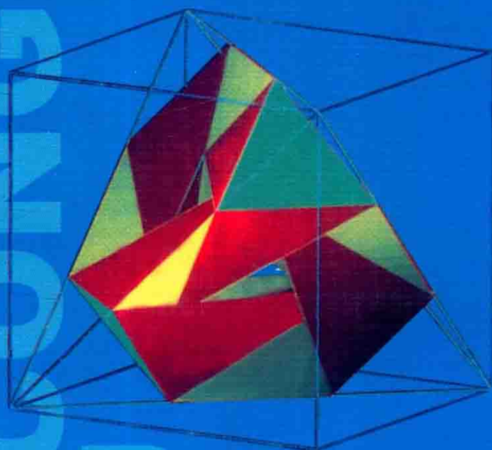
数学奥林匹克小丛书

初中卷 9



整除、同余与不定方程

冯志刚 著

华东师范大学出版社

Shuxue A

Xiao

Congshu

Shuxue

olinpike

数学奥林匹克小丛书

初中卷 9

整除、同余与不定方程

Olinpike Xiao Congshu

冯志刚 著

华东师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学奥林匹克小丛书. 初中卷. 整除、同余与不定方程/冯志刚著.—上海：华东师范大学出版社，2005
ISBN 7-5617-4077-8

I.数... II.冯... III.数学课-初中-教学参考资料 IV.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第016383号

数学奥林匹克小丛书·初中卷
整除、同余与不定方程

著　　者　冯志刚
策划组稿　倪　明
责任编辑　程丽明
封面设计　高　山
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
　　　　　市场部 电话 021-62865537
　　　　　门市(邮购) 电话 021-62869887
　　　　　门市地址 华东师大校内先锋路口
业务电话　上海地区 021-62232873
　　　　　华东 中南地区 021-62458734
　　　　　华北 东北地区 021-62571961
　　　　　西南 西北地区 021-62232893
业务传真　021-62860410 62602316
http://www.ecnupress.com.cn
社　　址　上海市中山北路3663号
　　　　　邮编 200062

印 刷 者　江苏宜兴市德胜印刷有限公司
开　　本　787×960 16开
印　　张　8
字　　数　140千字
版　　次　2005年4月第一版
印　　次　2005年4月第一次
印　　数　16 000
书　　号　ISBN 7-5617-4077-8/G·2317
定　　价　10.00元

出 版 人　朱杰人

（如发现本版图书有印订质量问题，请寄回本社市场部调换或电话021-62865537联系）

本书导读

数论是数学奥林匹克的一个重要内容，许多数论问题的解不依赖于知识的多少，但需要有一些智慧和技巧．它是中学提高数学能力的好素材．

本书就整除、同余与不定方程三个专题展开，可以视为初数论的一本入门书．作者取用了大量最近几年的国内外竞赛题，并以它们为平台介绍了一些基本概念和方法．希望通过些相对较新的资料让读者在学到一些数论知识的同时还能深地把握数学奥林匹克的脉搏与方向．同时，本书也是在高中段继续参与数学竞赛活动的基本读本，因此，编写过程中还重了初高中之间的衔接．

冯志刚　理学硕士，上海市上海中学特级教师，中国数学奥林匹克高级教练．长期从事数学奥林匹克教学和研究工作，主编或参编了十余套数学竞赛方面的读物．所教学生中累计有2人获IMO金牌，20余人进入国家集训队，30多人次在CMO上获奖，200余人次获市级一等奖．参与了历届西部数学奥林匹克的命题工作，作为2003年中国队副领队带队参加了第44届国际数学奥林匹克．

数学奥林匹克小丛书

冯志刚	第44届IMO中国队副领队 上海中学特级教师
葛　军	中国数学奥林匹克高级教练、江苏省数学会普委会副主任 南京师范大学副教授
冷岗松	中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练 上海大学教授、博士生导师
李胜宏	第44届IMO中国队领队、中国数学奥林匹克委员会委员 浙江大学教授、博士生导师
李伟固	中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练 北京大学教授、博士生导师
刘诗雄	中国数学奥林匹克委员会委员 武钢三中校长、特级教师
倪　明	数学奥林匹克小丛书总策划 华东师范大学出版社副总编辑
单　墫	第30、31届IMO中国队领队 南京师范大学教授、博士生导师
吴建平	中国数学会普委会副主任、中国数学奥委会副主席 第40届IMO中国队副领队、《中学生数学》主编
熊　斌	第46届IMO中国队领队、中国数学奥林匹克委员会委员 华东师范大学副教授
余红兵	中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练 苏州大学教授、博士生导师
朱华伟	中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练 广州大学软件所常务副所长、研究员

总 序

数学竞赛像其他竞赛活动一样，是青少年学生的一种智力竞赛．在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中，数学竞赛的历史最悠久、国际性强，影响也最大．我国于1956年开始举行数学竞赛，当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动，并组织出版了一系列青少年数学读物，激励了一大批青年学生立志从事科学事业．我国于1986年起参加国际数学奥林匹克，多次获得团体总分第一，并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克，这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位，为各国科学家与教育家所瞩目．

我国数学竞赛活动表明，凡是开展好的地区和单位，都能大大激发学生的学习数学的兴趣，有利于培养创造性思维，提高学生的学习效率．这项竞赛活动，将健康的竞争机制引进数学教学过程中，有利于选拔人才．由数学竞赛选拔的优胜者，既有踏实广泛的数学基础，又有刻苦钻研、科学的学习方法，其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者．在美国，数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺（J.W.Milnor）、芒福德（D.B.Mumford）、奎伦（D.Quillen）等都是菲尔兹数学奖的获得者；在波兰，著名数论专家辛哲尔（A.Schinzel）学生时代是一位数学竞赛优胜者；在匈牙利，著名数学家费叶尔（L.Fejér）、里斯（M.Riesz）、舍贵（G.Szegö）、哈尔（A.Haar）、拉多（T.Radó）等都曾是数学竞赛获奖者．匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家，产生了同它的人口不成比例的许多大数学家！

在开展数学竞赛的活动同时，各学校能加强联系，彼此交流数学教学经验，从这种意义上来说，数学竞赛可能成为数学课程改革的"催化剂"，成为培养优秀人才的有力措施．

不过，应当注意在数学竞赛活动中，注意普及与提高相结合，而且要以普及为主，使竞赛具有广泛的群众基础，否则难以持久．

当然，现在有些人过于关注数学竞赛的成绩，组织和参与都具有很强的功利目的，过分扩大数学竞赛的作用，这些都是不正确的，违背了开展数学竞赛活动的本意．这些缺点有其深层次的社会原因，需要逐步加以克服，不必因为有某些缺点，就否定这项活动．

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版．这套书，规模大、专题细．据我所知，这样的丛书还不多见．这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述，而且对竞赛题作了精到的分析解答，不少出自作者自己的研究所得，是一套很好的数学竞赛专题教程，也是中小学生和教师的参考书．

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员，不少是国家集训队的教练和国家队的领队．他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在IMO上取得成绩、为国争光作出了贡献，为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动．华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向IMO》等竞赛图书基础上，策划组织了这套丛书，花了不少心血．我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作，并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好．

王元

王元，著名数学家，中国科学院院士，曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席．

符号说明

$a \mid b$	a 整除 b
$a \nmid b$	a 不整除 b
(a, b)	a 与 b 的最大公约数
$[a, b]$	a 与 b 的最小公倍数
$p^{\alpha} \parallel a$	$p^{\alpha} \mid a$ 但 $p^{\alpha+1} \nmid a$
$a \equiv b \pmod{m}$	a 与 b 对模 m 同余
$a \not\equiv b \pmod{m}$	a 与 b 对模 m 不同余
$a^{-1} \pmod{m}$	a 对模 m 的数论倒数
$[x]$	不超过 x 的最大整数
$\max\{a, b\}$	实数 a、b 中较大的数

目　录

1 整　除

任意两个整数的和、差或积都是整数，但是两个整数做除法时所得的结果不一定是整数，因此，数论中的许多问题都是在研究整数之间的除法.

1.1　整除的概念与基本性质

任给两个整数 a、$b(\neq 0)$，我们用 b 去除 a，可以得到一个商数和一个余数，这个结论在小学就已经接触到，它是数论证明中最基本、最常用的一个结论.

带余数除法　设 a、b 是两个整数，$b\neq 0$，则存在惟一的一对整数 q 和 r，满足

$$a = bq + r,\ 0 \leqslant r < |b|,$$

其中 q 称为 a 除以 b 所得的商数，r 称为 a 除以 b 所得的余数.

定义 1　如果 a 除以 $b\ (\neq 0)$ 所得的余数等于零，那么我们称 a 能被 b 整除，或称 b 整除 a. 记作 $b \mid a$. 否则，如果余数不等于零，那么称 b 不能整除 a，记作 $b \nmid a$.

例如 $2\,004 = 3 \times 668$，$2\,004 = 5 \times 400 + 4$，故 $3 \mid 2\,004$，$5 \nmid 2\,004$.

整除有如下的一些性质，它们在解题中被经常用到.

性质 1　如果 $a \mid b$，$b \mid c$，那么 $a \mid c$. 这表明整除具有传递性.

性质 2　若 $a \mid b$，$a \mid c$，则对任意整数 x、y，都有 $a \mid bx + cy$.（即 a 整除 b、c 的任意一个“线性组合”）

例 1　若 $a \mid n$，$b \mid n$，且存在整数 x、y，使得 $ax + by = 1$，证明：$ab \mid n$.

证明　由条件，可设 $n = au$，$n = bv$，u、v 为整数. 于是

$$\begin{aligned} n &= n(ax + by) \\ &= nax + nby \end{aligned}$$

$$= abvx + abuy$$
$$= ab(vx + uy),$$

因此 $$ab \mid n.$$

说明 一般地,由 $a \mid n$, $b \mid n$,并不能推出 $ab \mid n$,例如 $2 \mid 6$, $6 \mid 6$,但 $12 \nmid 6$. 题中给出的条件实质上表明 a、b 的最大公约数(见 1.3 节)为 1,即 a 与 b 互质,在此条件下可推出 $ab \mid n$.

例 2 证明:无论在数 12 008 的两个 0 之间添加多少个 3,所得的数都是 19 的倍数.

证明 记 $a_0 = 12\,008$, $a_n = 120\underbrace{3\cdots3}_{n个3}08$, $n = 1, 2, \cdots$.

首先,因为

$$a_0 = 19 \times 632,$$

故 $$19 \mid a_0.$$

其次,设 $19 \mid a_n$,则由

$$a_{n+1} - 10a_n = 228 = 19 \times 12,$$

可知 $$19 \mid a_{n+1}.$$

所以,对一切整数 n,数 a_n 都是 19 的倍数.

说明 此题的处理过程中运用了递推的思想,其基本思路是将 a_{n+1} 表示为 a_n 与 19 的一个线性组合.

例 3 已知一个 1 000 位正整数的任意连续 10 个数码形成的 10 位数是 2^{10} 的倍数. 证明:该正整数为 $2^{1\,000}$ 的倍数.

证明 设该正整数 $x = \overline{a_1 a_2 \cdots a_{1\,000}}$,其中 a_i 是十进位数码. 由条件,可知

$$2^{10} \mid \overline{a_{991} \cdots a_{1\,000}},\ 2^{10} \mid \overline{a_{990} \cdots a_{999}},$$

因此 $$2^{10} \mid \overline{a_{990} \cdots a_{999}} \times 10.$$

记 $y = \overline{a_{991} \cdots a_{999}}$,则有

$$2^{10} \mid a_{990} \times 10^{10} + 10y,$$

故 $$2^{10} \mid 10y.$$

结合 $2^{10} \mid \overline{a_{991} \cdots a_{1\,000}}$,可知

$$2^{10} \mid 10y + a_{1\,000},$$

于是
$$2^{10} \mid a_{1\,000},$$

这要求
$$a_{1\,000} = 0.$$

类似地，朝前倒推，可得

$$a_{11} = \cdots = a_{1\,000} = 0,$$

即
$$x = \overline{a_1 \cdots a_{10}} \times 10^{990}.$$

再结合条件 $2^{10} \mid \overline{a_1 \cdots a_{10}}$，即可得

$$2^{1\,000} \mid x.$$

说明 这里先证明 $a_{11} = \cdots = a_{1\,000} = 0$ 是非常关键的，在证明中利用 $\overline{a_{991} \cdots a_{999}}$ 来过渡也是比较巧妙的.

1.2 质数与合数

设 a、b 都是正整数，若 $a \mid b$，则称 a 为 b 的约数. 对任意正整数 $n > 1$，如果除 1 与 n 以外，n 没有其他的约数，那么称 n 为质数. 否则称 n 为合数. 这样，我们将正整数分为了三类：1，质数，合数.

质数从小到大依次为 2, 3, 5, 7, 11, …. 我们可以非常轻松地写出 100 以内的所有质数，共 25 个. 但是并不是对每个质数 p，都能轻易地指出 p 后面的一个质数是多少. 事实上，当 p 比较大时，求出它后面的那个质数是十分困难的. 正是质数的这种无规律性，初等数论才显得魅力无穷、具有很强的挑战性和极大的吸引力.

质数与合数具有如下的一些性质.

性质 1 设 n 为大于 1 的正整数，p 是 n 的大于 1 的约数中最小的正整数，则 p 为质数.

性质 2 如果对任意 1 到 $\sqrt{n}$ 之间的质数 p，都有 $p \nmid n$，那么 n 为质数. 这里 $n\,(>1)$ 为正整数.

证明 事实上，若 n 为合数，则可写 $n = pq$, $2 \leqslant p \leqslant q$. 因此 $p^2 \leqslant n$，即 $p \leqslant \sqrt{n}$.

这表明 p 的质因子 $\leqslant \sqrt{n}$，且它是 n 的约数，与条件矛盾. 因此 n 为质数.

说明　这里质因子是指正整数的约数中为质数的那些数. 此性质是我们检验一个数是否为质数的最常用的方法.

性质 3　质数有无穷多个.

证明　若只有有限个质数,设它们是 $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$. 考虑数

$$x = p_1 p_2 \cdots p_n + 1,$$

其最小的大于 1 的约数 p 是一个质数,则 p 应为 p_1, p_2, $\cdots$, p_n 中的某个数. 设 $p = p_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, 并且 $x = p_i y$, 则 $p_1 p_2 \cdots p_n + 1 = p_i y$, 即 $p_i(y - p_1 p_2 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_n) = 1$. 这导致 $p_i \mid 1$. 矛盾.

所以,质数有无穷多个.

说明　如果将所有的质数从小到大依次写出为 $2 = p_1 < p_2 < \cdots$, 并写 $q_n = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$, 那么

$$q_1 = 3,\ q_2 = 7,\ q_3 = 31,\ q_4 = 211,\ q_5 = 2\,311,$$

它们都是质数. 是否每一个 n 都有 q_n 为质数呢? 我们不能被表面现象所迷惑,再朝下算,可知 $q_6 = 59 \times 509$ 就是一个合数. 事实上,后面的 q_7、q_8、q_9、q_{10} 都是合数. 到目前为止,人们还不知道数列 q_1, q_2, $\cdots$ 中是否有无穷多个质数,也不知道其中是否有无穷多个合数.

性质 4　质数中只有一个数是偶数.

例 1　设 n 为大于 1 的正整数. 证明:数 $n^5 + n^4 + 1$ 不是质数.

证明　注意到

$$\begin{aligned} & n^5 + n^4 + 1 \\ = & n^5 + n^4 + n^3 - (n^3 - 1) \\ = & n^3(n^2 + n + 1) - (n - 1)(n^2 + n + 1) \\ = & (n^3 - n + 1)(n^2 + n + 1), \end{aligned}$$

因此,若 $n^5 + n^4 + 1$ 为质数,则 $n^3 - n + 1 = 1$, 这要求 $n = 0$ 或 ± 1.

故当 $n > 1$ 时, $n^5 + n^4 + 1$ 不是质数.

说明　利用因式分解来处理数论问题是初中数学竞赛中的常见方法,后面也将不断用到.

例 2　考察下面的数列:

$$101,\ 10101,\ 1010101,\ \cdots.$$

问:该数列中有多少个质数?

解 易知 101 是质数. 下证这是该数列中仅有的一个质数.

记 $a_n = \underbrace{10101\cdots01}_{n个01}$，则当 $n \geqslant 2$ 时，有

$$\begin{aligned} a_n &= 10^{2n} + 10^{2(n-1)} + \cdots + 1 \\ &= \frac{10^{2(n+1)} - 1}{10^2 - 1} \\ &= \frac{(10^{n+1} - 1)(10^{n+1} + 1)}{99}. \end{aligned}$$

注意到，$99 < 10^{n+1} - 1$，$99 < 10^{n+1} + 1$，而 a_n 为正整数，故 a_n 是一个合数(因为分子中的项 $10^{n+1} - 1$ 与 $10^{n+1} + 1$ 都不能被 99 约为 1).

说明 这里需要将因式分解式 $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1)$ 反用，高中阶段它被作为等比数列求和的公式.

例 3 已知 p 为质数，求所有的整数对 (x, y)，使得 $|x+y| + (x-y)^2 = p$.

解 注意到，$x+y$ 与 $x-y$ 要么都是奇数，要么都是偶数，故 $|x+y| + (x-y)^2$ 为偶数，从而 $p = 2$. 这表明 $|x+y| + (x-y)^2 = 2$.

由于 $|x+y|$ 与 $(x-y)^2$ 具有相同的奇偶性，又 $(x-y)^2$ 是一个完全平方数，故 $(|x+y|, (x-y)^2) = (2, 0), (1, 1)$. 分别求解，可知

$$(x, y) = (1, 1), (-1, -1), (0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0).$$

说明 从奇偶性出发，利用性质 4 先确定式子中的质数应具有的一些特性，然后再处理. 这种奇偶分析的思路在数论或组合中都很常见.

例 4 求所有的正整数 n，使得 $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ 是一个质数.

解 记 $a_n = \frac{n(n+1)}{2} - 1$，则 $a_1 = 0$ 不是质数，因此只需讨论 $n > 1$ 的情形. 我们利用 n 只能是形如 $4k$、$4k+1$、$4k+2$、$4k+3$ 的数分别讨论.

当 n 是形如 $4k+2$ 或 $4k+1$ 的数时，a_n 都是偶数，要 a_n 为质数，只能是

$$\frac{n(n+1)}{2} - 1 = 2,$$

解得
$$n = 2.$$

当 $n = 4k$ 时，可得

$$\begin{aligned} a_n &= 2k(4k+1) - 1 \\ &= 8k^2 + 2k - 1 \\ &= (4k-1)(2k+1), \end{aligned}$$

这是一个合数.

当 $n=4k+3$ 时,可得

$$\begin{aligned} a_n &= 2(k+1)(4k+3)-1 \\ &= 8k^2+14k+5 \\ &= (4k+5)(2k+1), \end{aligned}$$

仅当 $k=0$, 即 $n=3$ 时, a_n 为质数.

所以,满足条件的 $n=2$ 或 3.

说明 对 n 分类处理一方面是去分母的需要,另一方面为进行因式分解作准备.

例 5 对任意正整数 n,证明:存在连续 n 个正整数,它们都是合数.

证明 设 n 为正整数,则

$$(n+1)!+2,\ (n+1)!+3,\ \cdots,\ (n+1)!+(n+1)$$

是 n 个连续正整数,并且第 k 个数是 $k+1$ 的倍数(且大于 $k+1$),故它们是连续的 n 个合数.

说明 这个结论表明:对任意正整数 n,都存在两个质数,它们之间至少有 n 个数,且这些数都是合数.但是,让我们来看一些质数对(3, 5),(5, 7),(11, 13),(17, 19),…,(1 997, 1 999),它们所含的两个质数都只相差 2(这是两个奇质数的最小差距),这样的质数对称为孪生质数.是否存在无穷多对质数,它们是孪生质数?这是数论中的一个未解决的著名问题.

例 6 设 n 为大于 2 的正整数.证明:存在一个质数 p,满足 $n<p<n!$.

证明 设 $p_1<p_2<\cdots<p_k$,且 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 是所有不超过 n 的质数,考虑数

$$q=p_1p_2\cdots p_k-1,$$

在 $n>2$ 时, $n<q<n!$,并且利用性质 3 证明中的方法,可知 q 的质因子 p 不等于 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 中的任何一个.而 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 是所有不超过 n 的质数,因此 $p>n$,所以 $n<p\leqslant q<n!$.

从而,命题成立.

说明 贝特朗曾猜测在正整数 m 与 $2m$ 之间(包括 m 与 $2m$)有一个质数.对比例 5 中的说明,如果将质数从小到大排列为 $p_1<p_2<\cdots$,该猜测亦即 $p_{n+1}<2p_n$.这个猜测被契比雪夫证明了.因此它被称为**贝特朗猜想或契比雪夫定理**.