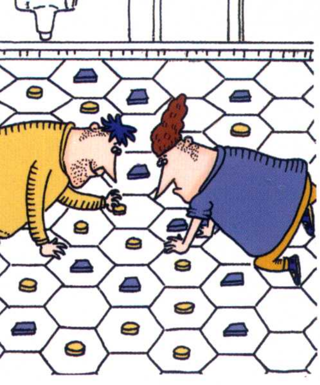
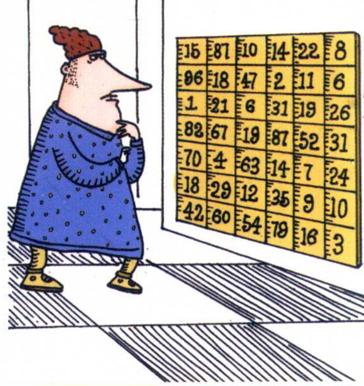


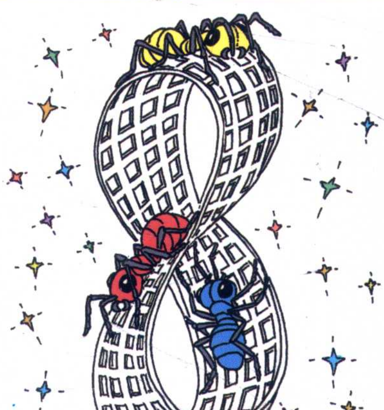


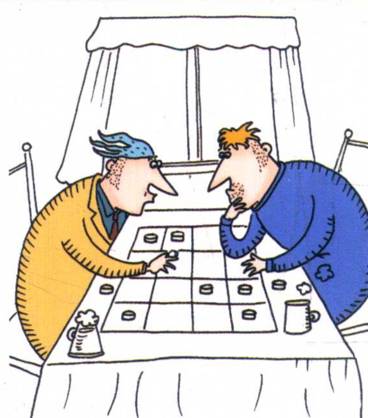
加德纳趣味数学

经典汇编

椭圆、拉丁方及连桥棋牌

马丁·加德纳 著　　黄峻峰 刘 萍 译





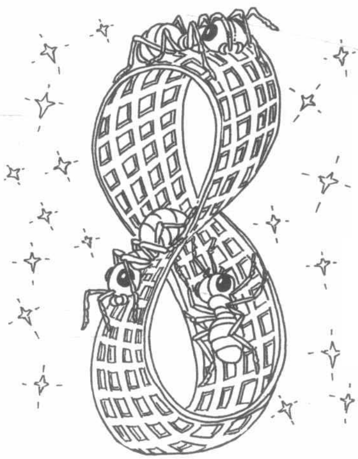
上海科技教育出版社

加德纳趣味数学

经典汇编

椭圆、拉丁方及连桥棋牌

马丁·加德纳 著　　黄峻峰 刘 萍 译



上海科技教育出版社

责任编辑 侯慧菊
装帧设计 李梦雪 杨 静

·加德纳趣味数学经典汇编·

椭圆、拉丁方及连桥棋牌

[美]马丁·加德纳 著
黄峻峰 刘 萍 译

上海世纪出版股份有限公司
上 海 科 技 教 育 出 版 社 出版
（上海市冠生园路393号 邮政编码200235）
上海世纪出版股份有限公司发行中心发行
www.ewen.co www.sste.com
各地新华书店经销 常熟文化印刷有限公司印刷
ISBN 978-7-5428-6503-8/O·1028
图字09-2013-854号

开本 720×1000 1/16 印张 11.5
2017年1月第1版 2017年1月第1次印刷
定价：28.00元

图书在版编目(CIP)数据

椭圆、拉丁方及连桥棋牌/(美)马丁·加德纳著;黄峻峰,刘萍译.—上海:上海科技教育出版社,2017.1
(加德纳趣味数学经典汇编)
书名原文:new mathematical diversions
ISBN 978-7-5428-6503-8

Ⅰ.①数… Ⅱ.①马… ②黄… ③刘… Ⅲ.①数学—普及读物 Ⅳ.①01-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第257817号

献给我的妻子夏洛特

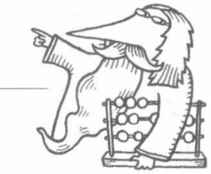
前言

英国数学家李特尔伍德(John Edensor Littlewood)在他的《数学家杂记》(*Mathematician's Miscellany*)前言中写道:"一个有趣的数学游戏,是比一打平庸论文更好的数学。"

这是一本关于数学游戏的书,前提是这个"游戏"范围极广,包括任何类型混合了"极其开心"元素的数学知识。大部分数学家都喜爱玩这样的游戏,当然,他们把游戏限制在合理的范围内。娱乐数学具有一种魔力,让有些人完全沉迷其中。纳博科夫[①]在他杰出的关于国际象棋的小说《防守》(Defense)中就讲过这样一个人,国际象棋(数学游戏的一种形式)完全主宰了他的思想,以至于他与真实世界失去联系,最后从窗户跳了出去,以象棋设计师们称为升华或自我陪伴的方式,结束了他悲惨的游戏人生。这符合纳博科夫这位国际象棋大师的分裂性格。他小时候学习不好,在数学上,有一段时间他"格外沉迷于数学题集《快乐数学》(*Merry Mathematics*)。沉迷于数字的有趣反常行为,沉迷于几何线条的任性嬉闹,他醉心于书本上没有的任何东西"。

① 纳博科夫(Vladimir V. Nabokov, 1899—1977),俄裔美籍小说家、散文家、诗人、文学评论家、翻译家,同时也是20世纪世界文学史上最有影响力的文学家之一。

《洛丽塔》(*Lolita*)是纳博科夫在1955年所写的小说,是20世纪受到关注并且流传最广、获得极大荣誉的一部小说。小说叙述了一名中年男子与一个未成年少女的恋爱故事。1955年首次由法国的奥林匹亚出版社出版。《洛丽塔》现已被改编成电影,另有与此相关的歌曲和时尚风格。——译者注



上面故事的寓意是：若你有头脑并想尝试一下，你可以玩一下数学游戏，但不要玩太多。偶尔玩数学游戏可以让你休息一下，激起你对严谨科学及数学的兴趣，但要严格控制，不能过度，不能着魔。

如果你控制不住自己，邓萨尼勋爵（Lord Dunsany）的故事“棋手、金融家和其他”可以给你安慰。一位金融家回忆起一个叫斯莫格斯（Smoggs）的朋友，在即将成为知名金融家之前，国际象棋把他引到了邪路上。“起初这种变化是缓慢的，他常常与一位棋手在午饭期间下棋，那时我与他在同一公司供职。后来，他开始打败对方……再后来他参加了国际象棋俱乐部，似乎是某种魔力缠上了他，这种魔力类似于酒，更类似于诗歌或音乐这些东西……他本该成为一名金融家，人们说这不比国际象棋难，而国际象棋让他一无所有。我从未看到如此智慧的头脑就这样被毁了。”

监狱长也同意我的看法，说：“是有那样的人，真遗憾呀……”然后他把那个金融家锁在牢房里过夜。

我再次感谢《科学美国人》（*Scientific American*）允许再版这些专题。在前两本汇编中专题已有拓展，错误得到修正，还添加了读者寄给我的新材料。我感谢我的妻子帮忙校对，感谢我的编辑尼娜·伯恩（Nina Bourne），更感谢全美国及全世界日益扩大的读者群，他们的信件大大丰富了这次再版的内容。

马丁·加德纳

（Martin Gardner）

目录

第 1 章

四色图定理

颜色

数学家经常使用，

如饥似渴大吃布丁，

为了解决四色难题。

打油诗

林登（J. A. Lindon）

英格兰萨里郡

著名的拓扑学四色定理是所有未经证实的伟大数学猜想之一，在某种意义上，它简单到甚至一个小孩子都可以理解。倘若在地图上着色的话，需要几种颜色才能使相邻的国家相互区别开来？答案是用4种颜色，你就可以很容易地填满一张地图。遵循初等数学的知识去严格证明的话，显然5种颜色也足够了。我们的问题是，4种颜色是充分且必要的吗？换一种方式说，去构建一个这样的图需要用5种不同的颜色吗？那些对此问题感兴趣的数学家认为不需要5种颜色，但是他们不能够确定。

每隔几个月，我的邮箱就会收到冗长的关于四色定理的证明。事实上，几乎所有的发件人都将此与另一个非常简单的原理相混淆了，即：在含5个区域的图中，不可能让一个区域与其他4个区域都相邻（仅仅在一点上相连的两个区域不算）。我自己在某种程度上也曾对这个原理感到困惑。我写过一篇题为“五色岛”的科幻故事，虚构了一个被波兰拓扑学家划分成5个边界相邻区域的岛屿，不难证明这类图形是不可能绘制出来的。人们可能会认为，四色定理适用于所有的图，但是事实并非如此。

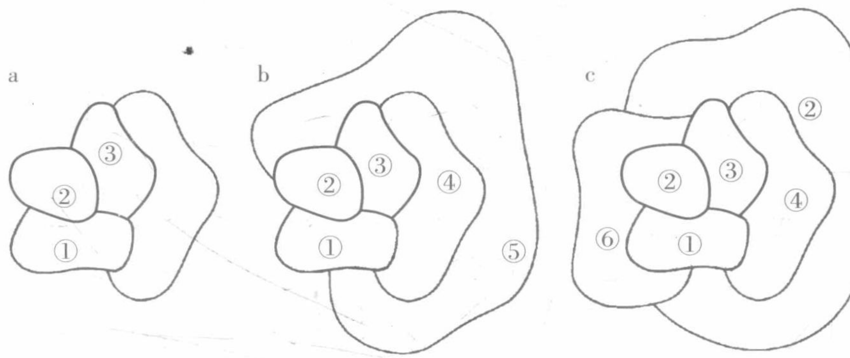
结合图1.1中简单的地图a，让我们看看为什么会是这样呢？（图中所示区域的实际形状并不重要，只有它们的连接方式是重要的。四色定理是精确的拓扑学理论，因为它与平面图形的性质有关，而且不因图形所在平面扭曲而改

变。)我们应该在空白区域涂上什么颜色呢?显然必须是②所示灰度或者已有三种灰度(①②③)之外的第四种灰度。如果我们采取后一种策略,如图1.1中的b图所示,给空白区域涂上第4种灰度,这样的话,在图中增加了一个新的区域(④)。这样,如果不使用第五种灰色的话,就不可能完成这幅图的填色。现在让我们返回a去重新试着填色,在空白区域涂上②所示灰度,如图1.1中c所示。如果有两个以上的区域与前4个区域相邻的话,同样会陷入困境。很显然,为了填满这两个新的空白区域,需要第四种以及第五种新的颜色。这是否表明在这类图的填充中5种颜色是必要的呢? 并非如此,在这两种情况下,只要回到最初的情形并改变之前的填色方案,可以使用4种颜色来完成这幅图的填充。

在很多复杂区域如几十个地区的填色图中,我们总会陷入这种困境,需要不断地返回之前的填充步骤做颜色更改。因此,为了证明四色定理,必须表明在所有情况下,这样更改总是可以成功的;或设计一个图形的4种颜色着色程序,该程序能解决在任何地图着色过程中的所有更改。基于这种预见填色的难题,巴尔设计了一个二人拓扑游戏。游戏者A绘制一个区域,游戏者B着色这个区域并绘制一个新的区域,接下来游戏者A着色这个新区域,同时绘制另一个新的区域……游戏参与者替对手绘制的最新区域进行着色,一旦双方中有一方不得不使用第五种颜色着色时,游戏以他输掉比赛而结束。我认为除了参与这种不断激发好奇心的游戏外,没有更好的方式能让人快速地意识到四色定理证明中所遇到的困难。

人们经常说,绘图者最早意识到绘制任何一张图只要4种颜色,卡尔顿学院的数学家梅(Kenneth O. May)对此表示怀疑。深入研究四色定理起源后,梅发现在早期制图类书籍中没有任何四色定理的阐述,也没有任何迹象表明四色定理得到公认。爱丁堡的学生弗朗西斯·格思里(Francis Guthrie)似乎是第

一个提到并明确定义四色定理的人。他向他的弟弟弗朗西斯·弗雷德里克(Francis Frederick)提过这个定理。1852年,费雷德里克(后来成长为一名化学家)又把有关四色定理的证明传给了他的数学老师德·摩根(Augustus de Morgan)。1878年,著名的凯利教授承认曾试图证明四色定理,但最终还是失败了,此后四色定理猜想便闻名于世了。



① 10%灰度　② 20%灰度　③ 30%灰度　④ 40%灰度　⑤ 50%灰度　⑥ 60%灰度

图1.1　在用4种颜色为一张图着色的过程中,常常很有必要改变之前的填色。

1879年,英国律师兼数学家肯普(Alfred Kempe)先生发表了一种他认为可以证明四色定理的方法,一年后,他自信满满地在英国《自然》(*Nature*)杂志上发表了一篇名为"如何用四种颜色着色地图"的文章。数十年来,数学家们都认为四色定理已经被证明了,然而希伍德(P. J. Heawood)出人意料地举出了一个反例,揭示肯普证明中致命的错误。从那时开始,最优秀的数学家们都试图解决这个问题,但都没有成功。四色定理最诱人之处是它看起来似乎很容易证明。在神童维纳(Norbert Wiener)的自传中,他写道,像所有的数学家一样,他也曾试图寻找一种证明四色定理的方法,最终发现自己无法继续,陷入了无限死循环,那种无奈,就像傻瓜手里握着金子一样。时至今日,运用该定理绘制

的图所包含的区域最多不能超过38个。38听起来似乎是一个小数目，但当我们意识到，含38个区域的地图形成的拓扑结构超过10^{38}个时，这就变得非同寻常了，即使是现代电子计算机都无法在一个合理的时间范围内检查完所有填色状态。

令人恼火的是，四色定理缺乏证明，而比平面更复杂的曲面上类似理论却得到了证明。(顺便提一下，球面中的问题与平面上的一样，球面通过改变形态可使其表面平坦化，球面上的区域问题进而等效地转换成平面问题。)如只有一个面的默比乌斯带、克莱因瓶和射影平面，已经确认6种颜色是必要且充分的。如图1.2所示，在圆环表面或者锚环表面，需要7种颜色。请注意，每个区域都与其他6个区域相邻，且由6条线段分开。事实上，在每一个经过严格定义的高次表面中，地图的着色问题都已经解决了。

但是当着色理论应用于平面或球面的时候，拓扑学家们都陷入了困境。更糟糕的是，没有明显的理由可以解释为什么会是这样的结果。一些尝试性的证明看起来似乎要成功时又出现不可思议的事，在推理链即将完善时出现令人沮丧的漏洞。没有人能预知这个著名定理的证明未来由什么来决定，但可以肯定的是，取得如下3个可能突破之一的第一人将赢得世界级声誉：

1. 发现需要5种颜色着色的地图。考克斯特在他关于四色图问题的优秀论文中写道："如果让我大胆猜测的话，我认为着色一幅图需要5种颜色是可能的，但是即使是最简单的图形也有许多种不同的着色情况(成千上万种都有可能)，面对这样的情况，没有人会有耐心去完成所有必要的测试，进而排除4种颜色着色的可能性。"

2. 四色定理被证明。可能是利用了一种新技术，突然打开了禁锢数学世界的大门。

3. 证实四色定理是不可能被证明的。这听起来有点奇怪，但在1931年，哥

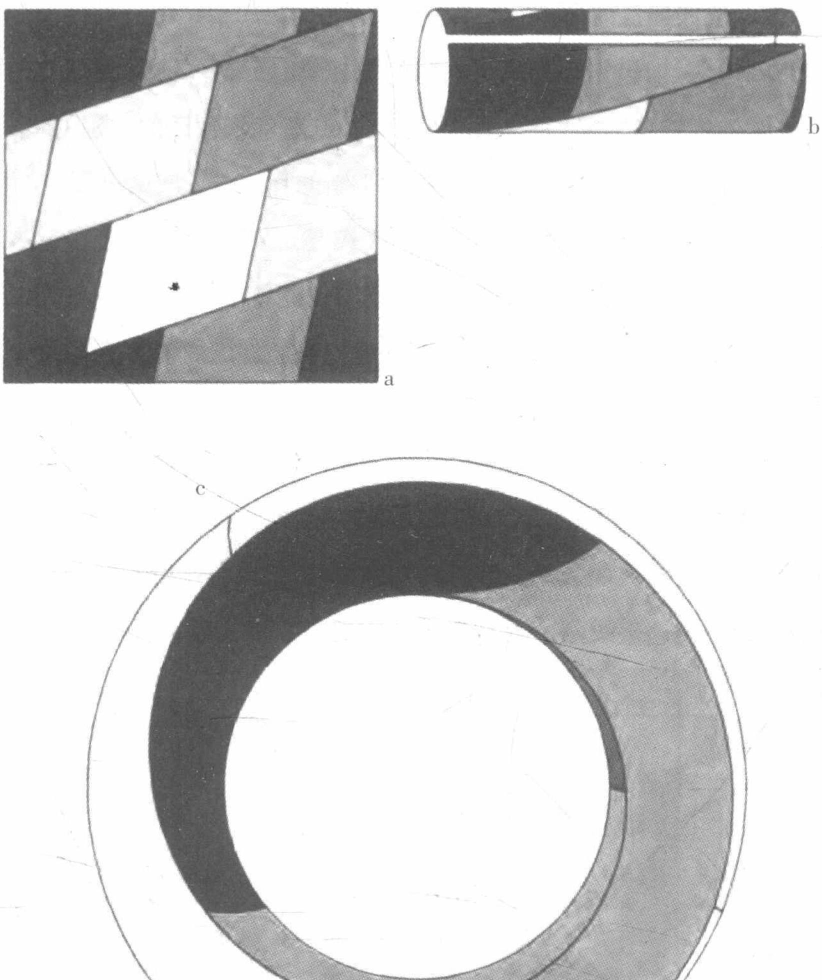


图1.2　首先将一张纸a卷成一个圆柱b,c是用7种颜色绘制的一幅圆环形图(环形面已放大)。

德尔[1]提出，在任何一个复杂的包含算术运算的演绎系统里，有一些定理在系统内"不可判定"。到目前为止，在尚未解决的伟大数学猜想中只有极少数被证实是不可判定的。四色定理是不可判定的定理吗?如果是的话，四色定理只有在应用的时候才能认为是"真"的，否则，与该定理紧密联系的个别的"不可判定"定理，将成为更大的假定演绎系统中一个新的且无法证实的公设。

遗憾的是，关于着色时5种颜色对平面图是足够的，6色或更多色对某些高次曲面是必要且充分的证明过程太过冗长，在此就不作描述了。或许以下有关两色定理的清晰证明能让读者了解某些建立着色理论的概念。

考虑平面上所有可能由直线分割形成的图，普通棋盘就是一个常见的例子。图1.3左边是一个直线分割的不规则平面图，这样的图用两种颜色着色就可以吗?答案是肯定的，并且显而易见。倘若在这种由直线分割的着色图中加一条直线(图中增加了一条深黑线)，这条线把平面划分成两个图，分别考虑各图并正确着色，在这条线两边会有一些颜色相同的区域相邻。如果把两幅图看

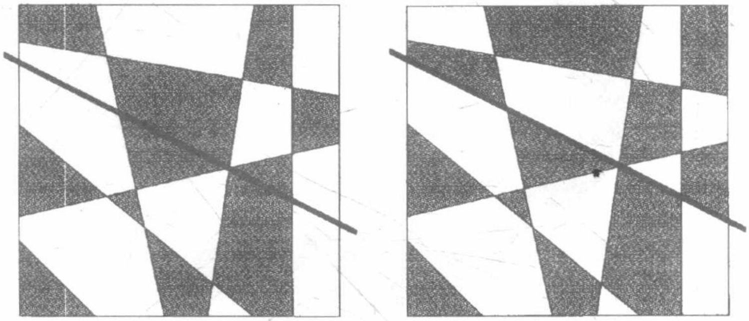


图1.3　用直线分割的图均可用两种颜色着色

① 哥德尔(Kurt Gödel，1906—1978)，数学家、逻辑学家和哲学家。生于捷克，1948年加入美国籍。其杰出贡献是哥德尔不完备定理。在20世纪初，他证明了形式数论(即算术逻辑)系统的"不完全性定理"：即在该系统中既无法证明其为真，也无法证明其为假。这是20世纪逻辑学和数学基础方面最著名的成果之一。——译者注

成一个图的话，若要恢复整个图的正确着色，我们就要更改直线某一边的着色（具体改变那一边无关紧要）。如图1.3中右图所示，黑线上面的图已经更改，不正确的着色改成了正确的。正如你所看到的，黑线两边相邻区域的颜色不同，黑线上面图的着色正好反转了。

为了完成这一定理的证明，假设一个平面被一条直线划分成两个区域，很明显两种颜色就可以进行着色。再画一条直线，通过将线两边颜色互转进行着色，继续画第三条线……如此循环下去。显然，这个过程适合任意多条的直线。应用数学归纳法，我们已经证明双色定理适用于直线构成的任何图形。该定理同样适用于非严格意义上的地图，例如，图1.4由环形线构成，这些线要么贯穿整个图形，要么构成单独的封闭曲线。如果在这样的图中增加一条从头到尾的分割线，改变这条线某一边的着色就可以了。如果增加的线是封闭曲线，调整曲线内部所有区域的着色，当然也可以调整曲线外部区域的着色。这些封闭曲线也可能会相交，这样会使得重新着色步骤变得更加复杂。

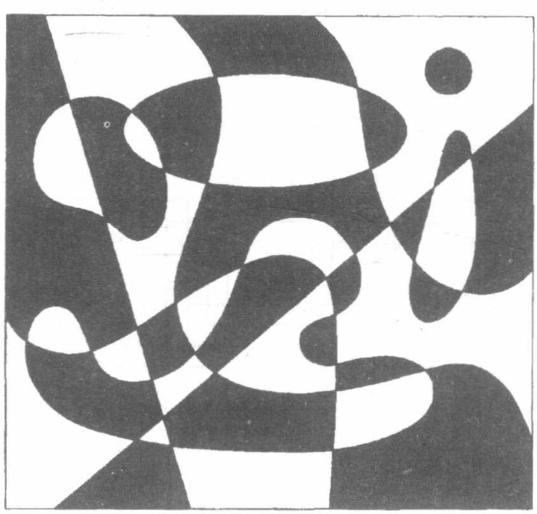


图1.4　无论是直线还是曲线分割平面图，两种颜色足矣。