同济大学本科教材出版基金资助

线性代数

同济大学数学系　濮燕敏　编

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

同济大学本科教材出版基金资助

线性代数

同济大学数学系　濮燕敏　编

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

为了满足社会和经济发展对应用型和职业技术型人才的需求，我们遵循“以应用为目的，以够用为原则”编写了本书．全书由浅入深，由具体到抽象，力求语言通俗、概念清楚；注意知识间的联系与来龙去脉；注重结论（如定理等）和方法的叙述及运用．本书分为矩阵及其运算、行列式、向量组的线性相关性、线性变换与相似矩阵、内积空间与二次型共5章，涵盖了线性代数的基本内容和方法．本书每一节后面有与本节内容匹配的练习，每一章后再配以相应的习题，习题的难度稍大于各节练习的难度．

本书可用为高等专科学校、高等职业学校、成人高等学校的工科类和经济管理类各专业“线性代数”课程的教材．

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 同济大学数学系．濮燕敏编．-- 上海：同济大学出版社，2016.7

ISBN 978-7-5608-6222-4

Ⅰ.①线… Ⅱ.①同…②濮… Ⅲ.①线性代数 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第037143号

线性代数

同济大学数学系　**濮燕敏　编**

责任编辑　张　莉　李小敏　**责任校对**　徐春莲　**封面设计**　陈益平

出版发行　同济大学出版社　www.tongjipress.com.cn

（地址：上海市四平路1239号　邮编：200092　电话：021-65985622）

经　销　全国各地新华书店

印　刷　江苏句容排印厂

开　本　787 mm×960 mm　1/16

印　张　9.75

字　数　195000

印　数　1—3100

版　次　2016年7月第1版　2016年7月第1次印刷

书　号　ISBN 978-7-5608-6222-4

定　价　20.00元

前　言

随着国民经济和社会的发展，我国的高等教育也取得了跨越式的发展，正在实现由精英教育向平民教育的过渡和发展. 除了全日制的高等教育，非全日制的成人教育也得到很大发展. 相比全日制高等教育，成人高等教育更贴近社会和经济发展的实际需要，更偏向应用型和职业技术型人才的培养.

随着计算机及其应用技术的飞速发展，很多实际问题通过离散化而得到定量的解决. 作为离散化和数值计算理论基础的“线性代数”，为解决实际问题提供了强有力的数学工具. 作为培养理工类和经济类等方向应用型人才的一门必修的数学基础课，“线性代数”在培养学生的空间直观想象能力以及抽象思维和逻辑推理能力等方面具有重要作用和意义. 不仅如此，它也为进一步学习后续课程和提升实践能力打下必要的数学基础.

本书按照一学期 34 学时的教学安排编写. 在编写时遵循“以应用为目的，以够用为原则”，由浅入深，由具体到抽象，力求语言通俗，概念清楚；注意知识间的联系与来龙去脉；注重结论(如定理等)和方法的叙述及运用. 对于一些定理的复杂证明，通过例题详细加以说明，而把证明省略；对有些重要定理的繁琐证明则以小字形式出现.

本书分为矩阵及其运算、行列式、向量组的线性相关性、线性变换与相似矩阵、内积空间与二次型等 5 章，涵盖了线性代数的基本内容和方法. 本书每一节后面有与本节内容匹配的练习，每一章后再配以相应的习题，习题的难度稍大于各节练习的难度.

本书可作为高等专科学校、高等职业学校、成人高等学校的工科类和经济管理类各专业“线性代数”课程的教材. 编写过程中缺点和疏漏之处难免，恳请使用本书的老师和同学批评指正.

濮燕敏于上海·同济园
2016 年 5 月

目　　录

第 1 章　矩阵及其运算

矩阵是解决线性代数问题的核心工具，是贯穿线性代数课程的一条主线，几乎所有线性代数的核心内容都可以通过矩阵这一有力工具得以解决. 另一方面，矩阵理论及其方法在计算机科学、工程计算及经济管理等诸多学科领域中有着广泛的应用. 本章通过线性方程组引入矩阵及相关概念，重点介绍矩阵的运算、矩阵分块、矩阵的逆等内容.

1.1　线性方程组与矩阵

在现实生活和工作中，很多实际问题可以归结为线性方程组的问题. 由 m 个关于 n 个未知量 x_1，x_2，…，x_n 的线性(即一次)方程构成的方程组可以表示为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \tag{1.1}$$

在一个方程中，重要的是未知量的个数以及未知量的系数和常数项，至于未知量用什么记号或者字母去表示无关紧要. 例如，方程 $ax=b$ 和 $ay=b$ 都只含一个未知量，虽然一个用 x 而另一个用 y 表示，但未知量的系数 a 和常数项 b 是相同的，它们本质上是一个方程，它们解的情况是完全相同的：当 $a\neq 0$ 时，它们都有唯一解 $\dfrac{b}{a}$；当 $a=0$，$b\neq 0$ 时，它们都没有解；当 $a=0$，$b=0$ 时，它们都有无穷多解，可以取任意数. 同样，在线性方程组中，未知量用什么字母表示仍无关紧要，重要的是方程组中未知量的个数以及未知量的系数和常数项.

把方程组(1.1)中未知量的系数按其在方程组中的相对位置排成一个 m 行、n 列的矩形数表

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

称为该线性方程组（1.1）的**系数矩阵**；把常数项构成的 m 行、1 列的矩形数表 $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ 称为方程组（1.1）的**常数项列向量**；称 m 行、$n+1$ 列的矩形数表

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

为线性方程组（1.1）的**增广矩阵**. 这样，若一个线性方程组含有 m 个方程、n 个未知量，则它唯一确定一个 $m\times(n+1)$ 矩阵，即该方程组的增广矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$. 反之，任意给定一个 $s\times(t+1)$ 矩阵

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1t} & c_1 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2t} & c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{st} & c_s \end{pmatrix},$$

容易知道它就是由 s 个方程、t 个未知量构成的线性方程组

$$\begin{cases} b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1t}x_t=c_1, \\ b_{21}x_1+b_{22}x_2+\cdots+b_{2t}x_t=c_2, \\ \qquad\qquad\vdots \\ b_{s1}x_1+b_{s2}x_2+\cdots+b_{st}x_t=b_s \end{cases}$$

的增广矩阵.

所以，线性方程组与其增广矩阵相互确定，线性方程组与矩阵之间有一个一一对应关系. 下面介绍解线性方程组的高斯消元法.

例 1.1.1 解方程组 $$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=5, \\ 2x_1+5x_2+10x_3=13, \\ x_1+3x_2+4x_3=6. \end{cases} \tag{1.4}$$

解 将方程组 (1.4) 中的第一个方程乘以 -2 加到第二个方程,第一个方程乘以 -1 加到第三个方程,消去第一个变量 x_1,得到

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=5, \\ \qquad\ \ x_2+2x_3=3, \\ \qquad\ \ x_2\qquad\ \ =1. \end{cases} \tag{1.5}$$

交换方程组 (1.5) 中第二、第三个方程的位置,得到

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=5, \\ \qquad\ \ x_2\qquad\ \ =1, \\ \qquad\ \ x_2+2x_3=3. \end{cases} \tag{1.6}$$

再将方程组 (1.6) 中的第二个方程乘以 -1 加到第三个方程,得到

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=5, \\ \qquad\ \ x_2\qquad\ \ =1, \\ \qquad\qquad\ \ 2x_3=2. \end{cases} \tag{1.7}$$

将方程组 (1.7) 中的第三个方程乘以 $\dfrac{1}{2}$,得到

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=5, \\ \qquad\ \ x_2\qquad\ \ =1, \\ \qquad\qquad\quad x_3=1. \end{cases} \tag{1.8}$$

将方程组(1.8)中的第三个方程乘以 -4 加到第一个方程,第二个方程乘以 -2 加到第一个方程,得到方程组的解

$$\begin{cases} x_1\qquad\quad =-1, \\ \quad\ x_2\qquad =1, \\ \qquad\ \ x_3=1. \end{cases} \tag{1.9}$$

在上面解方程组的过程中,通过将一个方程的倍数加到另一个方程上去;交换某两个方程的位置;用一个非零的数乘某一个方程三种基本操作得到方程组的解.因为这三种基本操作都是可逆的,可以还原回原方程组,运用这三种基本操作得到的新方程组与原方程组是等价的,它们解的情况完全一样!

利用三种基本操作,通过消元将原方程组 (1.4) 化为与之等价的方程组 (1.8),进而通过回代得到方程组的解 (1.9),它们的增广矩阵分别为

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}1&2&4&5\\2&5&10&13\\1&3&4&6\end{pmatrix},\ \widetilde{R}=\begin{pmatrix}1&2&4&5\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix},\ \widetilde{S}=\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}.$$

我们引入以下定义：

定义 1.1.1 下面三种变换称为矩阵**行的初等变换**，

(1) 交换矩阵的某两行，用 $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示交换矩阵的第 i，j 行；

(2) 用某非零的数乘矩阵的某一行，用 $c\times r_i(c\neq 0)$ 表示用非零的数 c 乘矩阵的第 i 行元素；

(3) 将矩阵的某一行的倍数加于另一行，用 $k\times r_i+r_j$ 表示将第 i 行的 k 倍加于第 j 行.

类似的，可以定义矩阵**列的初等变换**. 矩阵行的初等变换和列的初等变换统称为矩阵的**初等变换**.

例如，下例是一个第三类**行的初等变换**：

$$\begin{pmatrix}1&2&4&5\\2&5&10&13\\1&3&4&6\end{pmatrix}\xrightarrow{-2\times r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&2&4&5\\0&1&2&3\\1&3&4&6\end{pmatrix}.$$

定义 1.1.2 满足下面条件的矩阵称为**阶梯矩阵**：

(1) 每一列中首元下方的元素全为零(首元指非零行的第一个非零元素)；

(2) 每一非零行的首元位于上一行首元的右侧；

(3) 全零行的下方没有非零行.

例如，矩阵 $\widetilde{R}=\begin{pmatrix}1&2&4&5\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$ 就是阶梯矩阵.

例 1.1.2 矩阵 $\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&5&1&1\\0&0&0&6\end{pmatrix}$ 不是阶梯矩阵，因为第 1 行首元 1 下方有非零元素 5.

矩阵 $\begin{pmatrix}0&3&1&0\\1&5&1&1\\0&0&2&6\end{pmatrix}$ 也不是阶梯矩阵，因为第 2 行首元 1 不在上一行首元 3 的右侧.

矩阵 $\begin{pmatrix}0&3&1&0\\0&0&0&0\\0&0&2&6\end{pmatrix}$ 也不是阶梯矩阵，因为全零行(第 2 行)下面有非全零行

(第 3 行).

定义 1.1.3　一个阶梯阵称为**简化阶梯矩阵**,如果满足

(1) 首元全为 1;

(2) 首元所在列的其余元素全为零.

例如,矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{S}}=\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$ 就是简化阶梯矩阵.

例 1.1.3　试用矩阵行的初等变换将矩阵 $\begin{pmatrix}1&2&4&1&3\\1&3&5&2&4\\2&5&9&3&8\\4&10&20&8&18\end{pmatrix}$ 先化为阶梯矩阵,再进一步化为简化阶梯矩阵.

解

$$\begin{pmatrix}1&2&4&1&3\\1&3&5&2&4\\2&5&9&3&8\\4&10&20&8&18\end{pmatrix}\xrightarrow{-1\times r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&2&4&1&3\\0&1&1&1&1\\2&5&9&3&8\\4&10&20&8&18\end{pmatrix}\xrightarrow{-2\times r_3+r_4}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&4&1&3\\0&1&1&1&1\\2&5&9&3&8\\0&0&2&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow{-2\times r_1+r_3}\begin{pmatrix}1&2&4&1&3\\0&1&1&1&1\\0&1&1&1&2\\0&0&2&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow{-1\times r_2+r_3}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&4&1&3\\0&1&1&1&1\\0&0&0&0&1\\0&0&2&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&2&4&1&3\\0&1&1&1&1\\0&0&2&2&2\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\text{(阶梯阵)},$$

$$\begin{pmatrix}1&2&4&1&3\\0&1&1&1&1\\0&0&2&2&2\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_3}\begin{pmatrix}1&2&4&1&3\\0&1&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-3\times r_4+r_1]{-1\times r_4+r_3,\ -1\times r_4+r_2}\begin{pmatrix}1&2&4&1&0\\0&1&1&1&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{-2\times r_2+r_1}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&2&-1&0\\0&1&1&1&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[-1\times r_3+r_2]{-2\times r_3+r_1}\begin{pmatrix}1&0&0&-3&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\text{(简化阶梯矩阵)}.$$

定义 1.1.4 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可经过有限次行(列)的初等变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}$,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ **行(列)等价**;若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可经过有限次行或者列的初等变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}$,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ **等价**.

用 $\boldsymbol{A}\overset{r}{\sim}\boldsymbol{B}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 行等价,用 $\boldsymbol{A}\overset{c}{\sim}\boldsymbol{B}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 列等价,用 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价.

注 矩阵间的行(列)等价以及矩阵间的等价是一个**等价关系**,即满足

(1) 自反性,任意矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与自身等价;

(2) 对称性,若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价,则矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 等价;

(3) 传递性,若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价并且矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 等价,则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 等价.

等价关系是数学中的一个十分重要的概念.等价的对象具有某种共性,在以后的学习中可以得到具体的体现.

定理 1.1.1 任意一个 $m\times n$ 矩阵都可以经过若干次行初等变换化为(简化)阶梯阵.

证明 首先证明任意一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都可以经过若干次行初等变换化为阶梯阵.若 $\boldsymbol{A}$ 的元素全为零,或者 $m=1$,按定义矩阵 $\boldsymbol{A}$ 已经是一个阶梯阵.下面假设 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 并且 $m>1$.下面对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数 m 运用数学归纳法.由于 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$,可设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中第一个非零的列为第 j $(j\geqslant 1)$ 列.通过第一类行初等变换,即交换矩阵的两行,将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为矩阵 $\boldsymbol{B}$.

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&b_{1j}&\cdots&b_{1n}\\0&\cdots&0&b_{2j}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0&b_{mj}&\cdots&b_{mn}\end{pmatrix},$$

其中 $b_{1j}\neq 0$.再通过第二类行初等变换,即将矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 行的适当倍数加到其余各行上去,得到矩阵 $\boldsymbol{C}$.

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&c_{1j}&\cdots&c_{1n}\\0&\cdots&0&0&\cdots&c_{2n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0&0&\cdots&c_{mn}\end{pmatrix}.$$

现考虑划去矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的第 1 行元素得到矩阵 $\boldsymbol{C}_1$,则矩阵 $\boldsymbol{C}_1$ 为 $(m-1)\times n$ 矩阵.由归纳假设,矩阵 $\boldsymbol{C}_1$ 可经过行初等变换化为阶梯阵,从而矩阵 $\boldsymbol{C}$ 经过同样的行初等变换也化为阶梯矩阵,所

以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以经过若干次行初等变换化为阶梯阵. 只需用非零行首元的倒数乘以该行,则阶梯矩阵的首元全化为 1;再将非零行适当的倍数加于其余行,可将首元 1 所在列的其余元素全化为零.

上面解方程组的过程,实际上就是通过矩阵的行的初等变换将原方程组的增广矩阵先化为阶梯矩阵,然后再化为简化阶梯阵的过程.

例 1.1.4　解方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ -8x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases} \tag{1.10}$$

解　方程组 (1.10) 的增广矩阵为 $\widetilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ -8 & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, 对其实施行初等变换, 化为阶梯阵, 得

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} \xrightarrow{-3\times r_1 + r_2,\ 8\times r_1 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & 7 & 11 \\ 0 & -10 & -14 & -18 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\times r_2 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

从而原方程组等价于 $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -3, \\ 5x_2 + 7x_3 = 11, \\ 0 = 4, \end{cases}$ 最后一个方程为矛盾方程,所以原方程组无解.

例 1.1.5　解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_2 + x_3 + 5x_4 = -1, \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + 4x_4 = -1. \end{cases} \tag{1.11}$$

解　方程组 (1.11) 的增广矩阵为 $\widetilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, 对其实施行初等变换,化为阶梯阵,得

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} \xrightarrow{-2\times r_1 + r_3,\ -1\times r_1 + r_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 + r_3}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&-2&2&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&0&-2&2&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{2}\times r_3}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{-1\times r_3+r_2,\ -2\times r_3+r_1}\begin{pmatrix}1&1&0&4&-1\\0&2&0&6&-2\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0&4&-1\\0&1&0&3&-1\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{-1\times r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&3&-1\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

从而原方程组等价于

$$\begin{cases}x_1 \qquad\quad + x_4=0,\\ \qquad x_2 \quad +3x_4=-1,\\ \qquad\quad x_3-x_4=1,\\ \qquad\qquad\quad 0=0.\end{cases}$$

令 $x_4=c$，移项得原方程组的解为 $\begin{cases}x_1=-c,\\x_2=-1-3c,\\x_3=1+c,\\x_4=c,\end{cases}$ 其中 c 为任意常数.

练习 1.1

1. 试将下列矩阵化为简化阶梯矩阵：

(1) $\begin{pmatrix}3&2&1\\2&3&2\end{pmatrix}$；　　(2) $\begin{pmatrix}2&4&3&2\\3&-1&5&2\\1&3&1&2\end{pmatrix}$.

2. 解下列线性方程组：

(1) $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3-x_4=0,\\x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\2x_1+2x_2-x_3+2x_4=0;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}2x+3y+z=4,\\x-2y+4z=-5,\\4x-y+9z=-6.\end{cases}$

3. 写出增广矩阵为 $\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & 1\\ 4 & 2 & 5 & 4\\ 2 & 0 & 2 & 6\end{pmatrix}$ 的线性方程组,并求其解.

1.2　矩阵及其运算

在 1.1 节可看到,线性方程组的求解问题可以归结为将其增广矩阵化为简化阶梯阵的问题. 事实上,矩阵在经济管理、工程计算等众多方面都有广泛的应用. 本节介绍矩阵的基本运算.

定义 1.2.1　将 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$ 排成一个 m 行、n 列的矩形数表

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix},$$

称 $\boldsymbol{A}$ 为一个 $m\times n$ **矩阵**,记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$. 元素 a_{ij} 的下标 i, j 表明其在矩阵中的位置,即位于第 i 行、第 i 列.

一个 $1\times n$ 矩阵 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 也称为行矩阵,或 n 维行向量;而一个 $m\times 1$ 矩阵 $\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$ 也称为列矩阵,或 m 维列向量.

一个 $n\times n$ 矩阵,通常简称为 n 阶方阵.

若一个 $m\times n$ 矩阵的所有元素均为零,则称其为零矩阵,记为 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$,或者简记为 $\boldsymbol{O}$.

定义 1.2.2　若一个 n 阶方阵主对角线上方的元素全为零,即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix},$$

则称该矩阵为一个**下三角矩阵**.

下三角矩阵元素的特点是：当 $i<j$ 时，$a_{ij}=0$. 类似，我们有上三角矩阵的概念. 请读者自行给出其定义.

若一个 n 阶方阵既是上三角矩阵，同时也是下三角矩阵，则称其为**对角矩阵**，即对角矩阵形如 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$.

为了书写方便，有时也将对角矩阵 $\boldsymbol{D}$ 记为 $\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(d_{11}, d_{22}, \cdots, d_{nn})$. 若对角矩阵 $\boldsymbol{D}$ 对角线上的元素全相等，即 $d_{11}=d_{22}=\cdots=d_{nn}$，则称其为**数量矩阵**，或者**纯量矩阵**. 在纯量矩阵中，有一个很特殊的矩阵 $\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$，称为**单位矩阵**.

定义 1.2.3 若两个**同型**(即行数和列数都相等)的矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 中所有对应位置的元素都相等，即 $a_{ij}=b_{ij}$，其中 $i=1, 2, \cdots, m$; $j=1, 2, \cdots, n$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ **相等**，记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

定义 1.2.4 将两个同型矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 中所对应位置的元素相加而得到的矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$，其中 $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **的和**，记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

由于同型矩阵的加法归结为对应位置上元素的加法，易知矩阵的加法满足

(1) 交换律　$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

(2) 结合律　$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$;

(4) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

定义 1.2.5 用一个数 k 乘矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的所有元素得到的矩阵 $(ka_{ij})_{m\times n}$ 称为矩阵的**数乘**，记为 $k\boldsymbol{A}$ 或者 $\boldsymbol{A}k$，即 $k\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}k=(ka_{ij})_{m\times n}$.

易知，矩阵的数乘运算满足

(1) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$;

(2) $(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})=l(k\boldsymbol{A})$;

(3) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$;

(4) $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$;

(5) $0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

由此可见，矩阵的加法、矩阵的数乘满足数的加法和乘法的运算律.

定义 1.2.6　设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是一个 $n\times p$ 矩阵，定义矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的**乘积**是一个 $m\times p$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$，其中矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$ 的第 i 行，第 j 列元素 c_{ij} 是由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行元素 $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列相应元素 $b_{1j}, b_{2j}, \cdots, b_{nj}$ 乘积之和，即

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}.$$

例 1.2.1　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&3&0\\2&1&1\\-1&-2&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&-5\\2&1\\0&2\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$.

解　$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&3&0\\2&1&1\\-1&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-5\\2&1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&-2\\8&-7\\-7&3\end{pmatrix}$.

例 1.2.2　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&3\\1&3\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$.

解　$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}1&3\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&5\\-5&5\end{pmatrix}$.

注　虽然矩阵的加法和数乘满足通常数的加法和乘法的运算律，但矩阵乘法与数的乘法却有很大区别.

(1) 矩阵乘法不满足交换律. 如例 1.2.1，$\boldsymbol{AB}$ 是 3×2 矩阵，而 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 根本就不可乘，更谈不上 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$. 即使 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$ 都有意义，也未必有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，比如，若 $\boldsymbol{A}$ 是 3×2 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 2×3 矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 是 3 阶方阵，而 $\boldsymbol{BA}$ 是 2 阶方阵，它们的阶数不同，显然不会有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$. 再退一步，即使 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$ 都有意义且阶数相同，它们也未必相等，比如例 1.2.2.

(2) 两个非零矩阵的乘积可能是一个零矩阵. 比如例 1.2.2. 所以，即使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，也不能得出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 至少有一个是零矩阵.

(3) 矩阵乘法的消去律不成立！即使矩阵 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，也不能由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 得出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$. 只要取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&3\\1&3\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$ 就可得到一个反例.

尽管如此，矩阵的乘法满足下面运算律：

(1) 结合律　$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；

(2) 矩阵乘法对矩阵加法的分配律

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC},\ (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC};$$