概率论

周　影　马维军　郝立丽　编

黑龙江大学出版社
HEILONGJIANG UNIVERSITY PRESS

概率论

周 影 马维军 郝立丽 编

黑龍江大學出版社
HEILONGJIANG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

概率论 / 周影，马维军，郝立丽编. -- 哈尔滨 :
黑龙江大学出版社，2015.5
ISBN 978 - 7 - 81129 - 895 - 6

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①周… ②马… ③郝… Ⅲ. ①概率论
- 高等学校 - 教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 088472 号

概率论
GAILÜLUN
周 影 马维军 郝立丽 编

责任编辑 戚增媚 王选宇
出版发行 黑龙江大学出版社
地 址 哈尔滨市南岗区学府路 74 号
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 720 × 1000 1/16
印 张 10.75
字 数 199 千
版 次 2015 年 5 月第 1 版
印 次 2015 年 5 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978 - 7 - 81129 - 895 - 6
定 价 22.00 元

前　言

概率论与数理统计都是研究随机现象的数学学科, 而概率论又是数理统计的基础, 它在许多领域都有着重要的应用. 因此, 这门课已成为各高等院校理工科的重要必修课程. 本书是作者在多年的教学经验和实践积累的基础上编写的, 力求基础知识简洁明了, 内容由浅入深, 以便于读者阅读. 学习本书不需要太多的数学知识, 学过高等数学和线性代数的读者便可读懂, 书中的参考阅读部分还可帮助读者加深对相关内容的理解.

本书可作为理工科院校基础课的教材, 也可作为数学教师及相关人员的参考用书. 在本书的编写过程中, 有许多专家提出了宝贵的意见和建议, 在此表示感谢. 另外, 在本书的编写过程中, 我们参考了许多相关教材和著作, 从中摘取了一些例题和习题, 书中没有一一注明, 在此一并向相关作者表示感谢. 由于作者的水平、经验有限, 难免有错误和不足之处, 非常希望广大读者给予批评指正. 谢谢!

编者

2014 年 1 月

目　录

第一章　随机事件与概率

§1.1　随机事件

1.1.1　必然现象与随机现象

在自然界中, 各类事物变化万千, 归纳起来有如下两种现象. 一种现象是可以预言的, 也就是说我们做一个试验或观察某一现象能够得到某种特定的结果, 这种现象称为**必然现象**. 例如我们抛掷一枚硬币, 可以断言它一定落到地面上. 还有另一种现象, 例如, 抛掷一枚硬币, 其结果可能是正面朝上, 也可能是背面朝上. 至于哪一面朝上, 在抛掷之前我们是无法知道的. 但反复抛掷同一枚硬币, 我们会发现它的结果呈现出某种规律性, 即正面朝上的次数大约占抛掷总数的一半. 这种在个别试验中其结果呈现出不确定性并且在大量重复试验中其结果又具有统计规律性的现象, 我们称之为**随机现象**. 随机现象是概率论与数理统计研究的对象.

在上面的两个例子中, 尽管都是抛掷硬币, 却有着不同的理解, 一种是必然现象, 一种是随机现象, 这实际上是由我们观察的目的决定的.

参考阅读: 随机现象

以前人们把随机现象称为"偶然现象", 是指它是"不正常的"、"出乎意料的"或者是"原因不明的", 甚至对于雷电、陨石、地震等现象认为是天降的灾难. 也有人认为, 之所以会出现不可预言的偶然现象, 是因为我们对一个现象产生的原因还缺乏全面足够的认识, 并且认为随着科学发展和人类认识的深化, 总有一天将不再存在不可预言的随机现象. 诚然, 增加条件组的条件来减少随机性是可能的, 但是, 在实际中即使人们有可能将条件组的条件控制到非常相近的程度, 其影响因素也是大量的, 且相互作用错综复杂, 随机因素的影响总是不可避免, 很多现象初始条件稍微改变一点点, 其产生的结果差别可能就会非常大. 因此, 随机现象是客观存在的, 我们只有掌握其规律, 才能驾驭它.

1.1.2　随机试验、样本空间、随机事件

1. **随机试验**

这里我们把试验作为一个含义广泛的术语. 我们把对某种现象所做的一次科学试验或观察, 统称为一个试验. 若它满足以下三个特点:

(1) 可以在相同的条件下重复地进行;

(2) 每次试验的可能结果不止一个, 并且能事先明确试验的所有可能结果;

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现,

则称该试验为**随机试验**, 简称**试验**, 记为 E.

下面举一些随机试验的例子.

例 1.1.1 投掷一枚硬币, 观察正面 H、反面 T 出现的情况.

例 1.1.2 同时抛掷两枚硬币, 观察正面 H、反面 T 出现的情况.

例 1.1.3 投掷一枚硬币, 观察首次出现正面 H 时, 所需的投掷次数.

例 1.1.4 从一批电子元器件中抽取一个, 测试它的寿命.

我们是通过研究随机试验来研究随机现象的.

2. **样本空间**

某一随机试验 E 的所有可能结果构成一个集合, 我们把这个集合称为**样本空间**, 记为 Ω. 称样本空间 Ω 中的每个元素为样本点, 也就是某个试验的结果, 用 ω 表示.

下面写出例 1.1.1 至例 1.1.4 中试验的样本空间 Ω_k:

$\Omega_1=\{H,T\}$;

$\Omega_2=\{HH,HT,TH,TT\}$;

$\Omega_3=\{1, 2, 3, \cdots\}$;

$\Omega_4=\{t \mid t \geqslant 0\}$.

3. **随机事件**

在实际中, 人们往往关心满足某种条件的那些样本点所组成的集合. 例如在例 1.1.3 中我们可能关心的是投掷的次数是否为偶数. 满足这一条件的样本点组成 Ω_3 的一个子集: $A=\{2,4,6,8,...\}$. 称 A 为此试验的一个随机事件. 显然, 当且仅当 A 中的一个样本点出现时有“投掷的次数是偶数”.

一般, 我们称试验 E 的样本空间 Ω 的子集为 E 的**随机事件**, 简称**事件**. 事件常用字母 $A,B,C,\cdots$ 表示.

由样本点组成的单点集称为**基本事件**, 即基本事件是不可能再分的事件, 通常用 ω 表示. 与基本事件相对应的是**复杂事件**, 其至少由两个样本点构成.

在每次试验中, 当且仅当 A 中的一个样本点出现时, 称这一**事件发生**, 用集合论的语言表示就是 $\omega \in A$.

样本空间 Ω 包含所有的样本点, 它是 Ω 自身的子集, 在每次试验中它总是发生, 称为**必然事件**. 空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点, 它也是样本空间的子集, 它在每次试验中都不发生, 称为**不可能事件**.

例 1.1.5 在 $0,1,2,\cdots,9$ 十个数字中任意选取一个, 可能有十种不同的结果:“取得的数是 0”, “取得的数是 1”, $\cdots$, “取得的数是 9”. 它们为基本事件, 可以记为 $\{0\},\{1\},\cdots,\{9\}$. 根据观察目的的不同, 还可以有其他结果, 均为随机事件:

“取得的数是偶数”：记为 $\{0,2,4,6,8\}$.

“取得的数能被 3 整除”：记为 $\{0,3,6,9\}$.

“取得的数大于 4”：记为 $\{5,6,7,8,9\}$.

“取得的数为 -1”：它为不可能事件, 记为 $\varnothing$.

“取得的数大于等于零”：它为必然事件, 记为 Ω.

随机事件通常有三种表示方法：

(1) 用集合表示.

(2) 用语言表示, 但语言需明白无误.

(3) 用随机变量表示.

前两种方法我们已经了解, 而第三种表示法我们将在第二章重点介绍. 在实际问题中, 哪一种表示方法方便就用哪种方法.

用集合的观点来处理事件的关系与运算是非常重要的. 我们可以认为事件是集合. 下面讨论概率论中事件之间的关系与运算.

1.1.3 事件之间的关系与运算

1. **事件之间的关系**

既然事件是集合, 那么有关集合的关系也适用于事件之间的关系.

(1) 包含关系　若事件 A 发生必导致事件 B 发生, 则称事件 B 包含事件 A, 或称事件 A 是事件 B 的子事件, 记作 $A\subset B$, 或者 $B\supset A$.

(2) 相等关系　如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$, 即 $A=B$, 称事件 A 与事件 B 相等.

从集合论的角度讲, 两个事件相等就意味着这两个事件是同一个集合. 但要注意, 有时候用不同语言描述的事件也可能是同一个事件. 例如, 投两枚骰子, 以 A 记事件“两枚骰子的点数为一奇一偶”, 以 B 记事件“两枚骰子的点数之和为奇数”, 显然有 $A=B$.

(3) 互不相容关系　若事件 A 与 B 不能同时发生, 则称事件 A 与事件 B 互不相容 (或互斥), 记作 $A\cap B=\varnothing$. 基本事件是两两互不相容的.

2. **事件运算**

(1) 事件的交　设事件 C 表示“事件 A 与 B 同时发生”这一事件, 即 $C=\{\omega|\omega\in A \text{ 且 } \omega\in B\}$, 则称 C 为事件 A 与 B 的交事件 (或积事件), 记作 $C=A\cap B$ (或 AB).

类似地, 称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 $A_1,\cdots,A_n$ 的交事件；称 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的交事件.

(2) 事件的并　设事件 D 表示“事件 A 与 B 至少有一个发生”这一事件, 即 $D=\{\omega|\omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$, 则称 D 为事件 A 与 B 的并事件 (或和事件), 记作 $D=A\cup B$.

类似地, 称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并事件; $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的并事件.

(3) 事件的差　设事件 E 表示“事件 A 发生而 B 不发生”这一事件, 即 $E=\{\omega|\omega\in A$ 且 $\omega\notin B\}$, 则称 E 为事件 A 与 B 的差事件, 记作 $E=A-B$, 也可记为 $A\backslash B$.

(4) 事件的逆事件　若 $A\cup B=\Omega$ 且 $A\cap B=\varnothing$, 则称 A 与 B 是逆事件或对立事件. 在一次试验中, 对立事件 A 与 B 中必然有一个发生, 且仅有一个发生. A 的对立事件记为 $\overline{A}$, 它表示“A 不发生”这一事件, 即 $\overline{A}=\Omega-A$.

注 由 (3) 和 (4) 的定义可得: 事件 $A-B=A\cap\overline{B}$.

事件之间的关系及运算见图 1.1 和图 1.2.

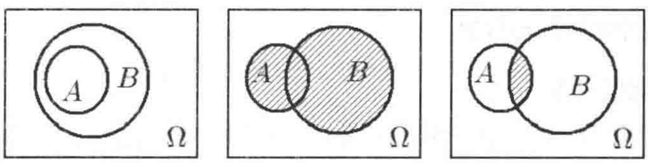

图 1.1　$A\subset B, A\cup B, A\cap B$

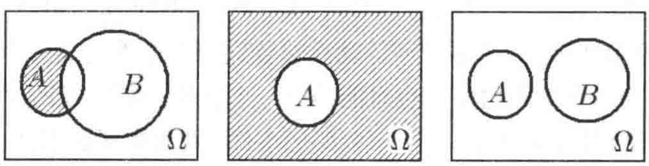

图 1.2　$A-B, \overline{A}, A\cap B=\varnothing$

3. 事件的运算法则

(1) (交换律) $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$;

(2) (结合律) $A\cup B\cup C=(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,
$A\cap B\cap C=(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(3) (分配律) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,
$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

(4) (吸收律) $(A\cup B)\cap A=A$, $(A\cap B)\cup A=A$;

(5) (对偶律) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$, $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

注 事件运算的对偶律是很有用的公式, 其证明也并不困难, 读者可使用集合论的语言自行证之. 另外, 公式 (5) 中的对偶律也适用于有限个事件或可列个事件的运算, 即

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A_i};$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}.$$

例 1.1.6 同时抛掷两枚硬币, 观察其正面 H 和反面 T 出现的情况. 其样本空间为 $\Omega=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$, 令 $A=\{(H,H),(H,T),(T,H)\}$, $B=\{(H,T),(T,H),(T,T)\}$, $C=\{(H,H),(T,T)\}$, 则

$$A\cup B=\Omega,\ A\cap B=\{(H,T),(T,H)\},\ A-B=\{(H,H)\},$$

$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}=C,\ \overline{C}=\Omega-C=A\cap B=\{(H,T),(T,H)\}.$$

其他关系及运算读者同理可自行解决.

§1.2 事件的概率

在一次试验中, 对于一个事件来说它可能发生, 也可能不发生. 有些事件发生的可能性大些, 有些事件发生的可能性小些. 我们希望知道某些事件在一次试验中发生的可能性究竟有多大. 例如, 知道了某活火山在某段时间内喷发的可能性大小, 我们就可以预先做一些必要的准备工作, 如迁移人口、建设必要的保护措施等. 那么, 某事件发生的可能性大小用什么去刻画呢? 我们很自然会想到利用某一数量指标去刻画, 而这一数量指标也应满足一定的条件.

首先, 它应具有一定的客观性, 不能人为地随意改变. 其次, 它能满足一般的常理. 例如, 事件发生可能性大的, 它的值就大; 事件发生可能性小的, 它的值就小; 必然事件的值最大, 不可能事件的值最小.

把刻画事件发生可能性大小的数量指标叫作事件的**概率**. 事件 A 的概率记为 $P(A)$, 且规定 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

在概率论的发展史上, 人们曾针对不同的问题, 从不同的角度给出了定义概率和计算概率的各种方法. 我们先从古典概率出发来考虑和定义概率.

1.2.1 古典概率

投掷一骰子, 若此骰子是均匀的, 也就是说, 它的六个面中任何一面朝上的可能

性是相同的, 即出现一点, 两点 , $\cdots$, 六点的机会均等, 那么可以定义它们出现的概率为 $\frac{1}{6}$. 下面给出古典概率的定义.

若某试验满足以下两个条件:

(1) 试验的样本空间的元素只有有限个;

(2) 每个基本事件发生的可能性相同.

这种试验称为**等可能概型**. 它是概率论发展初期的主要研究对象, 所以也称为**古典概型**. 古典概型具有直观、容易理解的特点, 有着广泛的应用. 古典概型中事件发生的概率的计算方法如下:

设某一随机试验, 它有有限个基本事件 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$, 且具有等可能性, 即等可能概型. 则对任一事件 A, 对应的概率 $P(A)$ 由下式计算:

$$P(A) = \frac{k}{n}, \tag{1.2.1}$$

其中 k 表示事件 A 包含的基本事件数, n 表示基本事件总数. 我们把此概率称为**古典概率**.

例 1.2.1 *投掷一枚均匀的硬币. 设 $A =$ 正面向上, 求 $P(A)$.*

解 此试验有两个结果:“正面向上”、“反面向上”, 它们是等可能的. 由 (1.2.1) 得

$$P(A) = \frac{1}{2} = 0.5.$$

例 1.2.2 *投掷两枚均匀的硬币, 设 H 为正面向上, T 为反面向上, 求 $A =$“一个是正面向上, 一个是反面向上”的概率 $P(A)$.*

解 样本空间 $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$, 含有四个基本事件 $\{HH\}, \{HT\}, \{TH\}$, $\{TT\}$, 而且它们的出现是等可能的, $A = \{HT, TH\}$, 即它包含两个基本事件, 所以有

$$P(A) = \frac{2}{4} = 0.5.$$

例 1.2.3 *一盒中有五个球, 其中有三个白球, 两个红球, 现从中随机抽取两个, 求两个球都是白球的概率.*

解 不妨把这五个球编上号码: $1, 2, 3, 4, 5$, 其中 $4, 5$ 为红球. 试验结果有 C_5^2 个结果, 它们是等可能的. 而“两个都是白球”的试验结果有 C_3^2 个. 记 $A =$“两个都是白球”, 则:

$$P(A) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = 0.3.$$

例 1.2.4 *(抽样模型) 设一批产品共有 N 个, 其中有 M 个次品, 其余为正品. 现从中随机抽取 n 个, 则恰好有 m 件次品的概率是多少?*

解 试验基本事件的总数为 C_N^n 个, “恰好有 m 件次品”所包含的基本事件数为 $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$, 设 $A=$“恰好有 m 件次品”, 则:

$$P(A)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

更一般的提法有:

设总共有 N 件物品, 分为 k 类, 其中第 i 类有 N_i 件 $(i=1,2,\cdots,k)$, $\sum\limits_{i=1}^k N_i=N$, 现从中随机抽取 n 件, 则事件 $A=$ “恰好有 n_i 件属于第 i 类, $i=1,2,\cdots,k$”的概率为:

$$P(A)=\frac{C_{N_1}^{n_1}C_{N_2}^{n_2}\cdots C_{N_k}^{n_k}}{C_N^n},$$

上式称为**超几何概率**.

例 1.2.5 (盒子模型) 设有 m 个球, 每个球等可能地落入 $N(N\geqslant m)$ 个盒子中 (每个盒子能容纳无限多个球), 求事件 $A=$“每个盒子至多有一个球”的概率.

解 m 个球落在 N 个盒子中有 N^m 种落法, 即基本事件总数 $n=N^m$, 而每个盒子至多有一个球的形式有 A_N^m 种, 则

$$P(A)=\frac{A_N^m}{N^m}.$$

从古典概率公式 (1.2.1) 可以得到下面的性质:

性质 1.2.1 对古典概率有:

(1) 设 A 为任意事件, 则 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(2) 对必然事件 Ω, 有 $P(\Omega)=1$;

(3) 设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容, 则

$$P(\bigcup_{i=1}^m A_i)=\sum_{i=1}^m P(A_i).$$

证明 (1) 因为任意事件 A 所包含的基本事件数 k 满足 $0\leqslant k\leqslant n$, 其中 n 为基本事件总数, 故有

$$0\leqslant\frac{k}{n}\leqslant 1.$$

(2) 由于必然事件 Ω 所包含的基本事件数为 n, 即 $k=n$, 所以

$$P(\Omega)=\frac{n}{n}=1.$$

(3) 设 A_i 含有 k_i 个基本事件 $(k_i\leqslant n),i=1,2,\cdots,m$, 所以

$$P(A_i)=\frac{k_i}{n},i=1,2,\cdots,m.$$

由于 A_i $(i=1,2,\cdots,m)$ 互不相容, 则 $\bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i$ 含有 $\sum\limits_{i=1}^{m} k_i$ 个不相同的基本事件, 所以

$$P(\bigcup_{i=1}^{m} A_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} k_i = \sum_{i=1}^{m} P(A_i).$$

在古典概率计算过程中, "基本事件是等可能的" 这一假设往往是通过人为的主观判断而得到的, 有时是不完全准确的. 因此当我们不能判定是否为等可能性时, 我们就通过重复多次试验来判断事件发生的可能性大小, 这就提出了统计概率这一名称 (也称经验概率).

1.2.2 统计概率

我们首先从两个例子入手.

例 1.2.6 历史上曾有多人做抛硬币试验, 其统计数字见表 1.1. 从表 1.1 中的数据可知, 正面出现的次数与抛掷总数之比 (频率) 约为 $\frac{1}{2}$.

表 1.1

试验者	抛掷次数	正面次数	频率
德摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

例 1.2.7 从某省高考试卷中抽取部分数学试卷, 其得分情况参见表 1.2. 从表 1.2 中的数字看出, 随着抽取试卷数的增多, 及格率在 0.33 左右摆动. 也就是说, 此省考生的数学及格率约为 $\frac{1}{3}$.

表 1.2

抽取卷子数	5	10	50	150	600	900	1800	2400
及格数	0	2	6	40	195	305	590	810
及格率	0	0.2	0.12	0.27	0.325	0.34	0.32	0.33

从以上例子可以看出, 在相同的条件下做大量的重复试验, 事件 A 发生的频率稳定在某一数值附近 (这一数值其实就是事件发生的概率, 以后会具体说明), 而且偏离的可能性很小. 所以常常用频率来代替概率.

定义 1.2.1 设在相同条件下进行了 n 次试验 (n 足够大), 事件 A 发生了 m 次, 则事件发生的频率 $f_n(A)=\dfrac{m}{n}$.

我们用 $f_n(A)$ 来度量事件 A 发生的可能性大小, 称它为**统计概率**.

性质 1.2.2 事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 有如下性质:

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;

(2) $f_n(\Omega)=1$;

(3) 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 互不相容, 则

$$f_n(\bigcup_{i=1}^{m}A_i)=\sum_{i=1}^{m}f_n(A_i).$$

证明 (1) 及 (2) 显然, 现证 (3).

设 n 次试验中, A_i 发生了 k_i 次, 所以

$$f_n(A_i)=\frac{k_i}{n}, i=1,2,\cdots,m.$$

又因为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 互不相容, 所以 $\bigcup\limits_{i=1}^{m}A_i$ 发生的频率为:

$$f_n(\bigcup_{i=1}^{m}A_i)=\frac{k_1+\cdots+k_m}{n}=\sum_{i=1}^{m}f_n(A_i).$$

1.2.3 几何概率

在古典概型中利用等可能性, 成功地计算了某一类问题的概率. 但是古典概型要求可能结果的总数为有限个. 对于无限多可能结果而又具有某种“等可能性”的场合一般可用几何方法求解.

设某一随机试验的样本空间可用欧氏空间的某一区域 S 表示, 其中的样本点是“均匀分布”的, 类似于古典概率中的“等可能性”. 而区域 S 和表示任意事件的小区域 A 都是可以度量的, 用 $\mu(S)$ 及 $\mu(A)$ 表示. 如一维区间的长度、二维区间的面积、三维空间的体积等等, 并且此度量满足一定的性质, 如非负性、可加性等.

设 A 为某个随机事件,$A\subset S$. $\mu(S)$、$\mu(A)$ 分别为 S、A 的度量的大小, 则根据“均匀分布”性, 事件 A 发生的概率可用下式计算:

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(S)}, \tag{1.2.2}$$

此概率称为**几何概率**.

性质 1.2.3 几何概率有如下性质:

(1) 对任意事件 A 有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(2) 对必然事件 Ω 有 $P(\Omega)=1$;

(3) 事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容, 则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

例 1.2.8 (约会问题) 两人相约某天 8 点至 9 点在某地会面, 先到者等候另一人 20 分钟, 过时就离去, 试求两人能会面的概率.

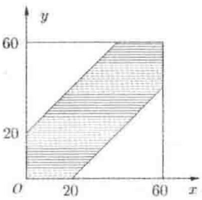

图 1.3

解 以 x, y 分别表示两人到达的时刻, 则会面的充要条件为 $|x-y|\leqslant 20$. 记

$$\Omega=\{(x, y)|0\leqslant x\leqslant 60, 0\leqslant y\leqslant 60\},\ A=\{(x, y)|\,|x-y|\leqslant 20,(x, y)\in S\},$$

集合 A 为图 1.3 中阴影部分. 则

$$P(A)=\frac{A\text{的面积}}{S\text{的面积}}=\frac{60^2-40^2}{60^2}=\frac{5}{9}.$$

例 1.2.9 (蒲丰投针问题) 平面上画着一些平行线, 它们之间的距离等于 a, 向此平面任投一长度为 $l(l<a)$ 的针, 试求此针与某一平行线相交的概率.

解 以 x 表示针的中点到最近一条平行线的距离, ϕ 表示该平行线与针的交角 (见图 1.4), 则有 $0\leqslant x\leqslant \frac{a}{2}, 0\leqslant \phi\leqslant \pi$, 因此

$$S=\{(\phi, x)|0\leqslant \phi\leqslant \pi, 0\leqslant x\leqslant \frac{a}{2}\}.$$

我们关心的事件 A, 即 "针与某一平行线相交", 用 ϕ, x 这两个参数来表示, 应为 $x\leqslant \frac{l}{2}\sin\phi$, 所以

$$A=\{(\phi, x)|0\leqslant x\leqslant \frac{l}{2}\sin\phi,(\phi, x)\in S\},$$

则

$$P(A)=\frac{A\text{的面积}}{S\text{的面积}}=\frac{\int_0^{\pi}\frac{l}{2}\sin\phi \mathrm{d}\phi}{\frac{a}{2}\pi}=\frac{2l}{\pi a}.$$

思考: "$l<a$" 这个条件是否非要不可?