構之解法亦起革命性之變化，最新之方法為矩陣法 (*matrix method*) 或電子計算機法 (*computer method*)，以矩陣之操作輔以電子計算機之運用而直接求出。除矩陣法置於本書第十三章內介紹外，此處暫不贅，其他方法均為基本方法，學者於計算中，亦可明瞭結構之實際活動情形，了解每一方法之基本物理意義，故甚為重要。

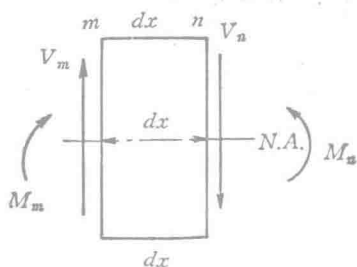
§9-2 積 分 法

積分法為解梁之變形問題中，所有方法之基本方法，其他特種方

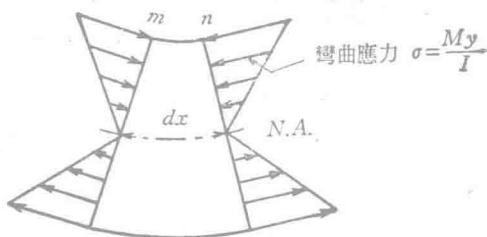
法均由積分法變化而來，尤其積分法中所用到之梁變形後，撓角變位間之基本幾何關係，在力學中之地位尤為重要，讀者於此基本觀念，必須徹底了然於心，因以後隨時隨地可能用到也。積分法在材料力學內已經講過，不過此處作者，仍不厭其煩，重加敘述，因以後之其他方法，與本法息息相關之故。

吾人於此處，試問一問題，即梁何以會產生彎曲？梁於載重後即彎曲，為一自然現象，但萬物均有其理，梁之彎曲，歸納之原因有二，其一因梁承受彎矩後，其原為等長之纖維，變為不等長度，如圖(9-1)所示之例，試取梁內某一小段





- (d) mn 段自由體，未變形前自頂部至底部所有纖維長度均相等為 dx 長，故變形前無彎曲現象。

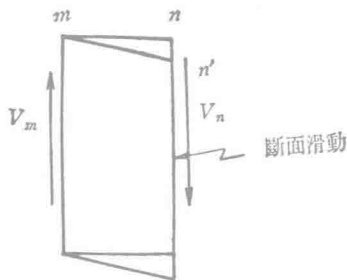


- (e) 因彎矩之作用產生彎曲應力 $\sigma = \frac{My}{I}$ ，在 $N.A.$

以上為壓力， $N.A.$ 以下為張力，故除 $N.A.$ 處之纖維長仍為原長度 dx 外， $N.A.$ 以上所有纖維均縮短， $N.A.$ 以下所有纖維均伸長，因自頂至底，所有纖維均不相同，故梁向纖維伸長方向彎曲，此為彎矩產生彎曲之原因。



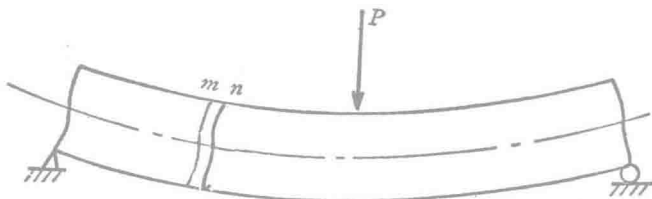
斷面同時滑動及翹曲



斷面滑動

- (g) 因切力在斷面之分佈，不是均佈， $\tau = \frac{VQ}{bI}$ 為拋物線形，故斷面 m 及 n 產生相對滑動後，兩斷面亦同時有翹曲 (warping) 現象。

- (f) 因切力 V_m 及 V_n 之作用，斷面 m 及斷面 n 產生相對滑動現象，如斷面移至 n' 之位置，此為切力產生彎曲之原因。



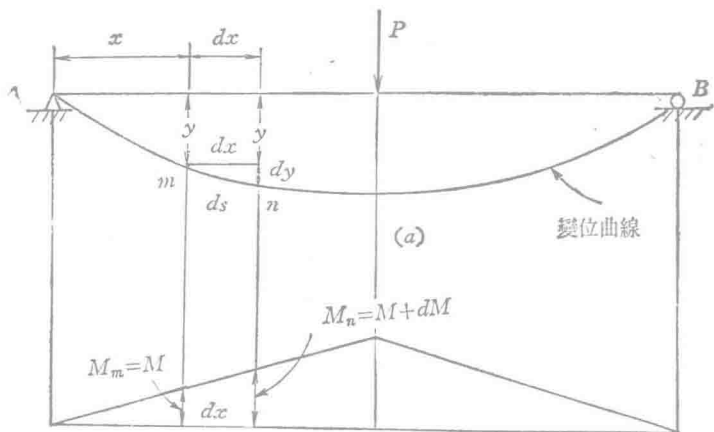
(h) 梁彎曲後之情況

圖 9-1

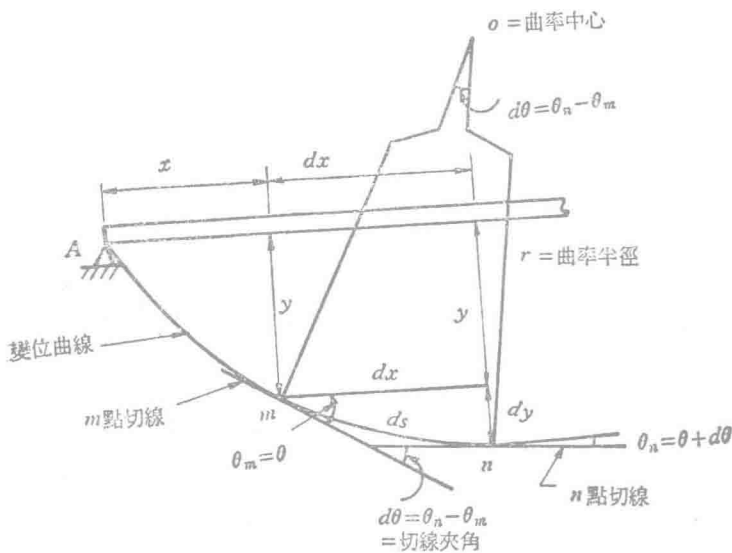
mn 之自由體如圖(d)所示，未變形前，此段之纖維長度由頂部至底部均為 dx ，故無彎曲現象，承受彎矩後，因彎曲應力之影響，如圖(e)所示，在中性軸以上之所有纖維均受壓力，故其長度縮短，中性軸以下所有纖維均受張力，故長度伸長，結果彎矩加入後，除中性軸處纖維仍維持原長 dx 外，其他纖維長通統改變，上部短於 dx ，下部長於 dx ，故梁因此改變，不能不向纖維伸長部彎曲，此為梁彎曲之第一原因，亦為主要原因，其次切力亦使梁產生彎曲變形，但其現象並非改變纖維長度，而係改變自由體之形狀。如圖(f) m 及 n 兩斷面因切力 V_m 及 V_n 之作用，因而使得兩斷面產生相對滑動現象，斷面 m 向上滑，斷面 n 向下滑，因而原為矩形之自由體，變為菱形， n 點降至 n' 點，此即切力在此段內所產生之變位。復次因切力在斷面之分佈並非均佈，而係拋物線形分佈，則兩斷面一方面產生相對滑動，同時又產生斷面翹曲(*warping*)，如圖(g)所示。此中詳細情形，在材料力學內討論甚詳，此處因限於篇幅，不能作詳盡之介紹，大要而言，梁如彎曲，其撓角及變位均可分為兩部份，即彎矩撓角及切力撓角，彎矩變位及切力變位，對普通正常之梁而言(正常之梁係指梁長度 l 大於梁之深度 d 至少十五倍以上， $l \geq 15d$ ；不正常之梁，則梁長 l 與梁深 d 屬於同級，亦即 l 與 d 大致相等)，彎矩變位一般均佔總變位之98%左右，亦即切力變位只有總變位之2%尚不足，故通常情形，因切力變位甚為微小，可以不必考慮，故可將彎矩變位當作總變位，而略去切力變位，吾人以下所介紹之各種方法均係計算彎矩變位(即謂只有彎矩使梁產生變形，不計切力)，將其視作總變位。但吾人必須有一觀念，除彎矩變位外，尚有切力變位之存在。不過未加考慮而已，此種切力對變形之影響，於正常之梁甚為微小，但對於不正常之梁，則通常所佔之比例相當大，而不能忽略(可達總變位之30%)；為使讀者對此問題有一明確之觀念起見，吾人於共軛梁法介

紹完後，專闢一節§9-5，介紹切力變位之算法，此處暫不贅述。

§9-2.1 梁之撓角變位間基本幾何關係



(b) 彎矩圖



(c) 梁曲線 A_{mn} 段之放大圖

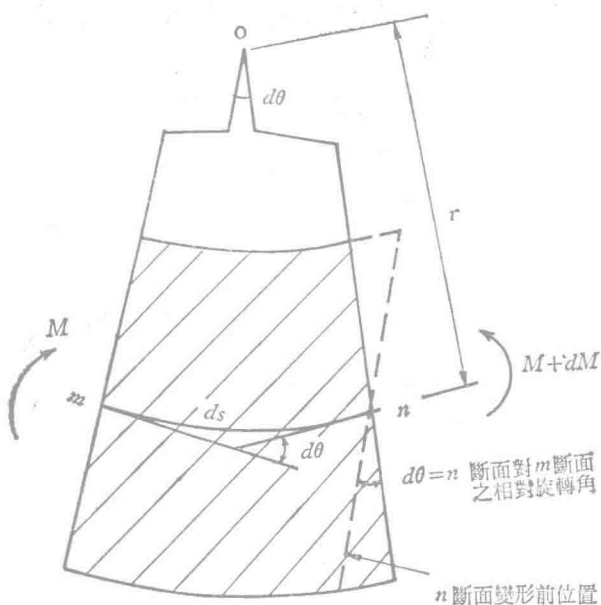
(d) 梁 mn 段自由體

圖 9-2

如圖 (9-2) (a) 之梁，由梁之變位曲線， m 斷面之變位為 y ， n 斷面距 m 斷面之距離為 dx ，其變位為 $y + dy$ ， A_{mn} 段之放大圖如圖 (c) 所示，設 m 處之撓角 $\theta_m = \theta$ ，則 n 處之撓角當為 $\theta_n = \theta + d\theta$ ，今在 m 及 n 點各作一切線及法線，則由簡單之幾何關係可看出，兩切線之夾角為 $d\theta$ ，兩法線之圓心角（注意：一般而言， m 點之法線半徑與 n 點之法線半徑並不相等，因 dx 甚小，故假設兩點之半徑相等均為 r ）亦為 $d\theta$ ，取 mn 段之自由體如圖 (d) 所示，則因 m 斷面及 n 斷面內彎矩作用關係，此段自由體彎曲，兩斷面產生相對旋轉，如 m 斷面不動，則 n 斷面由虛線位置轉至實線位置。其相對旋轉角亦為 $d\theta$ ， $d\theta$ 角非常重要，吾人以下經常碰到，茲將與其有關之項目歸納如下：