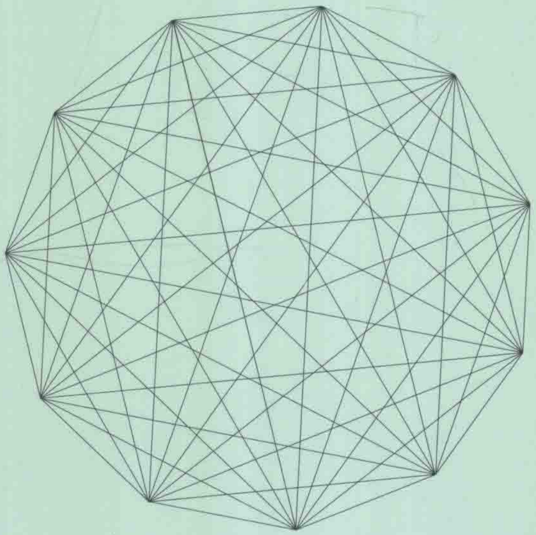
军队院校“2110工程”建设项目

实用泛函分析基础

Fundamental to Practical Functional Analysis

时 宝 王兴平 盖明久 编著



国防工業出版社
National Defense Industry Press

军队院校“2110工程”建设项目

实用泛函分析基础

Fundamental to Practical Functional Analysis

时　宝　王兴平　盖明久　编著

国防工業出版社
National Defense Industry Press
·北京·

内容简介

本书在读者已有微积分、线性代数和矩阵分析等基础知识的基础上简明实用地介绍了泛函分析的基础理论及其应用。全书内容共分为 7 章: 第 1 章介绍集论基础知识; 第 2 章介绍度量空间的基本概念及其重要性质; 第 3 章介绍赋范线性空间的基本概念, 重点介绍了有界线性算子和泛函的基本知识; 第 4 章介绍 Banach 空间理论的基本定理, 重点介绍了Hahn-Banach 定理和共鸣定理, 以及弱收敛和全连续算子的基本概念及性质, 最后介绍线性算子谱的基本概念和理论基础; 第 5 章介绍内积空间和规范正交集的基本概念和基本理论; 第 6 章重点介绍几个基本的不动点定理及其重要的应用; 第 7 章介绍非线性泛函分析基础, 主要包括测度和 Lebesgue 积分, 以及非线性算子的概念, 比较详细地介绍了 Banach 空间中的微积分理论基础及应用, 最后介绍了锥的概念。

本书可供高等院校数学类专业高年级学生、理工专业硕士/博士研究生学习使用, 也可供高校教师在教学和科研中参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

实用泛函分析基础/时宝, 王兴平, 盖明久编著.
-- 北京: 国防工业出版社, 2016. 5
ISBN 978-7-118-10910-8

Ⅰ.①实… Ⅱ.①时… ②王… ③盖… Ⅲ.①泛函分析
Ⅳ.①O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 113876 号

※

国防工业出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路 23 号　邮政编码 100048)
三河市众誉天成印务有限公司印刷
新华书店经售
*

开本 710×1000　1/16　**印张** 18¼　**字数** 323 千字
2016 年 5 月第 1 版第 1 次印刷　**印数** 1—3000 册　**定价** 48.00 元

国防书店: (010) 88540777　发行邮购: (010) 88540776
发行传真: (010) 88540755　发行业务: (010) 88540717

前　言

抽象化是现代数学的主要特征之一. 这种特征最初是受到了两大因素的推动.

一个是 19 世纪末由 G. Cantor① 所创立的被誉为 19 世纪最伟大的数学创造的集论, 由于结果太惊人, 连他本人都讲: “我看到了, 但是我不能相信它” 最初 G. Cantor 的工作, 遭到许多数学家的反对, 包括 L. Kronecker②, F. Klein③ 和 J. Poincaré④ 等, 但到 20 世纪初, 这一新的理论在数学中的作用越来越明显, 并作为一种普遍的语言进入数学的不同领域, 同时引起了数学中基本概念的深刻变革.

另一个是 D. Hilbert⑤ 在 1899 年提出的对 20 世纪以后的数学有深刻影响的第一个完备的公理体系, 他是一个乐观主义的数学家, 他说: “我们必须知道, 我们必将知道”. 虽然 Euclid⑥ 已用公理化方法总结了古人的几何知识, 但他的公理体系不是完备的. 与以往相比, D. Hilbert 的公理化方法具有两个本质的飞跃: 首先是在几何对象上达到了更深刻的抽象; 其次是考虑了各公理间的相互关系, 明确了对公理体系的基本逻辑要求, 即相容性、独立性和完备性.

---

① Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845.03.03—1918.01.06), 德国人.

② Leopold Kronecker (1823.12.07—1891.12.29), 德国人.

③ Felix Christian Klein (1849.04.25—1925.06.22), 德国人.

④ Jules Henri Poincaré (1854.04.29—1912.07.17), 德国人, 称为 “对于数学和它的应用具有全面知识的最后一个人”.

⑤ David Hilbert (1862.01.23—1943.02.14), 德国人, 有 “数学无冕之王” 之称.

⑥ Euclid of Alexandria (公元前 325—公元前 265), 古希腊三大数学巨人之一, 称为 “几何学之父”.

集论观点和公理化方法在 20 世纪逐渐成为数学抽象的典范, 它们相互结合将数学的发展引向了高度抽象的道路. 从而导致了包括泛函分析在内的具有标志性的抽象分支的崛兴.

关于泛函的抽象理论的研究是在 19 世纪末 20 世纪初首先由 V. Volterra① 和 J. Hadamard② 在变分法的研究中开创的, "泛函" 这个名称就是由 J. Hadamard 首先采用的, 而 V. Volterra 称泛函为线函数, 即曲线的函数.

泛函分析之所以能迅速发展成为独立的学科, 乃是由于数学史上发生的几件大事.

1. 分析学中问题的类似

人们发现代数学、几何学和分析学中不同领域中的许多概念和方法常常存在惊人的相似之处. 例如, 代数方程求根和微分方程求解都可应用逐次逼近法, 并且解的存在和唯一性条件也极相似. 这种相似在积分方程中表现得就更为突出了. 例如, E. Fredholm③ 的重要工作主要在积分方程和谱理论方面, 创造了一种优美的方法处理某类特殊的线性积分方程, 揭示了线性积分方程与线性代数方程组之间的相似性, 即把线性积分方程看成 "无限维" 的线性代数方程组. 随后, D. Hilbert 和 E. Hellinger④ 在 1912 年开创了 "Hilbert 序列空间 ℓ^2" 的研究, 这应该是史上第一个具体的无限维空间. 到 20 世纪 20 年代, E. Schmidt⑤ 和 J. von Neumann⑥ 进一步研究并正式确立了 Hilbert 空间概念.

S. Banach⑦ 奠定了现代泛函分析基础, 遍及泛函分析的各个方面, 提出了比 Hilbert 空间更一般的所谓 Banach 空间概念, 证明了一批后来成为泛函分析基础的重要定理, 一般认为这标志着泛函分析的诞生.

泛函分析的产生正是和下述情况有关: 即有些初看起来很不相干的东西, 都有着类似的地方. 因此, 它启发人们从这些类似的东西中探寻一般的真正属于本质的东西, 而这正是泛函分析的特征.

2. 非 Euclid 几何的发现

D. Hilbert 曾指出: "19 世纪最有启发性, 最重要的数学成就是非 Euclid 几何的发现."

① Vito Volterra (1860.05.03—1940.10.11), 意大利人.

② Jacques Salomon Hadamard (1865.12.08—1963.10.17), 法国人, 1896 年与 C de la Vallée 分别证明了素数定理, 即不超过 x 的素数个数 $\pi(x)$ 当 $x\to\infty$ 时与 $\dfrac{x}{\ln x}$ 是同阶的.

③ Erik Ivar Fredholm (1866.04.07—1927.08.17), 瑞典人.

④ Ernst David Hellinger (1883.09.30—1950.03.28), 德国人.

⑤ Erhard Schmidt (1876.01.13—1959.12.06), 德国人, 现代抽象泛函分析的奠基者之一.

⑥ John von Neumann (1903.12.28—1957.02.08), 匈牙利/美国人, 被称为 "计算机之父".

⑦ Stefan Banach (1892.03.30—1945.08.31), 波兰人.

由于对 Euclid 第五公设的研究, J. Gauss[①], J. Bolyai[②] 和 N. Lobachevsky[③] 建立了非 Euclid 几何这门新的学科. 后来, G. Riemann[④] 的非 Euclid 几何, 即 Riemann 几何为 A. Einstein[⑤] 的广义相对论提供了数学框架.

非 Euclid 几何的建立所产生的一个最重要的影响是迫使数学家们从根本上改变了对数学性质的理解. 历史学家通过数学这面镜子, 不仅看到了数学的成就与应用, 也看到了数学的发展如何教育人们去进行抽象的推理, 发扬理性主义的探索精神, 激发人们对理想和美的追求. 在 19 世纪末及 20 世纪初, 发现了几何化新运河 —— 函数被看成 "函数" 空间中的点或向量. 这样, 就显示出了分析和几何之间相似的地方, 同时存在着把分析几何化的一种可能性. 这种可能性要求把几何概念进一步推广, 以至于最后把 Euclid 空间扩充成无限维空间. 这种几何工具的使用乃是现代泛函分析的特征, 且在关于这门数学的各种著作中这个问题起着决定性的作用.

3. 实变函数论的诞生

集论观点在 20 世纪初首先引起了积分学的变革, 从而导致了实变函数论的诞生.

19 世纪末, 分析的严格化迫使数学家们认真考虑所谓 "病态函数", 如不连续函数 —— Dirichlet[⑥] 函数和不可微函数 —— Weierstrass[⑦] 函数 [⑧] 等, 并研究如何将积分概念推广到更广泛的函数类上去.

H. Lebesgue[⑨] 在 1902 年用 "Borel[⑩] 测度" 概念建立了实变函数论的核心

① Johann Carl Friedrich Gauss (1777.04.30—1855.02.23), 德国人, 三大数学家之一, 被誉为 "数学王子".

② János Bolyai (1802.12.15—1860.01.27), 匈牙利人.

③ Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792.12.01—1856.02.24), 俄罗斯人, 被誉为 "几何学中的 Copenicus".

④ Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826.09.17—1866.07.20), 德国人, 他把数学向前推进了几代人的时间.

⑤ Albert Einstein (1879.03.14—1955.04.18), 德国/美国人, 当代最伟大的物理学家.

⑥ Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805.02.13—1859.05.05), 德国人, Fourier 级数理论奠基者, 解析数论创始人之一.

⑦ Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815.10.31—1897.02.19), 德国人, 被称为 "现代分析之父"; 他更大的贡献是培养了众多的伟大数学家, 如 Bachmann, Bolza, Cantor, Engel, Frobenius, Gegenbauer, Hensel, Hölder, Hurwitz, Killing, Klein, Kneser, Königsberger, Lerch, Lie, Lueroth, Mertens, Minkowski, Mittag-Leffler, Netto, Schottky, Schwarz 和 Stolz 等.

⑧ Weierstrass 函数可表示为 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$, 其中 a 是奇数, $b \in (0,1)$ 是常数, 使得 $ab > 1 + \dfrac{3\pi}{2}$. Weierstrass 函数是处处连续但处处不可微的.

⑨ Henri Léon Lebesgue (1875.06.28—1941.07.26), 法国人, 20 世纪最有影响的分析学家.

⑩ Félix Édouard Justin Émile Borel (1871.01.07—1956.02.03), 法国人, 开创了实变函数理论.

内容 —— Lebesgue 积分, 它是微积分的重大推广, 使微积分的适用范围大大扩展, 引起微积分的深刻变化和飞速发展, 成为近代分析的开端. 因为他的工作已经做了极大的推广, 以致于 H. Lebesgue 本人也害怕如此大的推广, 他悲观地写到: "推广到如此一般的理论, 数学将会变成无内容的漂亮形式而已. 它很快就会死掉". 这项理论在最初受到了 C. Hermite① 的激烈反对, 使得 H. Lebesgue 从 1902 年开始直到 1910 年才获准进入巴黎大学.

4. 近世代数的发展

E. Galois② 用群论改变了整个数学的面貌. 近世代数的发展, 就是由 Galois 群概念开始的, 使其研究对象突破了数的范畴, 进而研究具有任意性质对象的代数运算. 例如, 继 Galois 群之后, A Cayley③ 首先指出群可以是普遍概念, 从而引进了抽象群概念. E. Huntington④ 和 L. Dickson⑤ 分别于 1902 年和 1905 年提出了抽象群的公理体系. 到 1920 年, E. Noether⑥ 及其学派最终确立了公理化方法在代数学领域的统治地位.

如此合成了现代的泛函分析, 它是现代几何的、函数的以及代数的观点的高度综合. 在泛函分析的发展中, 不管在理论上还是在方法上作为不同数学分支的公共问题起到了特殊的作用.

泛函分析的特点是它不但把古典分析的基本概念和方法一般化了, 而且还把这些概念和方法几何化了. 例如, 不同类型的函数可以看作是 "函数空间" 的点或向量, 这样最后得到了 "抽象空间" 这个一般概念. 它既包含以前讨论过的几何对象, 也包括不同的函数空间.

正如研究有穷自由度系统要求有限维空间的几何学和微积分作为工具一样, 研究无限自由度的系统需要无限维空间的几何学和微积分, 这正是泛函分析的基本内容. 因此, 泛函分析也可通俗地称为无限维空间的几何学和微积分.

一个多世纪以来, 泛函分析一方面以其他众多学科所提供的素材来提取自己研究的对象和某些研究手段, 并形成了自己的许多重要分支; 此外, 它也强有力地推动着其他不少分析学科的发展. 它在微分方程、概率论、函数论、计算数学、控制论和最优化理论等学科中都有重要的应用. 目前, 其观点和方法已经渗入到许多工程技术学科之中, 已成为近代分析的基础之一.

① Charles Hermite (1822.12.24—1901.01.14), 法国人, 第一个证明 e 是超越数, C. Lindemann 按照 C. Hermite 的方法证明 π 是超越数.

② Evariste Galois (1811.10.25—1832.05.31), 法国人.

③ Arthur Cayley (1821.08.16—1895.01.26), 英国人.

④ Edward Vermilye Huntington (1874.04.26—1952.11.25), 美国人.

⑤ Leonard Eugene Dickson (1874.01.22—1954.01.17), 美国人.

⑥ Emmy Amalie Noether (1882.03.23—1935.04.14), 德国人, 被称为迄今为止最伟大的女

全书内容共分为 7 章, 主要选取《泛函分析引论及其应用》《矩阵分析引论及其应用》《微分方程理论及其应用》和书后参考文献中的部分内容. 其中: 第 1 章介绍集论基础知识; 第 2 章介绍度量空间的基本概念及其重要性质; 第 3 章介绍赋范线性空间的基本概念, 重点介绍了有界线性算子和泛函的基础知识; 第 4 章介绍 Banach 空间理论的基本定理, 重点介绍了 Hahn-Banach 定理和共鸣定理, 还介绍了弱收敛和全连续算子的基本概念及性质, 最后介绍线性算子谱的基本概念和理论基础; 第 5 章介绍内积空间和规范正交集的基本概念和基本理论; 第 6 章重点介绍几个基本的不动点定理及其重要的应用; 第 7 章介绍非线性泛函分析基础, 包括测度和 Lebesgue 积分, 几个重要非线性算子概念, 比较详细地介绍了 Banach 空间中的微积分理论基础及应用, 最后介绍了锥的概念. 对于工科等各专业硕士生, 第 3 章第 3.2 节、第 4 章第 4.8 节至第 4.11 节、第 6 章第 6.2 节至第 6.4 节和第 7 章可以选讲或不讲.

本书内容在读者已有微积分、线性代数和矩阵分析等基础知识的基础上, 并结合作者在工科等各专业硕士生和博士生教学过程中所获得的进一步体会写成的. 由于工科等各专业硕士生和博士生大都未受过数学的严格训练, 我们对此进行了必要的补充, 并主要从他们的工科数学学习习惯出发, 调整了原来的部分内容和习题, 改变了部分原来的叙述方式, 分散了重点和难点, 并随时注意穿插与微积分、线性代数和矩阵分析中的相应定义和结论进行类比处理, 尽可能深入浅出, 并让研究生们在数学观点上能够有所提高.

由于作者水平有限, 书中不妥之处在所难免, 敬请读者和同行不吝赐教.

编著者

2015 年 12 月 24 日

目　录

第 1 章 集论基础

1.1 集与映射

集 (set) 是被看成单一整体的一些不同“事物”. 这些“事物”称为这个集的元 (element). 若 A 是集, x 是 A 的元, 记 $x \in A$, 读作“x 属于 A”; 若 x 不是 A 的元, 记 $x \notin A$, 读作“x 不属于 A”. 不含任何“事物”的集称为空集 (empty-set), 记为 $\varnothing$.

集 A 已给定, 就是说对“事物 x”都能鉴别 x 是不是 A 的元, 即 $x \in A$ 和 $x \notin A$ 中的哪一个成立.

可用已有的“事物”作为元构成各种各样的集. 例如, 将 $1, 2, 3$ 三个数放在一起看成整体就可得集, 可记为 $\{1, 2, 3\}$. 这里用 $\{\quad\}$ 表示把括号中的“事物”放在一起看成整体的意思. 例如, $\{2, 4, 6, 8\}$ 和 $\left\{\dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}^+\right\}$ 分别表示由 $2, 4, 6, 8$ 这 4 个数组成的集和由 $1, \dfrac{1}{2}, \cdots, \dfrac{1}{n}, \cdots$ 这样的无限多个数组成的集, 其中 $\mathbb{Z}^+$ 是正整数集 (set of positive integers), 即 $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$.

一般来说, 若 $\pi(x)$ 是与 x 有关的命题, 则所有使这个命题成立的 x 所构成的集 A 就记为 $A = \{x \mid \pi(x)\}$. 例如, 当 $\pi(x)$ 是“数 x 的平方等于 1”这一命题时, $A = \{x \mid \pi(x)\}$ 就是 $A = \{-1, 1\}$. 又若 S 是事先给定的集, 则 $\{x \mid x \in S, \pi(x)\}$ 表示 S 中所有满足命题 $\pi(x)$ 的 x 构成的集. 例如, 当 $f(x)$ 是给定的实函数, S 是事先给定的集且 $a = \text{const}$ 时, $\{x \mid x \in S, f(x) > a\}$ 是 S 中所有满足条件 $f(x) > a$ 的 x 构成的集.

若属于集 A 的元都属于集 B, 则称 A 包含于 B 或是 B 的子集 (subset), 记 $A \subset B$, A 包含于 B 也可说成 B 包含 A, 而记 $B \supset A$; 若 $A \subset B$, $B \subset A$ 同时成立, 则称 A、B 是相等的 (equal), 记为 $A = B$.

对任意集 A, $A \supset A$ 总成立, 所以 A 是其自身的子集. 空集是任意集的子集. 两个集相等, 实际上它们是同一个集. 例如, $\{x \mid x^2 = 1\} = \{-1, 1\}$.

若 $A \subset B$, 且 $A \neq B$, 则称 A 为集 B 的真子集 (proper subset).

集作为一个数学对象, 可定义它们之间的运算.

由两个集 A, B 共有元构成的集称为 A, B 的交 (intersection), 记为 $A \cap B$ 或 AB, 即 $AB = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$. 例如, 设

$$A = \{1,2,3,4\},\ B = \{3,4,5,6\},\ C = \{6,7,8\}$$

则

$$AB = \{3,4\},\ BC = \{6\},\ AC = \varnothing$$

一般来说, 若 Λ 是集, 对每个 $\lambda \in \Lambda$ 都相应地给定了集 A_λ, 则称给定了以 Λ 为指标集 (index set) 的一族集. 这时它们的交定义为

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x \mid \text{对每个} \lambda \in \Lambda,\ \text{都有 } x \in A_\lambda\}$$

特别地, 当 $\Lambda = \{1, 2, \cdots, n\}$ 或正整数集时, 上述交就分别简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 和 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

例 1.1.1　若 $A_n = \left\{x \mid 0 \leqslant x < 1 + \dfrac{1}{n}\right\} (n \in \mathbb{Z}^+)$, 则

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \left\{x \mid 0 \leqslant x < 1 + \frac{1}{n}\right\} = A_n$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$$

例 1.1.2　若 $A_n = \left\{x \mid n \leqslant x \leqslant n + \dfrac{3}{2}\right\} (n \in \mathbb{N})$, 则 $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} A_n = \varnothing$, 其中 $\mathbb{N}$ 是自然数集 (set of natural numbers).

例 1.1.3　若 $A_n = \left\{x \mid -\dfrac{1}{n} < x < \dfrac{1}{n}\right\} (n \in \mathbb{Z}^+)$, 则

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \left\{x \mid -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}\right\} = A_n$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$$

例 1.1.4 若 $\Lambda = \mathbb{R}$, 其中 $\mathbb{R}$ 是实直线, $A_\lambda = \{x \mid \lambda \leqslant x < \infty\}$, $\lambda \in \Lambda$, 则 $\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \varnothing$.

由两个集 A, B 所有元构成的集称为 A, B 的并 (union), 记为 $A \cup B$, 即 $A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$. 例如, 设 $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{3,4,5,6\}$, 则 $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$.

同理, 以 Λ 为指标集的一族集 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 的并就定义为

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x \mid \text{存在 } \lambda \in \Lambda, \text{ 使得 } x \in A_\lambda\}$$

特别地, 若 $\Lambda = \{1, 2, \cdots, n\}$ 或正整数集, 则上述并就分别简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 和 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

例 1.1.5 若 $A_n = \{x \mid n-1 < x \leqslant n\} (n \in \mathbb{Z}^+)$, 则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid 0 < x < \infty\}$$

例 1.1.6 若 $A_n = \left\{x \mid -1 + \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1 - \frac{1}{n}\right\} (n \in \mathbb{Z}^+)$, 则

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \left\{x \mid -1 + \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1 - \frac{1}{n}\right\} = A_n = \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$$
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid -1 < x < 1\} = (-1, 1)$$

例 1.1.7 若 Λ 是大于 0 而小于 1 的全体有理数构成的集,

$$A_\lambda = \left\{x \mid \frac{\lambda}{2} < x < 2\lambda\right\}, \ \lambda \in \Lambda$$

则 $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = (0, 2)$.

集的交和并运算具有下述运算规律:

(1) (交换律, commutative law) $AB = BA$, $A \cup B = B \cup A$;

(2) (结合律, associative law) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A(BC) = (AB)C$;

(3) (分配律, distributive law) $A(B \cup C) = (B \cup C)A = (AB) \cup (AC)$;

(4) $A \cup A = A$, $AA = A$;

(5) $AB \subset A \subset A \cup B$.

进一步, 集的交和并运算还有下述性质:

(1) 若 $A_\lambda \subset B_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, 则 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \subset \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$, 特别地, 若 $A_\lambda \subset C$, $\lambda \in \Lambda$, 则 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \subset C$;

(2) 若 $A_\lambda \subset B_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, 则 $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \subset \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$, 特别地, 若 $C \subset A_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, 则 $C \subset \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$;

(3) $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cup B_\lambda) = \left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cup \left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right)$;

(4) $A\left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} (AB_\lambda)$.

证 以 (4) 为例进行证明.

先证若 $x \in A\left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right)$, 则 $x \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} (AB_\lambda)$.

取 $x \in A\left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right)$, 由交定义, 有 $x \in A$ 且 $x \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$. 再由并定义, 存在 $\lambda' \in \Lambda$, 使得 $x \in B_{\lambda'}$. 于是 $x \in AB_{\lambda'}$, 从而 $x \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} (AB_\lambda)$, 故

$$A\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (AB_\lambda) \tag{1.1}$$

下面证若 $x \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} (AB_\lambda)$, 则 $x \in A\left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right)$.

取 $x \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda B_\lambda)$, 由并定义, 存在 $\lambda' \in \Lambda$, 使得 $x \in AB_{\lambda'}$. 再由交定义, 有 $x \in A$ 且 $x \in B_{\lambda'}$. 由 $x \in B_{\lambda'}$, 有 $x \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$, 而 $x \in A$, 故又有 $x \in A\left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right)$. 因而

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} (AB_\lambda) \subset A\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) \tag{1.2}$$

最后, 由式 (1.1) 和式 (1.2), 有性质 (4) 成立. 证完.

属于集 A 而不属于集 B 的元构成的集称为 A, B 的差 (difference), 记为 $A \setminus B$, 即 $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ 但 } x \notin B\}$.

若 $A \supset B$, 则称 $A \setminus B$ 为集 B 相对集 A 的余 (complement), 记为 $\complement_A B$. 若所考虑的一切集都是某一给定集 S 的子集时, B 相对 S 的余就简称为 B 的余, 而把 $\complement_S B$ 简记为 $\complement B$ 或 B^c.

集的余运算满足下述规律:

(1) $S^c = \varnothing$, $\varnothing^c = S$;

(2) $A \cup A^c = S$, $AA^c = \varnothing$;

(3) $(A^c)^c = A$;

(4) 若 $A \supset B$, 则 $A^c \subset B^c$.

de Morgan[①] 律 (de Morgan's identity) 是集论中关于余运算的重要公式:

$$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c$$

$$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c$$

证 只证第一个等式.

先证若 $x \in \left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c$, 则 $x \in \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c$.

任取 $x \in \left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c$, 则 $x \in S$, 但 $x \notin \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$. 因而对任意 $\lambda \in \Lambda$, 都有 $x \notin A_\lambda$, 故有 $x \in S \setminus A_\lambda = A_\lambda^c$. 由于这对任意 $\lambda \in \Lambda$ 都成立, 故 $x \in \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c$. 这表明

$$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c \tag{1.3}$$

下面证若 $x \in \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c$, 则 $x \in \left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c$.

任取 $x \in \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c$, 则 $x \in S$. 但对任意 $\lambda \in \Lambda$, 有 $x \in A_\lambda^c$, 故 $x \in S$. 但 $x \notin \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, 此即 $x \in \left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c$, 所以

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c \subset \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c \tag{1.4}$$

最后由式 (1.3) 和式 (1.4), 第一个等式成立. 证完.

下面给出两个集的 Descartes[②] 乘积概念.

定义 1.1.1 两个集 A, B 的 Descartes 积 (Cartesian product) 定义为所有有序元组 (a, b), 其中 $a \in A$, $b \in B$, 记为 $A \times B$, 且 $(a, b) = (a', b')$ 蕴涵着 $a = a'$, $b = b'$.

---

① Augustus de Morgan (1806.06.27—1871.03.18), 英国人, 数理逻辑奠基人, 1849 年给出复数的几何意义.

② René Descartes (1596.03.31—1650.02.11), 法国人, 1637 年创立了解析几何, 为微积分的创立奠定了基础, 从而打开了近代数学的大门, 在科学史上具有划时代的意义, 被誉为 "近代科学的始祖".