常微分方程讲义

烟台师范学院数学系编

前　　言

根据二年制师专常微分方程教学大纲的要求，我们编写了这本常微分方程讲义。

本书共分五章：微分方程的一般概念；一阶微分方程；一阶微分方程解的存在定理；高阶微分方程；微分方程组。总学时为50学时左右，适用于二年制师专的数学专业和三年制函授的数学专业。

针对师范性的特点和二年制专科学生的实际水平，在编写中注意了抓住重点，介绍主要内容；通俗易懂，便于自学；每节都有范例，各章配有适量的习题；为了培养学生分析问题的能力，对有些问题浅谈了解决问题的思路和方法。

为了减少篇幅，避免繁杂的计算，本书对常系数 n阶线性方程采用了算子法求解。

本书是由王常藩同志编写的。由于编者的水平有限，加上时间仓促，所以对书中的内容和处理方法，一定存在不少的缺点和问题，恳切希望同志们批评指正。

编者

一九八五年九月

目　　录

第一章　微分方程的一般概念…………………………………1
　§1　什么是微分方程………………………………………1
　§2　什么是微分方程的解…………………………………4
　§3　方向场…………………………………………………7
第二章　一阶微分方程……………………………………12
　§1　变量可分离的方程……………………………………12
　§2　可化为变量分离的方程………………………………15
　§3　一阶线性方程…………………………………………19
　§4　全微分方程及积分因子………………………………23
　§5　一阶隐方程……………………………………………29
　§6　一阶微分方程应用举例………………………………36
第三章　一阶微分方程解的存在定理…………………………5
第四章　高阶微分方程……………………………………65
　§1　n阶线性方程…………………………………………65
　§2　n阶常系数线性方程的解法…………………………86
　§3　二阶常系数线性方程的应用…………………………107
　§4　几种可降阶的高阶微分方程…………………………112
第五章　微分方程组………………………………………121
　§1　一般概念………………………………………………121
　§2　一阶方程组的初等解法………………………………124
　§3　线性微分方程组………………………………………132
　§4　常系数线性微分方程组………………………………146

第一章　微分方程的一般概念

函数是客观事物规律性的反映。每发现一个函数，就等于掌握了一类事物的性质，因此，寻找变量间的函数关系是件很重要的事情。不过许多实际问题，它们的函数关系有时很难直接找到，但却容易得到一个含有所求函数的导数（或微分）的等式，再解这个等式求得所需要的函数。上述这类等式就是微分方程。

§1　什么是微分方程

代数方程与实际的联系非常密切，而微分方程更是如此。要了解什么是微分方程以及它产生的实际背景，需介绍以下几个实例。

例1　已知曲线上任意点处的切线斜率等于该点的横坐标，求此曲线的方程。

解　设所求曲线的方程为 $y=y(x)$，$y(x)$ 是未知函数。曲线上任一点处切线的斜率可写成$\dfrac{dy(x)}{dx}$，这是一个未知函数的导数，因为它等于切点的横坐标，所以得

$$\frac{dy(x)}{dx}=x \tag{1}$$

等式(1)含有未知函数$y(x)$的导数，它就是一个微分方程。由(1)求出$y(x)$，问题就解决了。

例2　放射性元素镭的质量m随着时间的增加而减少，这种现象称为衰变。由实验知，衰变的速度与所剩余的质量

成正比，试求镭的质量随时间的变化规律。

解 设t时刻镭的质量为$m=m(t)$，则镭的衰变速度为$\frac{dm}{dt}$．因为$m(t)$是减函数，故其导数小于零．根据题意得

$$\frac{dm}{dt}=-km \tag{2}$$

其中$k>0$是比例常数．从(2)中解出$m(t)$就是镭的衰变规律．

例3 设质量为m的物体，在无阻力的情况下自由下落，求该物体下落的路程随时间的变化规律．

解 如图1—1选取坐标系，且s的正方向也作为速度和加速度的正方向．设t时刻落体运动的路程为$s=s(t)$，则落体的速度为$\frac{ds}{dt}$，加速度为$a=\frac{d^2s}{dt^2}$．

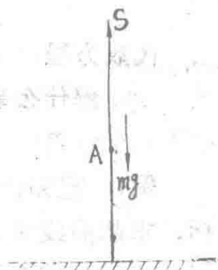

图1—1

该物体所受的力为

$F=mg$，根据牛顿第二定律 $F=ma$ 得

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=-mg，即$$

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-g \tag{3}$$

其中g为重力加速度，取负号的原因是重力加速度的正方向与所选坐标系下加速度的正方向相反．

由以上实例得到的三个等式，有一个共同的特点，就是每一个等式中都含有未知函数的导数（或微分）．

含有自变量、未知函数和未知函数的导数（或微分）的等式叫做微分方程．

微分方程有常微分方程和偏微分方程之分．

如果微分方程中的未知函数是一元函数，那么这样的微

分方程叫做常微分方程.

如果微分方程中的未知函数是二元或二元以上的函数，那么这样的微分方程叫做偏微分方程.如(1)、(2)、(3)都是常微分方程,而 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ 和 $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=u$ 则是偏微分方程.

本书只研究常微分方程，为了叙述简单起见，以后把常微分方程简称为微分方程或方程.

在微分方程中，未知函数的导数的最高阶数叫做微分方程的阶.如(1)、(2)是一阶微分方程，而(3)是二阶微分方程.

一般地，n阶微分方程具有形式

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^n y}{dx^n}\right)=0 \tag{4}$$

其中x是自变量，y是未知函数.(4)式既然是n阶微分方程，则必含有$\frac{d^n y}{dx^n}$.

如果方程(4)对y，$\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^n y}{dx^n}$来说，都是一次的有理整式，那么(4)叫做$n$阶线性微分方程.

若对y，$\frac{dy}{dx}$，…，$\frac{d^n y}{dx^n}$中的一个来说不是一次的有理整式，则称(4)为n阶非线性微分方程.如(1)和(2)为一阶线性微分方程，(3)为二阶线性微分方程，而

$$\frac{dy}{dx}=y^2,\ \frac{dy}{dx}=\cos y+x,\ \left(\frac{dy}{dx}\right)^3+2x\frac{dy}{dx}-y=0,$$

$y\frac{dy}{dx}+2y=x$都是一阶非线性微分方程.

n阶线性微分方程的一般形式为

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=f(x) \quad (5)$$

其中$a_1(x)$、$a_2(x)$、…、$a_n(x)$、$f(x)$都是x的已知函数.

§2 什么是微分方程的解

前面谈到，由方程

$$\frac{dy}{dx}=x \quad (1)$$

求出y的表达式就是要求的曲线方程. 根据积分是 微分的逆运算，只要对(1)式的两端求不定积分，即得函数

$$y=\frac{1}{2}x^2+c \quad (6)$$

当c任取一个值c_1时，得到一个函数

$y=\frac{1}{2}x^2+c_1$，将它代入方程(1)后，左端为

$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^2+c_1\right)=x$，则使方 程(1)的 左端=右端. 函数$y=\frac{1}{2}x^2+c_1$就是方程(1)的一个解. 抽象到一般 情 形就是：

如果把某一函数代入微分方程，能使该方程成为一个恒等式，那么这个函数就叫做该微分方程的一个解.

显然(6)中的c可为任意常数，所以微分方程(1)有 无穷多个解.

对二阶微分方程

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-g \quad (3)$$

的两端积分一次得

$$\frac{ds}{dt}=-gt+c_1 \tag{7}$$

再积分一次得

$$s=-\frac{1}{2}gt^2+c_1t+c_2 \tag{8}$$

可以验证，当 c_1，c_2 为任意常数时，将(8)式代入(3)式都成为一个恒等式。这说明(8)是微分方程(3)的解，而且微分方程(3)也有无穷多个解. 同时看出，一阶微分方程的解中含有一个任意常数，二阶微分方程的解中含有两个独立的任意常数，我们把这样的解叫做微分方程的通解.

如果一个n阶微分方程的解中，含有n个独立的任意常数，那么这个解就叫做该n阶微分方程的通解. n阶微分方程(4)的通解可记为

$$y=\varphi(x,\ c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n).$$

如果由方程

$$\Phi(x,\ y)=0 \tag{9}$$

所确定的隐函数 $y=\varphi(x)$ 是某微分方程的一个解，那么方程(9)就叫做该微分方程的隐式解. 如 $x^2+y^2=1$ 就是一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$的隐式解.

有的书称隐式解为微分方程的积分，隐式通解称为通积分. 以后为了简单起见，我们把解和隐式解统称为微分方程的解.

通解(6)和(8)都不是一个完全确定的解，而各是一个解族. 要得到一个完全确定的解，还必须对微分方程(1)和(3)

再附加一定的条件．如对(1)附加上：

当$x=0$时，对应的$y=0$．或写成

$$y(0)=0. \tag{10}$$

对(3)附加上：

当$t=0$时，$s=s_0$，$s'=v_0$．或写成

$$\begin{cases} s(0)=s_0 \\ s'(0)=v_0 \end{cases} \tag{11}$$

将条件(10)代入(6)，确定出$c=0$，于是求得满足微分方程(1)和条件(10)的完全确定的解

$$y=\frac{1}{2}x^2 \tag{12}$$

将条件(11)中的第二式代入(7)，确定出$c_1=v_0$；再将条件(11)的第一式代入(8)，确定出$c_2=s_0$，于是求得满足微分方程(3)和条件(11)的完全确定的解

$$y=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+s_0 \tag{13}$$

象(12)和(13)这样在通解中赋给任意常数以确定的值而得到的解叫做微分方程的特解。

用来确定特解的条件叫定解条件．最常见的定解条件是初始条件．如条件(10)表示曲线过原点；条件(11)表示落体的初位置和初速度，它们都是初始条件．

一个n阶微分方程(4)的初始条件，是指如下的n个条件：

当$x=x_0$时，对应的$y=y_0$，$y'=y_0'$，…，

$y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)}$．或写成

$$y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_0', \cdots, y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)} \tag{14}$$

求微分方程满足初始条件的解的问题叫做初值问题．而微分方程(3)满足初始条件(11)的初值问题记作

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 s}{dt^2}=-g \\ s(0)=s_0,\ s'(0)=v_0 \end{cases}$$ 的形式.

我们已知微分方程(1)满足初始条件(10)的特解为

$y=\frac{1}{2}x^2$，在xy平面上它的图象是一条曲线. 我们把微分方程的解所表示的曲线叫做积分曲线.

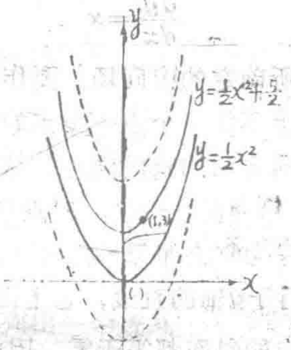

图1—2

由图1—2显见，微分方程(1)的通解$y=\frac{1}{2}x^2+c$实际上是一族积分曲线，而它满足初始条件$y(1)=3$的特解$y=\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}$是过平面上点(1,3)的一条积分曲线.

§3 方 向 场

为了深入地理解一阶微分方程及其解的意义，现给出它们的几何解释. 为此先介绍一下方向场.

微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y) \tag{15}$$

叫做导数已解出的一阶微分程，或称为一阶显方程. 假设$f(x,\ y)$定义在xy平面的区域D上，将D中任一点的坐标$(x,\ y)$代入$f(x,\ y)$得到一个值，以此值为过该点所作小线段的斜率，就得到该点的一个方向（假若斜率为无穷大，则小

线段垂直于x轴）．这样在D中的每一点都有一个小线段表示方向，就称D是由微分方程(15)确定的一个方向场．

譬如要作方程

$$\frac{dy}{dx}=x \tag{1}$$

所确定的方向场．要作一个微分方程所确定的方向场，实际上不能一个点一个点的盲目去作，而是先找出方向场中有相同方向的点的轨迹，这样的曲线叫做等倾线．以微分方程(1)为例：过(1，0)点且平行于y轴的直线就是一条等倾线，因为它上面每一点的斜率都等于1．同样过(−1，0)点且平行于y轴的直线，它上面每一点的斜率都等于−1．y轴上每一点的斜率都等于零．因此得到微分方程(1)所确定的方向场如图1—3．这个方向场就是微分方程(1)本身的几何解释．

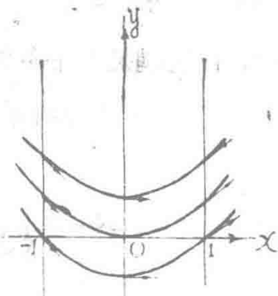

图1—3

要作微分方程(15)的方向场，是先令$f(x, y)=k$，然后给k一个数值k_1，就得到一个曲线方程$f(x, y)=k_1$，那么这条曲线上的斜率都等于k_1；再给k一个数值k_2，则曲线$f(x, y)=k_2$上的斜率都等于k_2。这样画出几条有代表性的等倾线，就得到微分方程(15)的方向场．

因为微分方程(1)的一个解为$y=\frac{1}{2}x^2$，所以它的图象是一条抛物线．在这条抛物线上，每一点的切线方向都和该点方向场的方向一致．由此得到一阶微分方程的解的几何解释是：每一点都和方向场的方向相切的曲线．或者说一阶微分方程的解是：顺着方向场的方向画出来的曲线．

根据微分方程的解的几何解释，就可先作出微分方程(15)所确定的方向场，然后从方向场出发，近似地画出微分方程(15)的积分曲线．在工程技术上，常用此法求微分方程的近似解．

下面将微分方程的一般概念作一简单小结．

1　在微分方程的定义中，自变量和未知函数在式中可以不出现，但未知函数的导数（或微分）必须出现，否则不叫微分方程．

2　微分方程和代数方程既有相同点，又有本质的差别．

相同点是：二者在所研究的问题中，都含有一些未知量．根据已知量与未知量间的关系列出一个或几个含未知量的等式，然后由这些等式求出未知量，从而解决我们所提出的问题．

差别是：一般说来，代数方程的解是数，而微分方程的解是函数．

3　在解微方程时，应注意一个问题，即一个微分方程的阶数、所给初始条的个数和通解中独立的任意常数的个数，三者应相等，且初始条件应在一定范围内给定．

4　在实际应用中，常常需要求满足初始条件的特解，而此特解通常是在通解的基础上求得的．因此，一般说来，一个初值问题的求解过程应分为两步．第一步，先求出微分方程的通解；第二步，将初始条件代入通解确定出任意常数的值，以此值代替任意常数即得所需要的特解．

习　　题

1　什么叫微分方程？指出下列等式中哪些是微分方程？

哪些是微分恒等式？

① $u'(x)v(x)+u(x)v'(x)=[u(x)v(x)]'$

② $\dfrac{dy}{dx}=e^x+\sin x$

③ $\dfrac{dy}{dx}+e^x=\dfrac{d(y+e^x)}{dx}$

④ $y''+3y'+4y=0$

2 什么叫微分方程的阶？说出下列微分方程 的 阶数，并指出哪些是线性的，哪些是非线性的？

① $x(y')^2-2yy'+x=0$

② $x^2y''-xy'+y=0$

③ $(x^2-y^2)dx+(x^2+y^2)dy=0$

④ $y^{(4)}-4y'''+10y''-11y'+y=\sin 2x$

3 什么叫微分方程的解？指出下列 各 题中各函数是否为已给微分方程的解，

① $xy'=2y$，$y=5x^2$

② $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$，$x=c_1\cos\omega t+c_2\text{sio}\,\omega t$

③ $y''-2y'+y=0$，$y=x^2e^x$

④ $(y')^2-x^2=0$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

(i) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2, & \text{当}x\geqslant 1\text{时},\\ -\dfrac{1}{2}x^2+1, & \text{当}x<1\text{时}.\end{cases}$

(ii) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2, & x\geqslant 0\\ -\dfrac{1}{2}x^2, & x<0\end{cases}$

4　已给微分方程

① $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=4$，　② $\frac{d^2y}{dx^2}=4$

试问它们是几阶的？$y=2x+c$（c是常数）是否是它们的解？又$y=2x^2$呢？

5　求下列初值问题

① $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=\sin\omega t \text{（}\omega\text{为常数）}\\ x(0)=0\end{cases}$

② $\begin{cases}\frac{d^2y}{dx^2}=6x\\ y(0)=0,\ y'(0)=2\end{cases}$

6　求下列微分方程的通解，并画出积分曲线族.

① $\frac{dy}{dx}=0$，　② $\frac{dy}{dx}=\sin x$

第二章　一阶微分方程

本章主要讨论一阶微分方程的初等解法（也叫初等积分法），所以叫初等解法是该解法的最后都把求解的问题化成求积分，且求得的解是用初等函数或它的积分表达出来。对一般的一阶微分方程来说，有初等解法的很少，下面介绍几种有初等解法的类型及其解法。

§1　变量可分离的方程

形如

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y) \tag{1}$$

的方程，称为变量可分离的方程，其中 $f(x)$和$g(y)$ 为已知的连续函数。这类方程的特点是：方程的右端分别为x与y的两个一元函数之积.

现在研究(1)的解法. (1)式两端要想化成一元函数的积分，必须把相同的变量凑到一起. 因此当 $g(y)\neq 0$ 时，方程(1)可化为

$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx$$

这样变量就“分离”开了. 两端再进行积分得

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+c \tag{2}$$

若令$\Phi(y)$和$F(x)$分别是$\frac{1}{g(y)}$和$f(x)$的一个原函数，c为任意常数，则(2)式可写成

$$\Phi(y)=F(x)+c \tag{3}$$

(3) 式实际上是方程(1)的隐式通解. 因为把y看作x的函数，根据隐函数求导法则，将(3)式两端同时对x求导得

$$\Phi'(y)\cdot y'=F'(x), \qquad 即 \quad \frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx}=f(x)$$

$\left(因为\ \Phi'(y)=\dfrac{1}{g(y)},\ F'(x)=f(x)\right)$，于是有

$\dfrac{dy}{dx}=f(x)g(y)$. 这正说明(3)式是方程(1)的隐式通解.

若方程$g(y)=0$有解y_1，y_2，…，y_n，那么常函数$y=y_1$，$y=y_2$，…，$y=y_n$显然都是方程(1)的解. 如果这些常函数解能合写在(3)中就合写在一起，不能合写就单写.

例1 求解方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+y^2}{xy(1+x^2)}$

解 分离变量得

$$\frac{y}{1+y^2}dy=\frac{1}{x(1+x^2)}dx$$

两端积分得

$$\ln(1+y^2)=\ln x^2-\ln(1+x^2)+c_1,$$

整理得通解$(1+x^2)(1+y^2)=cx^2$，其中$c=e^{c_1}$是个大于零的任意常数.

例2 求解方程 $\dfrac{dy}{dx}=xy-2x$

解 原方程可化为 $\dfrac{dy}{dx}=x(y-2)$，

当$y-2\neq0$时，分离变量得

$$\frac{dy}{y-2}=xdx$$

两端积分得

$$\ln|y-2|=\frac{1}{2}x^2+c_1$$

或 $|y-2|=e^{c_1}e^{\frac{1}{2}x^2}$，

即 $y-2=\pm e^{c_1}e^{\frac{1}{2}x^2}$，令 $c=\pm e^{c_1}$ $(c\neq 0)$，

则得 $y=ce^{\frac{1}{2}x^2}+2$ (4)

若$y-2=0$，则$y=2$也是原方程的解．这只要允许(4)式中的$c=0$即包括此解，因此原方程的通解为

$y=ce^{\frac{1}{2}x^2}+2$ (c为任意常数)．

例3 求解方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$

解 当$y\neq\pm1$时，分离变量得

$$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

两端积分得 $\arcsin y=\arcsin x+c_1$，

解出y得到通解为 $y=x\cos c_1+\sin c_1\sqrt{1-x^2}$，

令 $c=\sin c_1$，则得 $y=x\sqrt{1-c^2}+c\sqrt{1-x^2}$，其中$c$为绝对值不大于1的任意常数．

另外，由$\sqrt{1-y^2}=0$得方程的常数解$y=\pm1$，它们不包含在上述通解中．

例4 求微分方程