

有限元分析与 ANSYS实践教程



提供电子教案
和素材文件

- 本书先以有限元的基本理论做引导, 建立必要的知识背景; 其次以典型实例做讲解, 提高理论理解与应用能力; 再以实例详解 ANSYS 的实现方法和步骤, 最终提高上机实践能力。
- 内容的选择与编排做到理论基础知识的渐进性、理论与实际的关联性, 有利于学生自学和应用实践。

刘超 刘晓娟 编著



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



21 世纪高等院校计算机辅助设计规划教材

有限元分析与 ANSYS 实践教程

刘 超 刘晓娟 编著

图书在版编目(CIP)数据

有限元分析与 ANSYS 实践教程 / 刘超, 刘晓娟编著. — 北京: 机械工业出版社, 2013.12

ISBN 978-7-111-34393-0

Ⅰ. ①有… Ⅱ. ①刘… ②刘… Ⅲ. ①有限元分析—教材 ②ANSYS—教材

Ⅳ. ①O342.4 ②O342.43

1. 有限元分析—教材 Ⅱ. ①刘超 ②刘晓娟 Ⅲ. ①有限元分析—教材 ②ANSYS—教材

Ⅳ. ①O342.4 ②O342.43

中国图书馆分类号 O342.43 中图分类号 O342.43

机械工业出版社 (北京市东城区百万庄大街 22 号) 邮政编码 100007

责任编辑: 张永梅 封面设计: 张永梅

文字编辑: 李 华 校对: 张永梅

北京五洲印刷有限公司印刷

2013 年 12 月第 1 版 1 次印刷

185mm × 260mm 1/32 开本 400 千字

0311-3021222

机械工业出版社

本书在基本理论的基础上结合典型实例,介绍 ANSYS 的有限元分析方法与应用技巧。主要内容包括有限元法的基本概念及概况;ANSYS 的基本结构、功能特点、参数设置、坐标体系,以及 ANSYS 有限元分析的一般步骤与基本操作;杆系结构的有限元分析;梁系结构的有限元分析;弹性力学平面问题的有限元分析;实体结构的有限元分析;结构模态的有限元分析;接触结构的有限元分析。每章均给出了有限元分析的实例详解。

本书适用于机械工程、制造工程、建筑工程、材料加工、机械制造及其自动化等相关专业的本科及研究生教学,也可作为相关专业的工程技术人员入门学习和参考用书。

本书配有电子教案,需要的教师可登录 www.cmpedu.com 免费注册,审核通过后下载,或联系编辑索取(QQ: 2966938356, 电话: 010 - 88379739)。

图书在版编目(CIP)数据

有限元分析与 ANSYS 实践教程/刘超,刘晓娟编著. —北京:机械工业出版社, 2016. 8

21 世纪高等院校计算机辅助设计规划教材

ISBN 978-7-111-54393-0

I. ①刘… II. ①刘… ②刘… III. ①有限元分析-应用软件-高等学校-教材 IV. ①O241. 82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 172964 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑:和庆娣

责任编辑:和庆娣

责任校对:张艳霞

责任印制:李 洋

北京宝昌彩色印刷有限公司印刷

2016 年 9 月第 1 版·第 1 次印刷

184mm × 260mm · 16.75 印张 · 406 千字

0001-3000 册

标准书号:ISBN 978-7-111-54393-0

定价:39.90 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务

网络服务

服务咨询热线:(010)88379833

机工官网:www.cmpbook.com

读者购书热线:(010)88379649

机工官博:weibo.com/cmp1952

教育服务网:www.cmpedu.com

封面防伪标均为盗版

金书网:www.golden-book.com

前言

有限元的相关理论可追溯于 20 世纪 50 年代初,但由于有限元分析理论在应用时所涉及的运算量庞大,又缺乏有效的应用软件作支持,所以一直处于理论研究阶段,其应用不是很广泛。近年来,随着计算机辅助软件技术的快速发展,借助计算机辅助软件进行有限元分析与研究迅速成为应用领域的热点之一,因此有限元分析及其应用技术已逐渐成为相关专业本科生及研究生学习与掌握的重要内容之一。

随着大型建造业需求的迅速发展,对高风险及大型工程进行可行性预研、可靠性分析及总体可信度论证或评估等工作显得越来越重要,如大型飞机舰船、高架路桥、跨海大桥和超高建筑等高风险工程项目。近几年,对产品材料与结构进行有限元分析与计算机辅助研究已成为提高研究效率、降低研发成本、提高产品性能及降低风险投入的有效手段之一。目前,ANSYS 是一种大型通用型有限元分析软件,不仅能实现对实体结构进行静态和动态问题的有限元分析,还能进行热传导、流体流动、电磁学和波谱等方面的研究,同时具有多物理场的耦合计算功能,如热-磁、热-电、流-固和结构-声学等耦合问题的分析与计算,而且具有很好的系统兼容性。目前,ANSYS 已被广泛应用于航天工业、机械工程、车船制造、土木工程、能源石化、生物科技、地矿水利、核科学及日常家用设备等领域的设计与研究制造,已成为当前普遍采用的软件之一。目前可实现有限元的专用软件较多,如 JIFEX、NAS-TRAN、ABAQUS 及 MATLAB 等,功能大致相同(初始设置、前处理、求解和后处理),各有特色(处理方式与结果显示等)。无论选用哪种软件,掌握并使用好有限元软件,都离不开有限元的基础理论与基本分析方法。

学习有限元分析的基础理论,掌握有限元分析方法,并通过 ANSYS 等软件实现工程应用,是当今工业制造技术发展的方向之一,是培养应用型人才的现实需要。为适应社会发展和高校应用型培养模式转型的需要,将有限元分析从原来的研究生教学纳入本科教学是培养应用型人才的战略需要。因此编写适合于本科生教学与实践的,侧重应用型的有限元分析教学用书十分必要。

有限元理论的数学基础是连续函数的离散化描述及其矩阵方程求解。对于任意的一维函数曲线而言,对它进行离散化,可以建立局部的穿过离散点的函数方程(称为离散函数方程),通过离散函数方程可以近似求出离散点之间(单元)任意点上的近似值。进一步讲,如果将一维曲线上的所有(有限的)离散函数方程用矩阵理论构成总体方程,就可以求解出函数曲线上任意非离散点的近似值。这种一维方法可用于对线体物质的参数计算,如位置、受力或变形等参数。将上述思想推广到二维和三维函数的离散化处理,就可以得到平面体和空间体的参数计算。有限元法就是基于离散化方法(单元法),将研究对象(总体)分隔成有限项(有限元),并用矩阵的方法建立总体的近似模型(有限元模型),通过有限元模型分析对象的物理状态和相应的参数。显然,所得到的结果有两种:单元节点上的精确值和任意点上的近似值。因此,有限元法是一种数值解,其精度随着单元的变小而提高,但同

时有限元模型的维数增加，计算的量增大。对于如水坝、桥梁、大型舰船或航天器等大型复杂结构体，其运算量将变得非常巨大。

由于有限元法的理论性强、适用范围广、针对性强、建模过程复杂以及结果关联性高，所以初学者不易掌握。本书的特点是理论基础与实例解析相结合，理论计算与 ANSYS 计算相结合。即先以有限元的基本理论做引导，建立必要的知识背景，以典型实例做讲解，提高理论理解与应用能力；再以实例详解 ANSYS 的实现方法和步骤，最终提高学生的上机实践能力。同时，内容的选择与编排做到理论知识基础的渐进性、理论与实际的关联性，且对于 ANSYS 软件中的难点，如单元类型的选择和约束设置等，进行了详细介绍，有利于学生自学和应用实践。另外，本书附有“ANSYS 常用菜单命令中英文对照说明”，以帮助读者尽快熟悉并掌握 ANSYS 软件的常用命令。

本书共 8 章，第 1 章、第 3~6 章由刘超编写，第 2 章、第 7 章、第 8 章及书中的习题由刘晓娟编写，全书由刘超统稿，图文校核和格式编排等工作由刘源溢完成。

由于作者水平有限，编写过程中难免出现疏漏之处，敬请专家学者和广大读者给予批评指正。

编 者

ANSYS 常用菜单命令中英文对照说明

1. File (文件) 菜单

Clear & Start New: 清除当前数据库并开始新的分析。

Change Jobname: 修改工作文件名。

Change Directory: 修改工作目录的路径。

Change Title: 修改工作标题名。

Resume Jobnam. db: 从默认文件中恢复数据库, 其功能等同于工具栏中的 RESUME_DB。

Resume from: 从其他路径/工作文件名的文件中恢复数据。

Save as Jobname. db: 以默认文件名存储当前数据库信息, 其功能等同于工具栏中的 SAVE_DB。

Save as: 以用户自定义的文件名存放当前数据库信息。

Write DB log file: 输出数据库文件。

Read Input from: 读入命令文件, 如 APDL 文件。

Switch Output to: 输出结果文件。

List: 显示文件内容。

File Operation: 设置 ANSYS 文件的属性等。

Ansys File Operation: 为文件指定不同文件名、扩展名以及目录。

Import: 导入其他 CAD 软件生成的实体模型文件。

Export: 导出 IGES 格式的文件。

Report Generator: 完成有限元分析后生成一份完整的报告。

Exit: 退出 ANSYS。

2. Select (选择) 菜单

Entitles: 选择对象。

Component Manager: 组件管理。

Comp/Assembly: 组件/部件。

Everything: 选择所有模型。

Everything Below: 选择模型中某些体(或面、线、关键点、单元)以下的所有对象。

3. List (列表) 菜单

Files: 列表显示文件内容。

Status: 列表显示用户所选内容的状态。

Keypoint: 列表显示关键点的属性和相关数据。

Lines: 列表显示线的属性和相关数据。

Areas: 列表显示面的属性和相关数据。

Volumes: 列表显示体的属性和相关数据。

Nodes: 列表显示节点的属性和相关数据。

Element: 列表显示单元的属性和相关数据。

Component: 列表显示组件的属性和相关数据。

Picked Entities: 列表显示所选对象的属性和相关数据。

Properties: 列表显示要查看对象的属性。

Loads: 列表显示载荷的信息。

Other: 列表显示模型中的其他信息。

4. Plot (图形显示) 菜单

Replot: 重新显示窗口中的模型。

Keypoints: 显示关键点。

Lines: 显示线。

Areas: 显示面。

Volumes: 显示体。

Specified Entities: 显示特定对象。

Nodes: 显示节点。

Elements: 显示单元。

Layered Elements: 显示分层的单元。

Materials: 显示材料属性。

Data tables: 显示数据表。

Array Parameters: 显示数据参数。

Results: 显示求解结果。

Multi - Plots: 显示所有图元。

Component: 显示组件。

Parts: 显示零件。

5. Plotctrls (绘图控制) 菜单

Pan zoom rotate: 图形变换, 包括移动、缩放、旋转, 其功能类似于主界面中的“图形显示控制按钮集”。

View Settings: 视角设置。

Numbering: 编号设置。

Symbols: 显示符号设置。

Style: 模型显示风格设置。

Font Controls: 字体设置。

Window controls: 窗口设置。

Erase Options: 擦除选项设置。

Animate: 动画设置。

Annotation: 注解设置。

Device Options: 设备设置。

Redirect Plots: 图形文件格式设置。

Hard Copy: 打印机或输出图片格式设置。

Save Plot Ctrl: 保存绘图控制。

Restore PlotCtrls: 读取绘图控制。

Reset Plot Ctrl: 恢复绘图控制默认设置。

Capture Image: 快速截图。

Restore Image: 显示截图得到的文件。

Write Metafile: 输出图元文件。

Multi - Plot Controls : 多图功能控制。

Multi  Window layout: 多窗口显示设置。

Best Quality Image: 图像质量设置。

6. WorkPlane (工作平面) 菜单

Display working plane: 显示工作平面。

Show WP status: 显示工作平面状态。

WP setting: 工作平面设置。

Offset WP by Increments: 移动或旋转工作平面。

Offset WP to : 移动工作平面到指定位置。

Align WP with: 工作平面与指定方向平行。

Change Active CS to: 更改当前激活的坐标系。

Change display CS to : 更改当前显示的坐标系。

Local coordinate systems : 局部坐标系设置。

7. Parameters (参数) 菜单

Scalar parameters: 标量参数。

Get Scalar Data: 获取标量参数。

Array parameters: 数组参数。

Array operations: 数组运算。

Function: 函数设置。

Angular Units: 角度单位设置。

Save Parameters: 保存参数。

Restore Parameters: 恢复参数。

8. Macro (宏) 菜单

Create Macro: 创建宏。

Execute Macro: 执行宏。

Macro Search Path: 宏的搜索路径。

Execute Data Block: 执行数据块。

Edit Abbreviation: 编辑缩略语。

State Abbreviation: 缩略语编辑。

9. MenuCtrls (菜单控制) 菜单

Color Selection: 颜色选择。

Font Selection: 字体选择。

Update Toolbar: 更新工具栏。

Edit Toolbar: 编辑工具栏。

Save Toolbar: 保存工具栏。

Restore Toolbar: 恢复工具栏。

Message Control: 信息控制。

Save Menu Layout: 保存更改后的菜单布局设置。

10. Ansys Main Menu (主菜单) 菜单

(1) Preprocessor (前处理器) 菜单

Element Type: 单元类型。

Real Constants: 实参数。

Material Props: 材料参数。

Sections: 截面设置。

Modeling: 创建模型。

Meshing: 网格划分。

Checking Cuts: 检查控制。

Numbering Cuts: 编号控制。

Archive Model: 写入模型。

Coupling/Constraint: 定义耦合约束。

FLTRAN Set Up: 设置 FLTRAN 参数。

Multi-field Set Up: 启用或关闭 Multi-field 分析。

Loads: 载荷设置。

Physics: 物理属性及边界条件。

Path Operation: 路径操作。

(2) Solution (求解) 菜单

Analysis Type: 定义分析类型。

Define Loads: 定义载荷。

Load Step Ops: 载荷步设置。

Solve: 求解。

(3) General Postproc (通用后处理器) 菜单

Database Opts: 数据库文件选项。

Result Summary: 结果概要显示。

Plot Result: 绘制结果图形。

List Result: 列表显示结果。

Save Abbreviation: 保存缩略语。

9. MenuCtrls (菜单控制) 菜单

Colour Selection: 颜色选择。

Font Selection: 字体选择。

Update Toolbar: 更新工具栏。

Edit Toolbar: 编辑工具栏。

Save Toolbar: 保存工具栏。

RestoreToolbar: 恢复工具栏。

Message Control: 信息控制。

Save Menu Layout: 保存更改后的菜单布局设置。

10. Ansys Main Menu (主菜单)

(1) Preprocessor (前处理器) 菜单

Element Type: 单元类型。

Real Constants: 实参数。

Material Props: 材料参数。

Sections: 截面设置。

Modeling: 创建模型。

Meshing: 网格划分。

Checking Ctrl: 检查控制。

Numbering Ctil: 编号控制。

Archive Model: 写入几何、载荷到文件中, 或从文件中读入上述节点。

Couping/Ceqn: 定义耦合约束。

FLOTRAN Set Up: 设置 FLOTRAN 各参数。

Mutli - field Set Up : 启用或关闭 Mutli - field 分析。

Loads: 载荷选项。

Physic: 读、写及列举所有元素。

Path Operation: 路径操作。

(2) Solution (求解) 菜单

Analysis Type: 定义分析类型。

Define Loads: 定义载荷。

Load Step Opt: 载荷步选项。

Solve: 求解。

(3) General Postproc (通用后处理器) 菜单

Data&file Opt: 数据和文件选项。

Resul Summary: 结果概要显示。

Plot Result: 绘制结果图形。

List Result: 列表显示结果。

Query Result: 查询结果。

Options for Outp: 输出选项。

Element Table: 单元表。

Path Operation: 路径操作。

Result Viewer: 查看结果。

(4) TimeHist Postproc (时间历程后处理器) 菜单

Variable Viewer: 观察变量。

Setting: 设置时间历程相关属性。

Store Data: 存储数据。

Define Variables: 定义变量。

List Variables: 列表显示变量。

Graph Variables: 图形显示变量。

Math Operation: 数学运算。

目 录

前言

ANSYS 常用菜单命令中英文对照说明

第 1 章 有限元法概述	1
1.1 有限元法的引出	1
1.2 有限元法的历史及应用	2
1.3 有限元法的基本概念	3
1.3.1 有限元法的实现过程	3
1.3.2 建立有限元方程的方法	4
1.3.3 有限元法与工程求解问题的关系	4
1.3.4 有限元法中的变量	5
1.3.5 有限元法的特点	7
第 2 章 ANSYS 分析方法概述	8
2.1 ANSYS 简介	8
2.2 ANSYS 的启动及主界面的基本构成与操作	9
2.2.1 ANSYS 的启动	9
2.2.2 ANSYS 主界面的基本构成	9
2.2.3 ANSYS 有限元分析的基本内容与步骤	10
2.3 ANSYS 坐标系	20
2.3.1 总体坐标系、局部坐标系及自然坐标系的关系	21
2.3.2 总体坐标系的表示类型	22
2.3.3 局部坐标系的作用	22
2.3.4 工作平面	23
2.4 关于 ANSYS 的学习	23
第 3 章 杆系结构的有限元分析	24
3.1 平面桁架有限元分析	25
3.1.1 平面桁架有限元的一般原理	25
3.1.2 平面桁架的 ANSYS 分析	32
3.2 自重作用下均匀截面直杆的	

有限元分析	42
3.2.1 自重作用下均匀截面直杆有限元分析的一般原理	42
3.2.2 自重作用下均匀截面直杆的 ANSYS 分析	45
3.3 杆系结构有限元分析和 ANSYS 分析的一般步骤	55
3.3.1 杆系结构有限元分析的一般步骤	55
3.3.2 杆系结构 ANSYS 分析的一般步骤	56
3.4 习题	56
第 4 章 梁系结构有限元分析	58
4.1 梁系结构有限元分析的一般原理	59
4.1.1 在局部坐标系中建立单元刚度矩阵	59
4.1.2 建立整体坐标系与局部坐标系节点力关系	59
4.1.3 建立整体坐标系单元刚度矩阵	60
4.1.4 边界条件及求解	60
4.2 梁系结构的 ANSYS 分析	60
4.3 梁系结构有限元分析和 ANSYS 分析的一般步骤	76
4.3.1 梁系结构有限元分析的一般步骤	76
4.3.2 梁系结构 ANSYS 分析的一般步骤	76
4.4 习题	77
第 5 章 弹性力学平面问题的有限元分析	78
5.1 弹性力学平面问题有限元分析的基本步骤	78

5.1.1 离散化	78	一般步骤	199
5.1.2 单元分析	79	6.4.2 实体结构 ANSYS 分析的 一般步骤	199
5.1.3 单元综合	79	6.5 习题	199
5.2 弹性力学平面问题的一般 原理	80	第7章 结构模态分析	201
5.2.1 平面应力与应变问题简介	80	7.1 结构模态分析的一般原理	201
5.2.2 单元位移函数	82	7.1.1 动力学分析的理论基础	201
5.2.3 单元载荷移置	86	7.1.2 实体动力分析有限元法的基本 步骤	208
5.2.4 单元刚度矩阵	87	7.1.3 模态分析的理论基础	209
5.2.5 单元刚度矩阵的物理意义 与性质	90	7.2 结构模态的 ANSYS 分析 实例	210
5.2.6 整体分析	90	7.3 结构模态分析和 ANSYS 分析 的一般步骤	234
5.2.7 有约束时对刚度矩阵的修正	92	7.3.1 结构模态分析的一般步骤	234
5.2.8 平面问题的有限元分析的 解题步骤	94	7.3.2 结构模态 ANSYS 分析的 一般步骤	235
5.3 弹性力学平面问题的 ANSYS 分析	95	7.4 习题	235
5.4 h 方法和 p 方法的结构分析 ..	127	第8章 接触结构的有限元分析	236
5.4.1 h 方法的结构分析	127	8.1 接触结构有限元分析的 一般原理	237
5.4.2 p 方法的结构分析	129	8.1.1 接触结构的基本概念	237
5.5 习题	133	8.1.2 接触结构有限元分析的 基本思想	238
第6章 实体结构的有限元分析	135	8.1.3 弹性接触问题的有限元基本方程 和柔度法求解	240
6.1 实体结构等参单元法的一般 原理	135	8.2 接触结构的 ANSYS 分析 实例	243
6.1.1 拉格朗日插值公式	135	8.3 接触结构有限元分析和 ANSYS 分析的一般步骤	254
6.1.2 四节点矩形单元	138	8.3.1 接触结构有限元分析的 一般步骤	254
6.1.3 等参单元的基本概念	140	8.3.2 接触结构 ANSYS 分析的 一般步骤	254
6.1.4 四边形八节点等参单元	142	8.4 习题	255
6.1.5 等参单元的单元分析	146	参考文献	256
6.1.6 高斯积分	149		
6.1.7 六面体等参单元	151		
6.2 实体结构的 ANSYS 分析	155		
6.3 弹性力学轴对称问题的 ANSYS 分析	173		
6.4 实体结构有限元分析和 ANSYS 分析的一般步骤	199		
6.4.1 实体结构有限元分析的			

第 1 章 有限元法概述

有限元法 (Finite Element Method, FEM) 是一种适用于大型或复杂物体结构的力学分析与计算的有效方法。本章简要介绍有限元法的含义、发展与实现等基本内容, 在有限元基本概念中着重介绍有限元变量、坐标, 以及变量之间的关系表示方法等。

1.1 有限元法的引出

有限元法是分析连续体的一种近似计算方法, 简言之就是将连续体分割为有限个单元的离散体的数值方法。有限元分析方法 (简称有限元分析) 是计算机问世以后迅速发展起来的一种广泛用于工程实体建模、结构分析与计算的有效方法。

自然现象的背后都对应有相关的物理本质与事物规律, 用数学方法对物理本质与事物规律进行描述可以得到普适性定律和特定性定理, 以及各种形式的 (如代数、微分或积分) 数学方程, 即数学模型。

对于一个实际的工程问题, 建立数学模型时, 不仅需要根据实际物理背景采用有效的数学方法, 还要考虑求解的效率、结果的精度以及方法的适用性等因素, 即分析方法。

例如, 对力学等工程应用问题, 通常涉及的变量有位移、应变和应力等; 其涉及的数学模型通常有平衡方程、几何方程和物理方程 (代数、微分或偏微方程); 在实际应用中可能涉及的边界和初始 (约束) 条件有力边界条件和位移边界条件等。

常用的分析方法如下。

1) 对线性的和边界规则的简单问题, 一般可以利用解析法, 得到精确解。解析解在系统的任何点上都是精确的。例如在材料力学中, 利用计算应力和位移的解析公式研究等截面杆、简支梁和轴等问题, 在弹性力学中利用弹性力学公式解决压力集中、板弯曲和厚壁圆筒等问题。

2) 对于许多实际的工程问题, 由于研究系统的庞大, 使得微分方程、边界和初始条件的复杂性大大增加, 一般难以得到它的精确解。对非线性的和边界不规则等问题, 一般得不到精确的解析解, 只能利用数值法 (如有限差分法、有限元法等) 得到其近似解。值得注意的是, 数值解只是在离散点 (节点) 上才等于或近似于解析解。

事物存在大小之分, 也存在有限与无限之分。通常, 一个连续体可以被看作由有限个被分割的元素近似组成。例如, 古人在计算圆的周长或面积时, 采用多等边形来逼近圆周或圆面积。等边形的边数越多, 计算结果的精度也越高, 但计算过程也会越复杂, 同时, 即便使用圆周率 π 计算, 也永远得不到圆周长的精确值即真值。由此可见, 在精度满足要求的情况下, 用离散化或有限舍去等近似方法, 可使复杂问题简单化。

有限元法是基于离散化法逼近原模型的思想, 其中包括有限元分割 (分段或离散化)、

有限元模型和有限元求解。有限元分割是指将连续物体（无限自由度）分割成有限个数目的单元（称为有限自由度下连续物体的有限元）。有限元模型是指使用积分方法（而不是有限差分法的微分方法）对各有限元建立代数方程，再用这些有限的代数方程所构成的方程组来近似表示原系统模型，即用连续函数精确描述有限单元，用描述有限单元的函数方程组来近似描述整体系统。可见有限元分割在宏观上是离散的，而在微观（单元）上则是分段连续的。有限元求解是指对有限元模型的单元变量进行求解，并将其组合为整体系统的解。

1.2 有限元法的历史及应用

首先，有限元法在航空结构分析中取得过明显的成效。1941 年，Hrenikoff 利用框架分析法（Framework Method）分析平面弹性体，将平面弹性体描述为杆和梁的组合体；1943 年，Courant 在采用三角形单元及最小势能原理研究 St.Venant 扭转问题时，利用分片连续函数在子域中近似描述未知函数。

此后，有限元法在固体力学、温度场、温升应力、流体力学、流固耦合（水弹性）问题，以及航空、航天、建筑、水工、机械、核工程和生物医学等方面获得了应用，成为内容十分丰富的新兴分支。

在 20 世纪 60 年代中期，Argyris、Kelsey（1960 年）、Turner、Clough、Martin 和 Topp（1956 年）等人在计算力学的研究中做出了杰出贡献。

人们公认 Courant（1943 年）是有限元法的奠基人。然而，到了 20 世纪 60 年代，Clough 才使人们广为接受了“有限单元”（Finite Element）这一术语。之后，在许多数学家的共同努力下，有限元法摆脱了各种各样的工程应用背景而成为了一种具有普适意义的数学方法。

到 20 世纪 90 年代，有限元法的理论得到了不断的完善和发展。主要体现在：建立了严格的数学和工程学基础；应用范围扩展到结构力学以外的领域；收敛性得到进一步研究，形成了系统的误差估计理论；相应的有限元软件得到快速发展。目前，各种数值模拟软件公司出现强强联合，不断推出功能齐全、界面友好的系列软件，以满足解决复杂及大型装备产品的设计与制造难题。

有限元法已深入应用于许多领域，如静力分析、动力分析、破坏与寿命分析、电磁场分析、热传导分析、声场分析、耦合场分析和流体分析等。21 世纪后，随着计算机技术及计算机辅助设计软件的不断发展，有限元法的工程应用越来越广泛，如汽车的车架车身结构与零件强度设计、碰撞安全性分析，复合材料的力学分析，载荷物体的静力学与动力学分析，载荷材料的变形分析与受力计算，部件接触时的力学分析，电力场、热力场等流体力学分析，建筑结构的力学分析，高层剪力墙的塑性动力分析，道路桥梁的裂纹分析，手术计算机辅助模拟与应用，武器结构受力与精确打击的动态研究等。由此可见，有限元理论借助于计算机技术的发展，将在从微观的材料和医学技术到大型的车船建筑等各个领域发挥越来越重要的作用。

1.3 有限元法的基本概念

1.3.1 有限元法的实现过程

有限元法的实现过程主要是指有限元模型的建立与求解过程，主要包括 5 个步骤：对象离散化、单元分析、构造总体方程（单元方程综合或建模）、求解方程及输出结果。有限元法的实现过程如图 1-1 所示。



图 1-1 有限元法的实现过程

1. 对象离散化

当研究对象为连续介质问题时，首先需要将所研究的对象进行合理的离散化分割，即根据预期精度或经验将连续问题进行有限元分割。对于连杆结构体，由于其结构本身存在着自然的节点连接关系，因此杆件结构本身可以作为一种自然的离散系统（除非连杆结构体的单连体也较大而需要对其内部进行细化分析）。由此可见，对于各种实体结构，通常需要根据实际情况将连续体进行适当的分割，得到有限单元，使对象的整体变为由一系列有限单元构成的组合体。

2. 单元分析

有限元法的核心工作之一是对各单元的分析。例如，通过分析各单元的节点力与节点位移之间的关系和边界条件，以便建立能够用于描述实体总体结构特征的单元刚度矩阵。通常，对于实体结构的单元刚度矩阵，需先确定其内部的位移插值函数及近似描述变量，再通过变分原理得到。对于简单的杆件结构的刚度矩阵则可通过直观的力学概念得到。

3. 构造总体方程

将单元刚度矩阵组成总体方程刚度矩阵，且总体方程应满足相邻单元在公共节点上的位移协调条件，即整个结构的所有节点载荷与节点位移之间应存在相互的变量关系。有限元的总体方程即为被研究对象的有限元模型。

4. 求解方程

在求解有限元模型时，应考虑总体刚度方程中所引入的边界条件，以便得到符合实际情况的唯一解。通过选择合适的线性代数方程组的数值求解方法，求得结构中各单元节点上的变量值，进而可以求出节点外任意点上的变量值。这些变量值可以是如位移、应变和应力等物理量。事实上，随着有限元划分的数量增多，使总体方程的维数增大，其求解过程将变得十分庞大和烦琐。

5. 输出结果

有限元模型求解结束后，可通过数值解序列或由其构成的图形显示结果，分析被研究对象的物理结构变形情况，以及各种物理量间的变化关系，如通过列表显示各种数据信息，用

等值线分布图显示等受力点，或用动画显示各种量的变化过程。

现代有限元法是工程分析中一种处理偏微分方程边值问题的最有效数值方法之一，对于工程中的许多场变量的定解问题，通过有限元法可以得到满足工程要求的近似解。此外，有限元法的推广应用在很大程度上依赖于计算机及其软件技术的先进程度。

1.3.2 建立有限元方程的方法

有限元方程是建立有限元模型的基础，是进行有限元分析的前提。以下简要介绍建立有限元方程的常用方法。

1. 直接方法

直接方法是指直接从结构力学引申得到。直接方法具有过程简单、物理意义明确、易于理解等特点。由于其基本概念和建模方法的物理意义十分清晰，对理解有限元法的相关概念和具体应用十分有益。直接方法不适用于对复杂问题的研究。

2. 变分方法

变分方法是常用的方法之一，主要用于线性问题的模型建立。该方法要求被分析问题存在一个“能量泛函”，由泛函取驻值来建立有限元方程。对于线性弹性问题，常用最小势能原理、最小余能原理或其他形式的广义变分原理进行分析。某些非线性问题（弹塑性问题）的虚功方程也可归于此类。

3. 加权残值法

对于线性自共轭形式方程，加权残值法可得到和变分法相同的结果，如对称的刚度矩阵。对于那些“能量泛函”不存在的问题（主要是一些非线性问题和依赖于时间的问题），加权残值法是一种很有效的方法。例如，伽辽金 Galerkin 法（即选形函数为权函数的加权残值法）。

1.3.3 有限元法与工程求解问题的关系

有限元法与工程求解问题的关系可以用如图 1-2 所示的方框图表示。

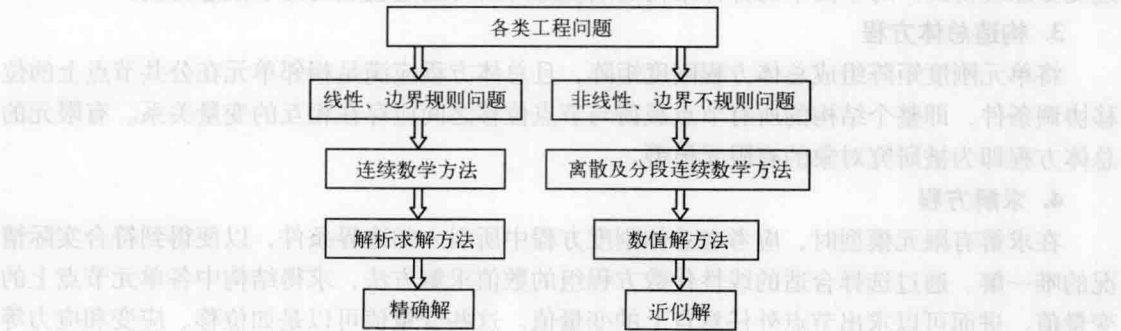


图 1-2 有限元法与工程求解问题的关系

通常，实际工程问题可分为线性问题和非线性问题、边界规则与不规则问题等。对于简单的线性、边界规则问题，可采用常规的数学方法进行解析求解，得到问题的精确解。而对于非线性、边界不规则等复杂问题，在满足精度预期的条件下，可采用整体离散化、局部连

续化方法建立有限元模型,通过数值解得到原问题的近似解。如图 1-2 所示,对于工程问题可采用一般数学方法得到其精确解或利用有限元法得到其近似解。

1.3.4 有限元法中的变量

在有限元分析中,所涉及的研究内容及变量非常多。为了便于总体了解以及后面的学习,下面对常见变量类型、变量含义及其关系做简要说明。

1. 有限元法的基本变量

有限元分析过程中的常用变量包括体力、面力、应力、位移和应变等。

- 体力是指分布在物体体积内部各个质点上的力,如重力、惯性和电磁力等。
- 面力是指分布在物体表面上的力,如风力、接触力、流体力和阻力等。
- 应力是指在外力作用下其物体产生的内力。
- 位移是指节点的移动。在约束条件下的节点位移称作虚位移,是指可能发生的位移。
- 应变是指在外力作用下其物体发生的相对变形量,是无量纲的变量。线段单位长度的伸缩,称为正应变,用 ε 表示。例如,假设过 P 点的某一微小单元线的长度为 Δl ,

其变形后长度为 $\Delta l'$, 则 P 点的应变为 $\varepsilon = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta l' - \Delta l}{\Delta l}$, 如图 1-3a 所示。在直角坐标

中所取单元体为正六面体时,单元体的两条相互垂直的棱边,在变形后直角改为变量定义为剪应变、角应变或切应变,如图 1-3b 所示。切应变以直角减少为正,反之为负。

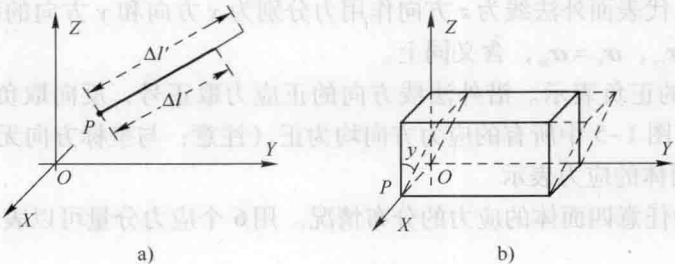


图 1-3 应变定义的图形表示
a) 正应变的定义 b) 剪应变的定义

2. 有限元法中的变量关系

在有限元分析中,对节点变量与坐标系之间以及各节点变量之间的关系分析,是建立有限元方程的关键。

(1) 介质中的应力表示

图 1-4 所示为介质中任意一点的应力表示。对任意物体,可以通过任意两点 n 、 m 将其截为两部分: I 和 II。在截面 mn 内任取一点 P 并作一微小平面 ΔA 。设 P 点上的内力为 ΔQ , 则 $\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} = S \triangleq \sigma$ 为 P 点的应力, σ 在 ΔA 的法向量 n 上的投影 σ_n 为正应力, σ 在 ΔA 上的投影 τ_n 为剪应力。 P 点在任意平面上都会受到一个正应力和两个剪应力的作用。在空间中,应力和剪应力可各自分解为 3 个坐标力,分别与 3 个坐标轴平行。