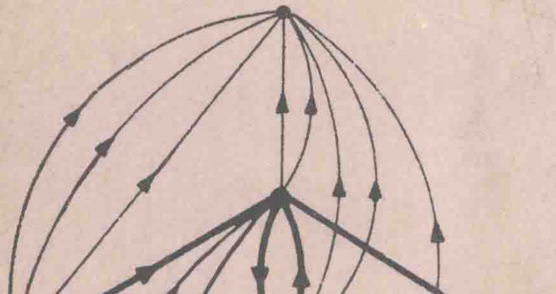
部編大學用書

組合數學

林福來　譯著



國立編譯館主編
中央圖書出版社發行

部編大學用書

組合數學

林福來　譯著

國立編譯館主編
中央圖書出版社發行

行政院新聞局出版事業登記證，局版台業字第〇九二〇號

國立編譯館主編

組合數學

版權所有・翻印必究

實價新台幣貳佰捌拾元整

原著者：C. L. Liu
譯著者：林福來
出版者：中央圖書出版社
台北市衡陽路二二號
發行人：林在高
發行所：中央圖書供應社
台北市衡陽路二二號
電話：三三一五七二六
三七一九八九三
郵政劃撥帳戶：九一四號
印刷所：利康印刷有限公司
三重市民生東街廿六之一號
中華民國七十一年八月初版
中華民國七十三年六月第二刷

編號：2742

序 言

組合理論是數學中很吸引人的一個分支，它可以應用到工程學、物理學、社會學、經濟學和作業研究上。這是一本組合理論的基礎介紹書。本書的原素材，曾經在麻省理工學院的電機工程系中，當做應用組合數學這門課的教材。

本書題材大致可分成四類，這四類其實就是應用組合數學的代表：數數分析（第 1 章至第 5 章）、圖形學（第 6 章至第 9 章），優選技巧（第 10 章至第 13章）及實驗設計（第 14 章）。本書的水準大概可供大學部高年級和研究生一年級當教科書用。念本書不必先有任何組合數學或現代代數的預備知織。打星號 * 的小節可以刪去不看，不影響全書的連貫性。所需要的代數概念，要用時都重新介紹，打點號 · 的小節，對具有代數基礎的學生可以略去不談。

由於這是一本介紹性的書，我不預備將進一步推廣性的參考目錄列進去。不過，希望讀者能參閱每章所附的一些參考資料，學起來效果一定更佳。

每章後面都附有練習題。有些練習題需要學生應用課本中介紹的抽象概念來解決，另外有一部分需將這些概念自然地延伸才能解決。我預備再寫一本包含這些問題的解答的書。

我希望藉此機會表達對Gian-Carlo ,Rota 教授的衷心感激，Rota 教授以最富啓發性的方法教我組合數學。同時我也要感謝David A. Huffman 教授，他幫我安排這門課；並且提

供許多技術性的建議。對於Robert M.Fano教授，麻省理工學院MAC計畫主持人，他在我寫此書期間的鼓勵與支持，也在此致謝。由於Fano 教授的領導，使我參與MAC計畫的情緒愉快且成果豐碩。

Murray Edelberg 先生提供本書許多好意見，並且幫忙閱讀原稿，提供練習題及準備解答，感激之至。

Donald R.Haring 博士校閱整本原稿及Shimon Even，Messrs.Peter J.Denning 和 John A.Williams 等教授的許多好意見。一并致謝。

尤其要感謝的是Kathleen Dimond 小姐幫忙打字並且打了好幾遍。最後，但不是最輕，我希望感謝內人 Jane提供許多關於本書有用的評語及建議，並且在精神上一直鼓勵，諒解使我能完成本書。

C.L. Liu

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目 錄

序 言

第一章 排列與組合

1-1 引言……1
1-2 加法原則、乘法原則……2
1-3 排列……4
1-4 組合……10
1-5 相異物品的分配……16
1-6 非相異物品的分配……19
* 1-7 Stirling 公式……21
1-8 摘要與參考資料……25
習 題……26

第二章 生成函數

2-1 引言……33
2-2 組合數的生成函數……35
2-3 排列的列舉式……46
2-4 將相異物品置於非相異的箱子……56
2-5 整數的分割……59
* 2-6 Ferrers 圖……65
2-7 基本關係式……67

2-8 摘要與參考資料………………………… 73
習 題………………………………………… 74

第三章 遞迴關係式

3-1 引言………………………………………… 83
3-2 常係數綫型遞迴關係式…………………… 85
3-3 利用生成函數的技巧求解………………… 95
* 3-4 一個特殊類型的非綫型差分方程式…………102
3-5 具兩個足碼的遞迴關係式……………………110
3-6 摘要與參考資料………………………………117
附錄 3-1：差分方程式解的唯一性………………119
習 題………………………………………………121

第四章 排容原理

4-1 引言……………………………………………129
4-2 排容原理………………………………………130
4-3 一般公式………………………………………135
4-4 離列……………………………………………140
4-5 具有相關位置限制的排列……………………143
* 4-6 棋子多項式……………………………………145
* 4-7 具有禁位的排列………………………………149
4-8 摘要與參考資料………………………………153
習 題………………………………………………154

第五章 坡里雅算術

5-1 引言……………………………………………163
5-2 集合，關係與群………………………………164
5-3 一置換群決定的等價類………………………173

5-4　函數的等價類……………………………………187
5-5　權與函數的目錄……………………………………191
5-6　坡里雅基本定理……………………………………197
5-7　坡里雅定理的推廣…………………………………207
5-8　摘要與參考資料……………………………………218
習　題…………………………………………………219

第六章　圖形理論的基本概念

6-1　引言……………………………………………………227
6-2　圖形的連通性………………………………………231
6-3　歐拉路徑……………………………………………234
6-4　漢米爾頓路徑………………………………………241
6-5　摘要與參考資料……………………………………249
習　題…………………………………………………245

第七章　樹、環路與切集

7-1　樹與衍生樹…………………………………………249
7-2　切集…………………………………………………252
7-3　綫性向量空間………………………………………255
7-4　與圖形相關聯的向量空間…………………………258
7-5　子空間的基底………………………………………263
7-6　矩陣表示法…………………………………………265
7-7　摘要與參考資料……………………………………268
附錄 7-1：向量空間中基底的向量個數……………269
習　題…………………………………………………271

第八章　平面圖與對偶圖

8-1　引言……………………………………………………275

8-2 歐拉公式……277
8-3 Kuratowski 定理……281
8-4 對偶圖……293
8-5 摘要與參考資料……301
習 題……303

第九章 控制數、獨立數與顏色數

9-1 控制集……307
9-2 獨立集……311
9-3 顏色數……316
* 9-4 顏色多項式……322
9-5 四色問題……325
9-6 摘要與參考資料……331
習 題……333

第十章 運輸網路

10-1 引言……335
10-2 切集……337
10-3 最大流程、最小切集定理……339
* 10-4 一個推廣……344
10-5 摘要與參考資料……352
習 題……353

第十一章 配對理論

11-1 引言……359
11-2 完全配對……360
11-3 最多配對……367
* 11-4 另一種處理法……372

11-5 摘要與參考資料……………………………………………375
習 題……………………………………………………………376

第十二章 線性規畫

12-1 引言…………………………………………………………381
12-2 最佳可行解…………………………………………………385
12-3 輔助變數……………………………………………………391
12-4 單體法………………………………………………………400
12-5 表格式………………………………………………………406
12-6 一些複雜的情形及其結果…………………………………409
* 12-7 對偶性……………………………………………………417
12-8 摘要與參考資料……………………………………………425
習 題……………………………………………………………426

第十三章 動態規畫

13-1 引言…………………………………………………………433
13-2 優選原則……………………………………………………437
13-3 泛函方程式…………………………………………………442
13-4 摘要與參考資料……………………………………………446
習 題……………………………………………………………447

第十四章 塊設計

14-1 引言…………………………………………………………451
14-2 完全塊設計…………………………………………………454
14-3 正交拉丁方陣………………………………………………456
14-4 均衡的不完全塊設計………………………………………462
14-5 塊設計的製造………………………………………………467
14-6 摘要與參考資料……………………………………………475
習 題……………………………………………………………477

第一章
排列與組合

1-1 引　言

電報的傳遞，如果利用"點"（・）和"橫"（一）來代表英文字母與阿拉伯數目字，每個字母與數字所用的"點"和"橫"的總數一定時，電報傳遞的設計員希望知道不同的表示法共有多少。研究物質的物理特性時，一位物理學家所希望知道的是分子的排法有多少。一位交通工程師，他希望知道火車的時刻有多少種可能的排法。一位電算機專家，希望知道他的下棋程式中，對應於對手的每一種下法，他應該檢驗多少可能的下法。以上這些計算問題，都是基本的排列與組合問題，本章就是要討論排列和組合。

選取（Selection）與**安排**（Arrangement）都是普通所知的含意。下面這些語句應該不會有任何混淆的：

"從五位候選人中**選**（To select）兩位代表"

"從五位候選人中**選**兩位代表共有 10 種不同的結果"

"書本**排列**（Arrange）在書架上"

及"五本不同的書**排**在書架上，共有 120 種**排法**"。

組合（Combination）的意思與**選取**（Selection）一樣。**排列**（Permutation）則與**安排**（Arrangement）同意。講的嚴密一點，n 件物品的 r-組合的意思是從 n 件物品中，不管次序，選取 r 件；而 n 件物品的 r-排列是從 n 件物品中，有次序地

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

排列其中的 r 件。例如，一個包含二十名參議員的委員會，可以從一百名參議員中，不管次序的選取，所以是一百名參議員的 20-組合。另外，t 匹馬參加的賽馬，其結果可視爲此 t 匹馬的有序排列，因此是 t 匹馬的 t-排列。注意，到目前爲止，我們只定義 r-組合和 r-排列而已，至於其母體"n 件物品"，我們並沒討論它的性質，事實上也不需要。

以下我們將計算一給定的若干件物品的組合數與排列數。n 件相異物品的 r-組合將以符號 $C(n,r)$ 表示。n 件相異物品的 r-排列則以符號 $P(n,r)$ 表示。在下一節中，我們將導出 $C(n,r)$ 與 $P(n,r)$ 的結果。有一些特例，我們可以先算一下：

$C(n,n)=1$ （因爲從 n 件物品選取 n 件的方法只有一種，即通通選。）

$C(n,1)=n$ （從 n 件物品中選取一件的方法共有 n 種）

$C(3,2)=3$ （設 A，B，C 爲三件物品，從其中選取兩件的選法有 AB，BC，CA）

$P(3,2)=6$ （從 A，B，C 三件物品，排列兩個，排法有 AB，BA，BC，CB，CA，AC）

1-2 加法原則、乘法原則

從五個羅馬字母 a，b，c，d，e 和三個希臘字母 α，β，γ 中各選一個，顯然地，選法共有 $5\times 3=15$ 種。如果是從這五個羅馬字母及三個希臘字母中，選取一個，選法共有 $5+3=8$ 種；因爲共有 5 種方法從五個羅馬字母中選一個，共有 3 種方法從三個希臘字母中選一個的緣故。這兩個相乘、相加的概念，我們正式敍述如下：

乘法原理 如果一事件發生的方法有 m 種，另一事件發

生的方法有 n 種，那麼這兩個事件都發生的方法共有

$$m \times n \text{ 種}$$

加法原理　如果一事物發生的方法有 m 種，另一事物發生的方法有 n 種，那麼這兩個事件之一發生的方法共有

$$m + n \text{ 種}$$

上面乘法原理，加法原理中，所謂“一事件發生”可能是某些物品的組合，也可能是排列。下面以一些實例來說明。

【例 1-1】　從五本拉丁文的書，七本希臘文的書和十本法文的書中，選取兩本不同語文的書，選法有多少？

解：如果選取的兩本，一本是拉丁文另一本是希臘文，選法共有 $5 \times 7 = 35$ 種。

如果所選的兩本，一本是拉丁文另一本是法文的書，那麼選法共有 $5 \times 10 = 50$ 種

如果所選的兩本，一本是希臘文另一本是法文的，那麼選法共有 $7 \times 10 = 70$ 種

因此選法共有

$$35 + 50 + 70 = 155$$

此例中，如果是任意選取，不一定選不同語文的，那麼選法共有 $22 \times 21 = 462$ 種。■

【例 1-2】　利用乘法原理，可以證明

$$P(n,r) = P(r,r) \times C(n,r)$$

因爲 n 件相異物品的 r-排列，等於先從 n 件物品中選取 r 件，再將選出的 r 件做有次序的排列。

利用加法原理，可以證明

$$C(n,r) = C(n-1, r-1) + C(n-1, r)$$

解說於後。n 件相異的物品中，先固定其中的一件。從此 n 件物品中選取 r 件，可分成兩種情形，一種是原先固定的一件一定選取，那麼只需從剩下的 $n-1$ 件中選出 $r-1$ 件即可，方法有 $C(n-1, r-1)$。另一種是原先固定的一件不取，那麼就要從剩下的 $n-1$ 件中選取 r 件，選法共有 $C(n-1, r)$。因爲上述兩種情形之一發生，即可得 n 件物品的 r- 組合，所以利用加法原理可得

$$C(n,r) = C(n-1, r-1) + C(n-1, r) \quad \blacksquare$$

1-3 排 列

現在我們來導出 n 件物品的 r-排列 $P(n, r)$ 的公式。

首先，我們知道從 n 件物品取 r 件排列等於將 n 件物品中的 r 件放在 r 個排好的位置。第一個位置共有 n 種放法，即從 n 件物品中任選一件。第二個位置，可以從剩下的 $n-1$ 件物品中選一件來放，共有 $n-1$ 種方法，…，最後一個位置（第 r 個位置）可以從前面 $r-1$ 個位置挑完後剩下的 $n-r+1$ 件物品中選一件來放，共有 $n-r+1$ 種方法。如果將每一個位置的放法當做一事件的發生，那麼這 r 個事件都發生的情形，根據乘法原理知共有

$$P(n,r) = n(n-1)\cdots(n-r+1)$$

如果利用階乘符號

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \times 2 \times 1$$

其中 $n \geq 1$。$n!$ 讀做 n 階乘。（註 1）
那麼

$$
\begin{aligned}
P(n,r) &= n(n-1)\cdots(n-r+1)\\
&= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)\cdots 3\times 2\times 1}{(n-r)\cdots 3\times 2\times 1}\\
&= \frac{n!}{(n-r)!}
\end{aligned}
$$

【例 1-3】　上一小節我們直接數數，算出$P(3,2)=6$。現在利用上面所得的公式來驗算一下：

$$P(3,2)=\frac{3!}{(3-2)!}=\frac{3!}{1!}=6 \quad ■$$

【例 1-4】　導出排列公式

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

的方法不只一種。現在再介紹另一種方法。

首先利用數學歸納法證明

$$P(n,n)=n!$$

當 $n=1$ 時，$P(1,1)=1=1!$ 成立。

設

$$P(n-1,n-1)=(n-1)!.$$

欲證：
$$P(n,n)=n!$$

考慮 n 件相異物品的排列，先從此 n 件物品中選一件出來方法有 n 種。剩下的 $n-1$ 件排列，由歸納法假設知，此 $n-1$ 件的排列數爲

$$P(n-1,n-1)=(n-1)!$$

註1：在這裡 $n!$ 的定義只有對正整數的 n 才有意義。當 n 是分數或者負數時，$n!$ 的定義在高等微積分討論"Γ－函數"時，可以找到。(例如，參閱［1］Buck 的高等微積分)。另外，$0!=1$。

如果視“ n 件物品選一件”爲一事件，“剩下的 $n-1$ 件排列”爲另一事件，那麼原來 n 件物品的排列就等於這兩件事件要同時發生，根據乘法原理知，共有

$$P(n,n)=n\times P(n-1,n-1)=n\times(n-1)!=n!$$

種方法，即

$$P(n,n)=n!$$

接着，我們將 n 個定好次序的位置分成兩堆，第一堆含前面的 r 個位置，第二堆含後面的 $n-r$ 個位置。根據乘法原理，將 n 件相異物品放在此 n 個位置的方法，就等於是將 n 件中的 r 件放在第一堆的 r 個位置，剩下的 $n-r$ 個放在第二堆的 $n-r$ 個位置的方法。故得

$$P(n,n)=P(n,r)\times P(n-r,n-r)$$

將 $P(n,n)=n!$，$P(n-r,n-r)=(n-r)!$ 代入上式，整理得

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}\quad\blacksquare$$

【例 1-5】　n 個人圍成一圈而坐，坐法有多少？

注意，n 個人站成一直綫與圍成一圈而坐，方法不一樣多。在圍圓圈而坐時，每一個人的位置不是絕對的，坐法同不同，只跟相鄰的人同或不同相關。

解：如果先讓 n 個人站成一直綫，方法共有 $P(n,n)$，再將此行列的兩端靠攏圍成一圈。因爲只有此 n 個人的相對位置才影響坐法，所以如果兩種坐法，只差旋轉一個位置，兩個位置，…，n 個位置，那麼這兩種坐法應該視爲同一種。因此，圍圓圈而坐的一種坐法就等於 n 種排成一直綫的排法。故 n 個人圍成一圈而坐，方法共有

$$\frac{P(n,n)}{n}=(n-1)!\quad\blacksquare$$

以下我們來討論 n 件物品，如果不完全相異，那麼從中取 r 件的排列數有多少。設此 n 件物品共有 t 種，且

第 1 種有	q_1 件
第 2 種有	q_2 件
…………	
第 t 種有	q_t 件

我們來證明：此 n 件物品的 n-排列數等於

$$\frac{n!}{q_1!q_2!\cdots q_t!} \tag{1-1}$$

證明：首先將此 n 件物品做記號，使原是同一種的物品也都可區別。換句話說，做了記號後，變成是 n 件相異物品的 n-排列，排列數等於 $n!$。

在這些 $n!$ 個排列中的某兩個，如果只差同一種但做了記號後的物品的排列，那麼將所做記號去掉後，這兩個排列就變成一樣。因此，沒有做記號前的每一種排列都對應於做了記號之後的 $q_1!\,q_2!\ \cdots\ q_t!$種排列。故得公式（1－1）。

【例 1-6】 (a) 5 條“－”和 8 個“·”的排列數有多少？
(b) (a)中的 13 個“－”與“·”的 7-排列有多少？

解：(a) 利用公式（1-1）得

$$\frac{13!}{5!8!}=1287$$

(b) 從 13 個“－”與“·”中選 7 個來排列，可依所選的“－”與“·”的個數來分類，即

5 個“－”及 2 個“·”的 7-排列數為 $\frac{7!}{5!2!}$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com