普通高等教育电气信息类规划教材

免费电子教案下载
www.cmpedu.com

电磁场与电磁波

阳小明 李天倩 编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育电气信息类规划教材

电磁场与电磁波

阳小明　李天倩　编著

机械工业出版社

本书为满足地方高校电气信息类专业《电磁场与电磁波》的教学要求而编写。在充分保证该课程与相关课程衔接的前提下，对教学内容作了必要的优化，以减少重复，本书共分6章，主要内容有：矢量分析、静电场与恒定电场、恒定磁场、时变电磁场、平面波电磁波和导行电磁波。

本书注重基本概念、基本理论的阐述，弱化烦琐的公式推导，侧重讲解电磁场与电磁波理论的物理意义和应用。书中配有例题及详解，有利于培养学生良好的思维和应用知识的能力。

本书可作为地方高校电子信息工程、通信工程、信息工程等专业的本科教材。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波/阳小明,李天倩编著.—北京：机械工业出版社，2016.9
普通高等教育电气信息类规划教材
ISBN 978-7-111-54865-2

Ⅰ.①电… Ⅱ.①阳… ②李… Ⅲ.①电磁场-高等学校-教材 ②电磁波-高等学校-教材 Ⅳ.①O441.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第222718号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)
策划编辑：尚 晨 责任编辑：尚 晨
责任校对：张艳霞 责任印制：常天培
北京盛通印刷股份有限公司印刷

2016年10月第1版·第1次印刷
184mm×260mm·11.5印张·278千字
0001-3000册
标准书号：ISBN 978-7-111-54865-2
定价：29.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务
服务咨询热线：(010)88379833
读者购书热线：(010)88379649

网络服务
机 工 官 网：www.cmpbook.com
机 工 官 博：weibo.com/cmp1952
教育服务网：www.cmpedu.com
金 书 网：www.golden-book.com

前　　言

电磁场与电磁波、信号与系统、数学信号处理是信息工程、电子信息和通信工程等专业的重要专业基础课，这三门课程都有一共同的特点——理论抽象难懂，数学公式推导复杂。这三门课被戏称为“三大天书”，而电磁场与电磁波则是“天书之最”。好的教学质量固然离不开好的教材，这就提出了一个问题，什么才是好的教材？目前，电磁场与电磁波的教材非常多，这些教材大多内容全面、结构合理、逻辑清晰、习题丰富，写得也很深入，单从教材本身来看都是优秀教材，但要考虑它的使用对象则未必如是，即好教材必须要结合使用者来综合衡量。

本书的使用对象为非211、985高校的地方院校本科生，这就要求教材必须为地方院校工科人才培养服务。地方高校人才培养目标有别于国家重点大学，它主要是以培养应用型、复合型人才为主。电磁场与电磁波作为一门专业基础课，不能讲授得既全又深，具体原因分析如下。

一、高校的职能是为国家社会、经济发展培养人才。从人才需求的角度来看，具备专业基础，能应用专业知识的相关技术人才需求量最大，而从事研究、创新的高层次人才需求量则较小。地方高校的师资和办学硬件决定了它们必须重视学生工程应用能力的培养，以确保就业率，这也关系着学校自身的生存、发展和社会的稳定。由此可见，在减小理论授课总学时而增加实践环节的大趋势下，电磁场与电磁波课程还要占用48学时以上并不现实。对于地方高校本门课程的学时数最好控制在40学时。

二、从地方高校招生的生源来看，学生抽象思维和数学基础都较差。在本门课程授课时，仍采用推公式、重计算的传统教学方法，其结果只能是花了不少宝贵的学时，学生却无法掌握重要知识点，更谈不上知识的应用，更糟糕的是让学生失去学习的兴趣和信心。

三、从相关专业课程体系来看，电磁场与电磁波的部分内容与前修课程和后继课程重叠，如大学物理、移动通信、微波与天线技术等。虽然不可否认知识重复性讲授会有一定教学效果，但是导致教学效率的降低也是明显的，因此不能靠课堂上给学生反复灌输知识来提高教学质量，这样培养出来的学生也难达到行业对人才素质的要求。只有优化电磁电场与电磁波和其他课程的重复内容，再结合教学改革促使学生主动复习巩固知识，才是既能保证教学效果又能提高教学效率的有效途径。

本教材的编写正是充分考虑到地方高校电磁电场与电磁波课程教学的实际需求。首先，根据信息类专业典型课程设置，认真对比、分析了大学物理、移动通信、微波与天线技术等和电磁电场与电磁波课程的关系，在本教材中适当弱化了大学物理已讲过的知识点，由于微波与天线技术课程本身就要详细讲解电磁波的辐射，故针对相关内容作了必要的删减和优化。其次，针对学生特点，简化了部分知识点的公式推导，而更注重知识点物理意义和应用上的阐述，讲解相关知识点也尽量贴近学生的思维能力和特点。最后，教材在编写过程中吸取了部分教学经验。如学生书写变量时，常分不清矢量和标量，这是由概念不清楚和习惯不

好引起的，为了解决这一问题，教材中的矢量符号采用矢量的手写体；另外，例题的求解也非常详细，方便学生较快地看懂解题步骤。

本书共分为6章。第1章讲解矢量分析，讲解本课程学习所必须具备的数学基础，建议6学时；第2、3章讲解静态电、磁场的基本物理规律，分别建议学时为8学时和6学时；第4章时变电磁场，重点介绍时变电磁场的麦克斯韦方程组、能量流动密度和波动方程等，建议4学时。第5章平面电磁波，重点介绍平面电磁波的求解和在均匀单一介质、两种介质中的传播，包括垂直入射、斜入时介质表面处发生的反射、折射等传播特性，建议8学时。第6章导行电磁波介绍三种导波系统以及谐振腔等，建议6学时。理论学时共计32学时，可设置实验8学时，这样该课程为40学时、2.5学分，也可不设实验，为32学时2学分。本书1~4章由阳小明编写，第5~6章由李天倩编写，全书由阳小明统稿。

本书在编写过程中参考了许多同行编著的教材和习题指导书，在此对这些同行专家表示深深的敬意和诚挚的感谢。由于所参考的教材和指导书也参考了其他一些书籍，在本书的参考文献中不能全部列出，在此也一并感谢。西华大学电气与电子信息学院王军院长和信息工程系王维博系主任对本书的编写一直很关心，他们提出了很多宝贵意见，并从四川省"信息工程专业卓越工程师人才培养计划"和另一省级教改项目（项目编号：700337）中提供了经费资助；另外，研究生杜晓风、雍明阳、万洪和田野帮助完成了部分插图，在此对他们表示由衷的感谢。

由于时间紧，教材编写前期的调研工作做得不太充分，对教材中的内容取舍是否合理还有待检验，加上水平有限，书中难免存在一些不足和错误，欢迎读者和同行专家批评指正，作者电子邮箱：0120030022@mail.xhu.edu.cn。

编者
西华大学
2016年3月

目　　录

第1章　矢 量 分 析

本章内容涉及研究电磁场所必备的矢量分析知识，主要内容有：矢量的定义，矢量的表示方法及运算；三种常用坐标系以及它们之间的转换关系；标量场的方向导数与梯度的物理意义；矢量场的通量和散度的物理意义；矢量场的环流量和旋度的物理意义；亥姆霍兹定理及应用意义，以及微分算符。

1.1　矢量与矢量运算

1.1.1　矢量的定义

在物理学中，常接触到矢量和标量。矢量是指有大小和方向的物理量。图 1.1 为作用力 $\vec{F}$ 的矢量表示方法，箭头的指向代表作用力的方向，线段的长度代表作用力的大小。矢量符号通常用粗体字母或是在字母上加箭头表示，书写时则只能采用字母加箭头表示，如 $\vec{F}$。为帮助读者正确书写矢量，本教材采用字母上加箭头表示矢量。

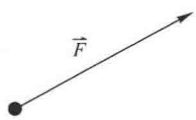

图 1.1　作用力 $\vec{F}$ 的矢量表示

既然矢量有大小和方向，那么就可以把它分为两部分表示

$$\vec{F} = F\ \vec{e}_F \tag{1.1}$$

式（1.1）中 F 代表作用力的大小，$\vec{e}_F$ 代表作用力的方向并被称为单位矢量。$\vec{e}_F$ 可以看成是一个大小为 1 的特殊矢量，它只用于表示方向。由式（1.1）可得单位矢量

$$\vec{e}_F = \vec{F}/F \tag{1.2}$$

与矢量对应的是标量，它只有大小没有方向，如温度、质量等，用字母一般形式表示即可，如温度 T。

1.1.2　矢量的运算

1. 矢量的加法

在三维直角坐标系中，两矢量 $\vec{A}$、$\vec{B}$ 可以分别表示为 $\vec{A} = \vec{e}_x A_x + \vec{e}_y A_y + \vec{e}_z A_z$、$\vec{B} = \vec{e}_x B_x + \vec{e}_y B_y + \vec{e}_z B_z$。其中单位矢量 $\vec{e}_x$、$\vec{e}_y$、$\vec{e}_z$ 分别代表 x、y、z 坐标轴方向，A_x、A_y、A_z 分别表示矢量 $\vec{A}$ 在 x、y、z 坐标轴上的分量，B_x、B_y、B_z 分别表示矢量 $\vec{B}$ 在 x、y、z 坐标轴上的分

量。两矢量相加的运算为

$$\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}=\vec{e}_x(A_x+B_x)+\vec{e}_y(A_y+B_y)+\vec{e}_z(A_z+B_z) \tag{1.3}$$

另外，也可以用作图法求出两矢量的和。在图 1.2 所示的平行四边形法则中，以$\vec{A}$、$\vec{B}$两矢量为边，分别画出平行四边形的另两条边，对角线$\vec{C}$就是$\vec{A}$、$\vec{B}$两矢量的和。三角形法则如图 1.3 所示，$\vec{A}$矢量固定不动，$\vec{B}$矢量平移，并使$\vec{B}$矢量的起点与$\vec{A}$矢量箭头重合，再将$\vec{A}$的起点和平移后$\vec{B}$的箭头连起来得到矢量$\vec{C}$，$\vec{C}$就是$\vec{A}$、$\vec{B}$矢量之和。

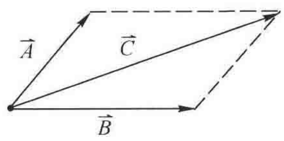

图 1.2　平行四边形法则求矢量和

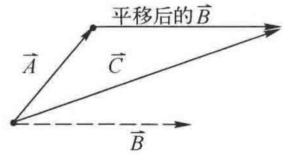

图 1.3　三角形法则求矢量和

2. 矢量的减法

两矢量之差的表达式为

$$\vec{C}=\vec{A}-\vec{B}=\vec{e}_x(A_x-B_x)+\vec{e}_y(A_y-B_y)+\vec{e}_z(A_z-B_z) \tag{1.4}$$

用作图法求两矢量之差，如图 1.4 所示。将$\vec{A}$、$\vec{B}$两矢量箭头用线段连在一起，方向指向被减矢量$\vec{A}$，得到的矢量$\vec{C}$就是$\vec{A}$、$\vec{B}$两矢量之差。

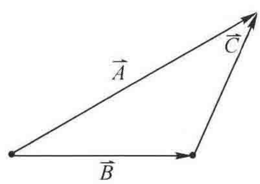

图 1.4　三角形法则求两矢量之差

3. 矢量的点积（标量积）

两矢量的点积表达式为

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos\theta \tag{1.5}$$

如图 1.5 所示，式（1.5）中的 θ 为$\vec{A}$、$\vec{B}$两矢量的夹角。两矢量的点积结果为标量，故它又被称为标量积。

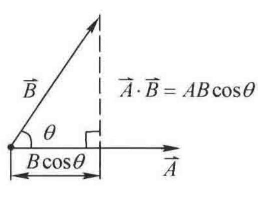

图 1.5　矢量的点积

4. 矢量的叉积（矢量积）

两矢量的叉积表示为

$$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B} \tag{1.6}$$

因为叉积的结果是矢量，所以该运算又被称为矢量积。叉积的大小为$AB\sin\theta$，这一结果正好是图 1.6 中平行四边形的面积。方向则由右手定则确定，具体方法为：伸出右手，除大拇指外的四根手指由$\vec{A}$矢量方向弯向$\vec{B}$矢量方向，大拇指翘起，其指尖所指方向为叉积结果$\vec{C}$的方向。

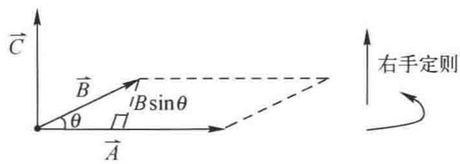

图 1.6　矢量的叉积

在直角坐标系中，叉积公式为

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix} \tag{1.7}$$

按行列式计算，得到结果为

$$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{e}_x(A_yB_z-A_zB_y)+\vec{e}_y(A_zB_x-A_xB_z)+\vec{e}_z(A_xB_y-A_yB_x) \tag{1.8}$$

由上式可得

$$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A} \tag{1.9}$$

这表明两矢量的位置交换后，叉积的结果大小相等、方向相反。

5. 矢量的混合积矢量

三个矢量的混合积表达式为

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) \tag{1.10}$$

按运算顺序，先计算括号里$\vec{B}$、$\vec{C}$的叉积，其结果再与$\vec{A}$点积，最终混合积的结果是一个标量。混合积具有下面的特性

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})=\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) \tag{1.11}$$

上式表明，运算符号不动，矢量一起向左端移动，移出来的矢量从另一端补进来，混合积结果不变。用同样的方法向右移动，混合积的结果也不变。

混合积的绝对值有什么含义呢？以式（1.11）中$\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$为例分析，$\vec{A}\times\vec{B}$的大小为$AB\sin\theta$正好是图 1.7 平行六面体的底面积，再与$\vec{C}$点积，大小为$AB\sin\theta\cdot C\cos\alpha$。因此，从图 1.7 可以看出混合积的绝对值等于以$\vec{A}$、$\vec{B}$、$\vec{C}$三个矢量为边的平行六面体的体积。

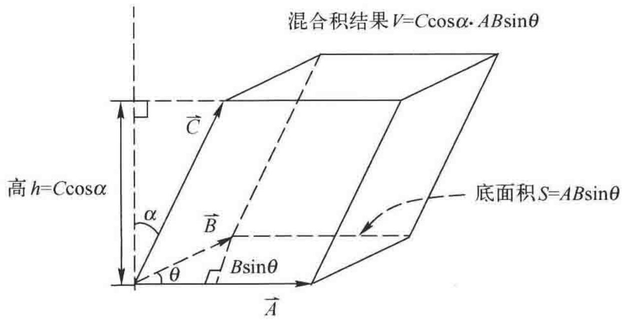

图 1.7　矢量的混合积

1.2　空间矢量

前面所谈到的矢量起点都在原点，如果矢量的起点不在原点，如图 1.8 所示的空间矢量 $\vec{R}$ 又应如何表示呢？由于空间矢量 $\vec{R}$ 的起点坐标和终点坐标已知，可用位置矢量 $\vec{r}\,'$ 和 $\vec{r}$ 分别表示它们，$\vec{R}$ 正好等于 $\vec{r}$ 减 $\vec{r}\,'$，即

$$\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}\,' \tag{1.12}$$

上式中 $\vec{r}=\vec{e}_x x+\vec{e}_y y+\vec{e}_z z$，$\vec{r}\,'=\vec{e}_x x'+\vec{e}_y y'+\vec{e}_z z'$。空间矢量 $\vec{R}$ 的大小就是坐标点（x，y，z）和（x'，y'，z'）之间的距离

$$R=|\vec{r}-\vec{r}\,'|=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2} \tag{1.13}$$

方向由 $\vec{r}\,'$ 的箭头端点指向 $\vec{r}$ 的箭头端点，即

$$\vec{e}_R=\vec{R}/R=(\vec{r}-\vec{r}\,')/|\vec{r}-\vec{r}\,'| \tag{1.14}$$

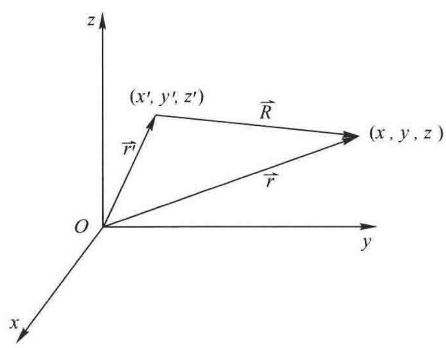

图 1.8　空间矢量的表示方法

1.3　标量场与矢量场

1. 标量场

为方便理解标量场的概念，以空间中的电位（或称为电动势）分布为例。空间中的每

一点都有一个标量电位值，一般情况下，它是空间坐标和时间的函数，这些在空间中的标量值集合就构成了标量场。空间中的标量场可以用等值面来表示，如图 1.9 所示，电位值相等的点构成一个个等位面，这些面形象地表示出电位的分布。除电位场外，标量场还有温度场、高度场、密度场等。

2. 矢量场

以电场强度在空间中的分布为例，空间中每一点都有一个矢量电场强度值，它一般是空间坐标和时间的函数。所有这些值的集合就构成了矢量场，电力线能形象地表示出这个矢量场。如图 1.10 所示，虚线代表的是等电位面，实线代表的是电力线，P 点的电场已标出，方向是沿曲线切线方向指向电位减小的方向，大小用矢量线的线段表示。

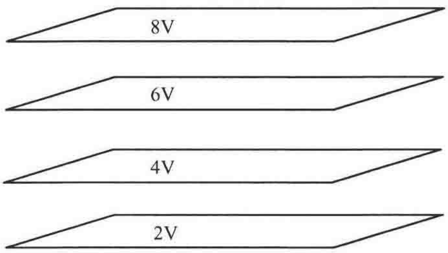

图 1.9　用等势面表示的标量场

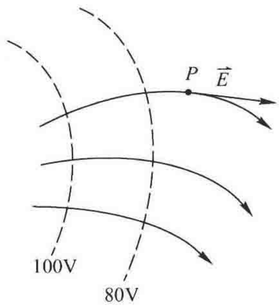

图 1.10　二维矢量场

1.4　三种正交坐标系

虽然电磁场理论在任何坐标下都适用，但是在解决实际问题时，选择恰当的坐标系，可以大大减小求解的难度。如求解均匀带电球体的电场分布就应选择球坐标系而非直角坐标系。

1.4.1　直角坐标系

最常见的坐标系是直角坐标系，它由三个互相垂直的坐标轴构成，分别为 x、y、z 轴。它们的方向由单位矢量 $\vec{e}_x$、$\vec{e}_y$、$\vec{e}_z$ 表示，由于坐标轴相互垂直，必有如下关系存在

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1 \tag{1.15}$$

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = 0 \tag{1.16}$$

此外，三个坐标轴的方向还满足以下右手定则关系

$$\begin{cases} \vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z \\ \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x \\ \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y \end{cases} \tag{1.17}$$

这样已知两个坐标轴的方向就可以用式（1.17）确定另一个坐标轴的方向。

在直角坐标系中，一个矢量表示为

$$\vec{r} = \vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z \tag{1.18}$$

这个矢量的起点为原点，而（x、y、z）为矢量箭头端点坐标，也可认为（x、y、z）是矢量在三个轴的坐标分量。很明显，（x、y、z）的值确定，矢量的方向也被唯一确定。

在电磁场计算中，常常涉及到线元、面积元和体积元，这就需要在直角坐标系中，将它们表示出来。如图 1.11 中左边直角坐标系所示，矢量 $\vec{r}$ 增加一个微小的量 $\mathrm{d}\vec{r}$，这个量分别投影到 x、y、z 三个轴上，由此可写出线元的表达式

$$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{e}_x\mathrm{d}x + \vec{e}_y\mathrm{d}y + \vec{e}_z\mathrm{d}z \tag{1.19}$$

如图 1.11 右边所示，沿三个坐标轴增加的微分元 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$、$\mathrm{d}z$ 构成一个长方体，这里有三个面积元 $\mathrm{d}\vec{S}_x$、$\mathrm{d}\vec{S}_y$、$\mathrm{d}\vec{S}_z$。首先谈谈面积方向的问题，一个面积的方向由法线方向确定，也就是垂直这个面指向外面的方向。接下来分析 $\mathrm{d}\vec{S}_z$ 是指哪个面，$\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$ 方向与 x、y 轴方向一致，而 $\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$，$\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$ 构成的方形面积元方向与 $\mathrm{d}\vec{S}_z$ 一致，故 $\mathrm{d}\vec{S}_z = \vec{e}_z(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$。同理，可求出 $\mathrm{d}\vec{S}_x$、$\mathrm{d}\vec{S}_y$。三个面积元表达式如下

$$\begin{cases}\mathrm{d}\vec{S}_x = \vec{e}_x(\mathrm{d}y\mathrm{d}z)\\ \mathrm{d}\vec{S}_y = \vec{e}_y(\mathrm{d}z\mathrm{d}x)\\ \mathrm{d}\vec{S}_z = \vec{e}_z(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)\end{cases} \tag{1.20}$$

也可以只写出标量的形式

$$\begin{cases}\mathrm{d}S_x = \mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ \mathrm{d}S_y = \mathrm{d}z\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}S_z = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{cases} \tag{1.21}$$

体积元可以由图 1.11 看出，应为

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}y \tag{1.22}$$

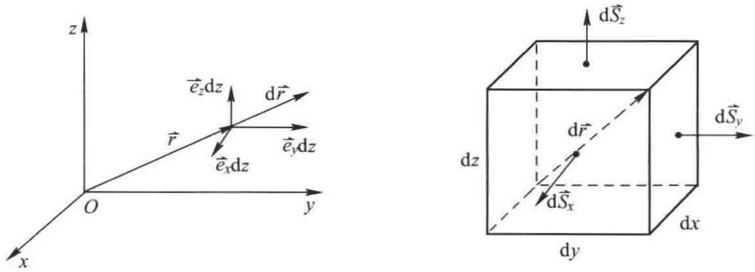

图 1.11　直角坐标系与线元、面积元和体积元

1.4.2　圆柱坐标系

圆柱坐标系如图 1.12 所示，它有三个坐标变量 r、φ、z。r 代表圆柱水平横截面圆的半径，取值范围 $0 \leqslant r < \infty$。φ 为 r 与 x 轴的夹角，取值范围 $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$。$z$ 与直角坐标系 z 轴坐标一致，取值范围 $-\infty < z < \infty$。由于是正交坐标系，单位矢量 $\vec{e}_r$、$\vec{e}_\varphi$、$\vec{e}_z$ 满足如下关系

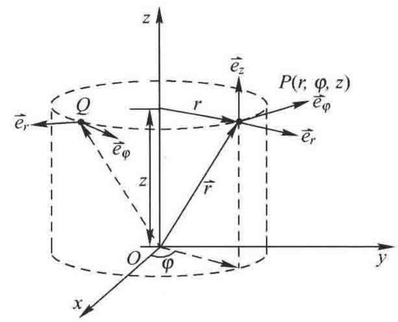

图 1.12　圆柱坐标系中的矢量

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r = \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1 \tag{1.23}$$

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_r \cdot \vec{e}_z = 0 \tag{1.24}$$

此外，还满足以下右手定则关系

$$\begin{cases} \vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_z = \vec{e}_r \\ \vec{e}_z \times \vec{e}_r = \vec{e}_\varphi \end{cases} \tag{1.25}$$

坐标单位矢量在圆柱坐标系与直角坐标系中相互转换关系为

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} \tag{1.26}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} \tag{1.27}$$

式中：$\vec{e}_r$、$\vec{e}_\varphi$ 单位矢量并不是常矢量，它们随坐标点位置变化而变化。如图 1.12 所示，$\vec{e}_r$、$\vec{e}_\varphi$ 在 P 点和 Q 点的方向就不一样。

坐标变量 r、φ、z 一定就可以唯一确定空间中的一点。任意矢量可以表示为

$$\vec{A} = \vec{e}_r A_r + \vec{e}_\varphi A_\varphi + \vec{e}_z A_z \tag{1.28}$$

在图 1.12 中，对比直角坐标和圆柱坐标，可得两种坐标变量的互换关系

直角坐标变量到圆柱坐标变量的转换关系为

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan\varphi = y/x,\ z = z \tag{1.29}$$

圆柱坐标变量到直角坐标变量的转换关系为

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z \tag{1.30}$$

求坐标在直角坐标系和圆柱坐标系中相互转换时，会用到式（1.29）和式（1.30）。

直角坐标中任意矢量转换到圆柱坐标系的转换关系式为

$$
\begin{pmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \tag{1.31}
$$

圆柱坐标中任意矢量转换到直角坐标系的转换关系式为

$$
\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{pmatrix} \tag{1.32}
$$

对于圆柱坐标系中的矢量 $\vec{r}$，它在 $\vec{e}_r$、$\vec{e}_\varphi$、$\vec{e}_z$ 方向上增加的长度元分别是 $\mathrm{d}r$、$r\mathrm{d}\varphi$、$\mathrm{d}z$。注意，$\mathrm{d}\varphi$ 只是 φ 方向上增加的一个角度元。在此单独解释下为什么在 $\vec{e}_\varphi$ 方向上增加的长度元是 $r\mathrm{d}\varphi$。如图 1.13 所示，r 不变，$\mathrm{d}\varphi$ 是 $\vec{e}_\varphi$ 方向上增加的一个非常微小的量，$\mathrm{d}\varphi$ 所对的弧长就是 $\vec{e}_\varphi$ 方向上的长度元为 $r\mathrm{d}\varphi$。线元 $\mathrm{d}\vec{r}$ 为 $\vec{e}_r$、$\vec{e}_\varphi$、$\vec{e}_z$方三个方向上的长度元矢量之和，因而，圆柱坐标系中线元 $\mathrm{d}\vec{r}$ 的表达式为

$$
\mathrm{d}\vec{r} = \vec{e}_r\mathrm{d}r + \vec{e}_\varphi r\mathrm{d}\varphi + \vec{e}_z\mathrm{d}z \tag{1.33}
$$

由图 1.13 可以得出面积元表达式

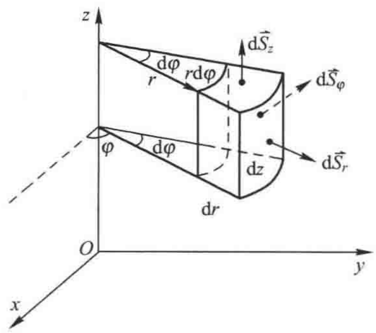

图 1.13　圆柱坐标系中的线元、面积元和体积元

面积元矢量式

$$
\begin{cases} \mathrm{d}\vec{S}_r = \vec{e}_r r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z \\ \mathrm{d}\vec{S}_\varphi = \vec{e}_\varphi \mathrm{d}r\mathrm{d}z \\ \mathrm{d}\vec{S}_z = \vec{e}_z r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \end{cases} \tag{1.34}
$$

面积元标量式

$$
\begin{Bmatrix} \mathrm{d}S_r = r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z \\ \mathrm{d}S_\varphi = \mathrm{d}r\mathrm{d}z \\ \mathrm{d}S_z = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \end{Bmatrix} \tag{1.35}
$$

体积元表达式

$$
\mathrm{d}V = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z \tag{1.36}
$$

例 1.1　已知一个矢量在直角坐标系中为 $\vec{A} = \vec{e}_x 7 + \vec{e}_y 41 + \vec{e}_z 5$，求它在圆柱坐标中的表

达式。

解：
$$\begin{pmatrix}A_r\\A_\varphi\\A_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\-\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{pmatrix}$$

将 $\cos\varphi=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{7}{\sqrt{1730}}$，$\sin\varphi=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{41}{\sqrt{1730}}$，$A_x=7$，$A_y=41$，$A_z=5$ 代入上式得

$$A_r=[A_x\cos\varphi+A_y\sin\varphi+A_z\cdot 0]=\frac{49+1681}{\sqrt{1730}}=\sqrt{1730}$$

$$A_\varphi=[-A_x\sin\varphi+A_y\cos\varphi+A_z\cdot 0]=\frac{-287+287}{\sqrt{1730}}=0$$

$$A_z=[-A_x\cdot 0+A_y\cdot 0+A_z\cdot 1]=5$$

故矢量在球坐标系中表达式为

$$\vec{A}=\vec{e}_r\sqrt{1730}+\vec{e}_z 5$$

例 1.2 已知直角坐标系中，有一点的坐标为（7，41，5），求这点在圆柱坐标系中的坐标值。

解： 由直角坐标到圆柱坐标的变量转换关系为

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \tan\varphi=y/x,\ z=z$$

得

$$r=\sqrt{7^2+41^2}=\sqrt{1730},\quad \varphi=\arctan(41/7),\quad z=5$$

点在圆柱坐标系中的坐标为（$\sqrt{1730}$，$\arctan(41/7)$，5）。

对比例题 1.1 和 1.2，会发现在圆柱坐标系中矢量$\vec{A}$的$\vec{e}_\varphi$分量为零，而坐标点（r，φ，z）却有 $\varphi=\arctan(41/7)$。其实，只要弄清位置矢量和坐标的概念就很容易理解了。在圆柱坐标系中，确定一点，需要三个变量 r、φ、z，参考图 1.12 可以看到 φ 为 r 与 x 轴的夹角，它绝不是矢量$\vec{A}$在$\vec{e}_\varphi$方向上的投影 A_φ。例题 1.1 中矢量$\vec{A}$的大小为原点到坐标点的距离，方向由原点指向坐标点，很明显它在$\vec{e}_\varphi$方向上的投影为零，也就是说 $A_\varphi=0$。在球坐标系中，也存在类似的问题。

例 1.3 已知圆柱坐标系中，矢量$\vec{A}=\vec{e}_r k/r$，求它在直角系中的表达式。

解：
$$\begin{pmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_r\\A_\varphi\\A_z\end{pmatrix}$$

将 $\cos\varphi=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\sin\varphi=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$A_r=k/r$，$A_\varphi=0$，$A_z=0$ 代入上式得

$$A_x=[A_r\cos\varphi+0+0]=\frac{xk}{x^2+y^2}$$

$$A_y=[A_r\sin\varphi+0+0]=\frac{yk}{x^2+y^2}$$