

超级通俗 考研数学

绝密解题套路总结（数学三）

潘鑫◆著



考研数学的传言
麒麟才子百难见

超级无敌 阅读组合
(按如下顺序进行阅读)

《超级通俗 考研数学 三大攻坚战》

《超级通俗 考研数学 习题伴侣》

《超级通俗 考研数学 绝密解题套路总结》

《超级通俗 考研数学 历年真题无敌解析》

《超级通俗 考研数学 神准押题》

超级通俗 考研数学

绝密解题套路总结（数学三）

潘鑫◆著

图书在版编目 (CIP) 数据

超级通俗 考研数学·绝密解题套路总结·数学三 /
潘鑫著. —北京: 中国商业出版社, 2016. 5

ISBN 978 - 7 - 5044 - 9418 - 4

I. ①超… II. ①潘… III. ①高等数学—研究生—入
学考试—题解 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 095630 号

责任编辑: 刘毕林

中国商业出版社出版发行

010 - 63180647 www.c-cbook.com

(100053 北京广安门内报国寺 1 号)

新华书店总店北京发行所经销

北京军迪印刷有限责任公司印刷

*

787×1092 毫米 16 开 24 印张 460 千字

2016 年 5 月第 1 版 2016 年 5 月第 1 次印刷

定价: 58.00 元

* * * *

(如有印装质量问题可更换)

“超级通俗”系列丛书

出版说明

本套丛书简介

本套丛书由五部分组成，它们分别是：

1. 《超级通俗 考研数学 三大攻坚战》（包括高等数学、线性代数、概率统计共三本）。
2. 《超级通俗 考研数学 习题伴侣》（按数学一、数学二、数学三分为三本）。
3. 《超级通俗 考研数学 绝密解题套路总结》（按数学一、数学二、数学三分为三本）。
4. 《超级通俗 考研数学 历年真题无敌解析》（按数学一、数学二、数学三分为三本）。
5. 《超级通俗 考研数学 神准押题》（按数学一、数学二、数学三分为三本）。

本套丛书阅读顺序

本套丛书应按照以上从“1”到“5”的顺序进行阅读。首先，《超级通俗 考研数学 三大攻坚战》三本书中给大家讲解考研数学所要求的所有知识点；其次，《超级通俗 考研数学 习题伴侣》中给大家选取了大量习题，用以巩固“攻坚战”中学到的知识点；接着，通过《超级通俗 考研数学 绝密解题套路总结》给大家总结考试的一些固定题型（和“攻坚战”的区别就在于：攻坚战讲的是考点，而本书讲的是题型，只会考点不会题型的话那么做题速度提高不了，而只会题型不会考点的话那么知识学得并不全面）；再接着，大家就要通过《超级通俗 考研数学 历年真题无敌解析》来大量地练习考研数学真题；最后，大家通过《超级通俗 考研数学 神准押题》来检测自己的学习效果。

本套丛书定位

本套丛书的定位是：一套完全适合准备研究生入学考试的读者自学的书籍（无论读者基础如何）。本套丛书与传统教材大不相同，语言非常通俗易懂，逻辑十分严谨，所涉及的每个知识点（无论多简单的知识点）几乎都有举例，这“三斧子”使得读者完全不用担心有看不懂的地方。所以，本套丛书定位为自学用书。

本套丛书特色

1. 充满趣味

本套丛书从书名到内容处处充满着趣味性，如书中大量使用了“攻坚战”“发动进攻”等词语，使得原来枯燥的数学知识变得生动形象起来。

2. 语言非常通俗易懂

大部分考研数学类书籍，都是十分规范化的，有点儿像古代的“八股文”，读者需要

一个字一个字地去琢磨到底是什么意思。而最为高级的表达方式就是：用最能让人理解的文字，去讲解最难让人理解的知识，但不需要读者再去琢磨如此规范化的语言到底是什么意思。这正是本套丛书的最大亮点。本套丛书的所有语言，从定义、定理的解释，到例题的解析，再到习题的解析，都非常地通俗易懂，让人感觉就像是在读童话故事或者武侠小说。这样一来，读者不仅能看懂本书的所有内容，更乐于去阅读，从而使得读者不仅掌握了相应的知识，也节省了学习时间。

3. 逻辑非常清晰

本套丛书的逻辑从头到尾都是非常清晰的。具体来说，本套丛书的所有题目的解析中绝对不会出现任何一个书中没有讲到的知识点，并且几乎所有题目的每一步解答都注明了来源。另外，大家知道，做一道题可能会同时用到很多个不同章节的知识点。笔者见过的很多考研辅导书中都存在这样一种现象：讲完知识点一，然后下面有配套的例题，而此例题中不但用到了刚讲完的知识点一，而且还用到了没讲的知识点二（题中并没有注明用到了还没有讲的知识点二）。这样一来，许多读者就不明白了，思考了很长时间，以为是之前的某个知识点自己忘了，后来才知道原来用到的是后续的知识点。这样的话很浪费时间，而本套丛书对这一点高度重视，所有的习题中极少存在上述现象。

4. 例题非常丰富

本套丛书的例题非常丰富。本套丛书所涉及到的知识点（无论再简单的知识点）几乎都有配套的例题。

本套丛书读者对象

以下三类读者最适合阅读本套丛书：

1. 正在准备研究生入学考试的读者（无论读者是什么样的基础）。
2. 正在准备学校期末考试的在校大学生（无论读者是什么样的基础）。
3. 工作后需要补学或温习高等数学、线性代数、概率统计的读者（无论读者是什么样的基础）。

感谢

本套丛书能够和大家见面，是多方努力的结果。笔者做了很多努力和大量工作，参与本套丛书编写的人员还有：陈翔宇、郑祺、刘坤、王一川、王一珉、洪晓雪、李桐、和家乐、张梅艳、谢思思、潘建平、禹贞余、王剑博、赵政。

要感谢为本套丛书做出贡献的中国商业出版社的各位辛勤的工作者，没有他们的付出，就没有本套丛书的顺利出版。

另外，我还要感谢我的各位讲授考研课程的同行，他们在我写作本套丛书的过程中给了我很多的指导。

在此向所有帮助与支持我的朋友道一声：谢谢！

潘鑫

2016年1月于北京

超级无敌导读 向考研题型发起进攻（必看）



麒麟才子给大家的温馨提示：

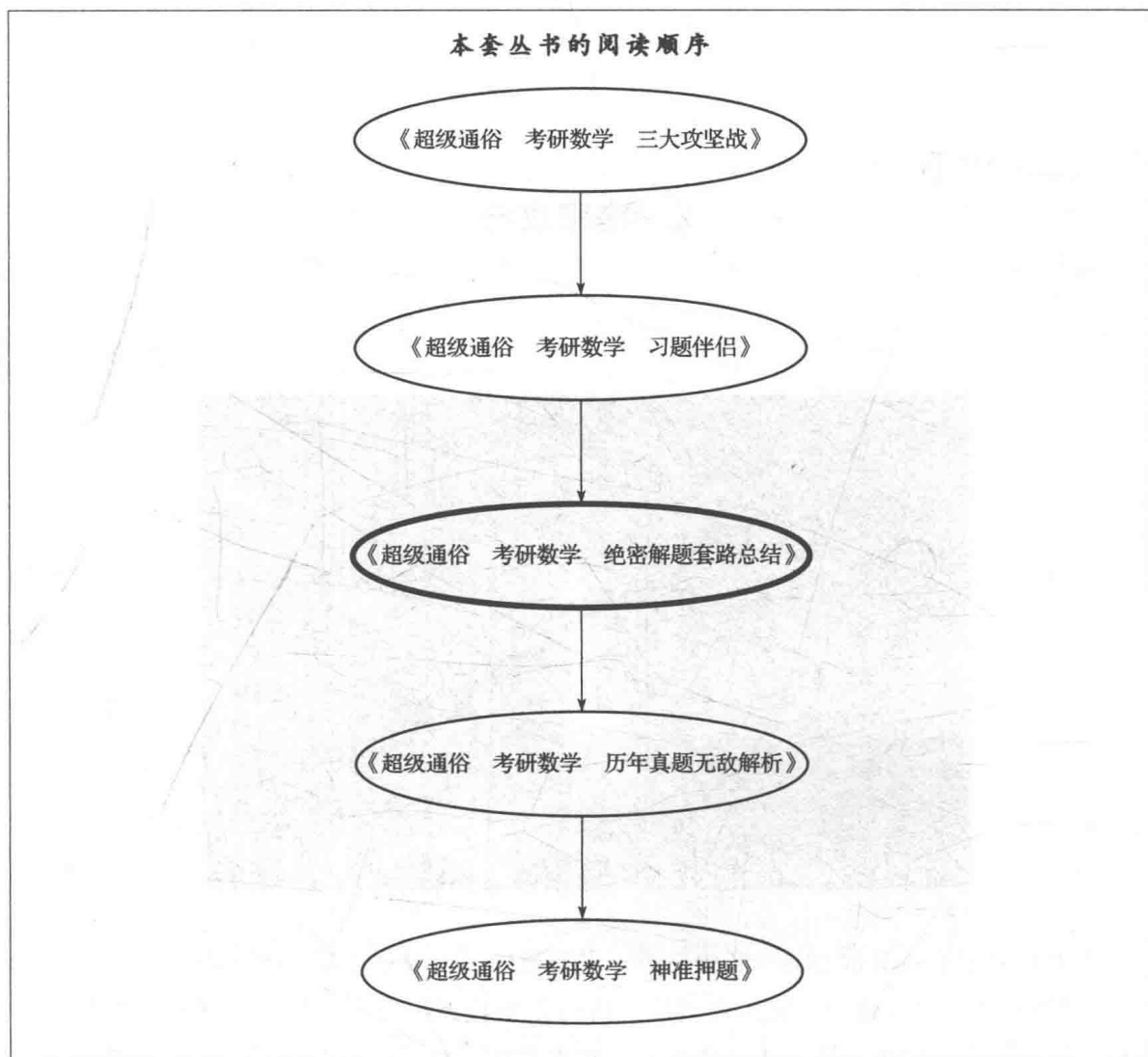
本部分是导读，虽不涉及具体的题型，但地位是相当重要的，因为本部分会告诉大家本书在丛书中的阅读顺序以及本书的使用方法。因此，为了能更有效地进行战斗，请大家一定要阅读本部分。

1 阅读顺序



本书在丛书中的阅读顺序是：在阅读完《超级通俗 考研数学 习题伴侣（数学三）》之后，在即将阅读《超级通俗 考研数学 历年真题无敌解析（数学三）》之前。

为了能够让大家对整套丛书阅读顺序更加一目了然，我画一个框图，大家就按照框图中的顺序来阅读就可以了。



以上就是本套丛书的阅读顺序，从框图中我们可以清晰地看出本书在本套丛书中的阅读时间。不要小看这个阅读顺序，大家只有按照此顺序来进行阅读，方能达到最好的学习效果。

2 绝密攻略



先来和大家说一下本书与《超级通俗 考研数学 三大攻坚战》的区别。

《超级通俗 考研数学 三大攻坚战》讲的是知识点，而本书讲的则是考研数学常考题型。如果只看《超级通俗 考研数学 三大攻坚战》而不看本书的话，做题速度或许上不来；如果只看本书而不看《超级通俗 考研数学 三大攻坚战》的话，那么又可能会导致复习得不全面。

本书为大家总结了考研数学中一些常见的题型以及对应的解题方法，并且每一种题型后面都配有考研真题供大家练习。为了达到最好的效果，本书应该这样使用：

① 大家一定要把本书中所讲的所有题型以及对应的解题方法熟练地背诵下来，就像文科一样，背诵下来。这样一来，考试时就可以直接套题型了。

② 每种题型后面所配套的考研真题大家一定得先自己练，然后再对答案。

3 战前赠言



麒麟才子给即将向考研题型发起进攻的同学们的战前赠言：

有志者，事竟成。破釜沉舟，百二秦关终属楚
苦心人，天不负。卧薪尝胆，三千越甲可吞吴

目 录

第一篇	高等数学常考题型总结	1
	题型 1. 函数极限计算题	2
	题型 2. 求函数的极值	50
	题型 3. 与微分方程有关的题	73
	题型 4. 与二重积分有关的题	93
	题型 5. 与经济学有关的题	134
	题型 6. 证明不等式	145
	题型 7. 求渐近线	159
	题型 8. 求实根个数	172
	题型 9. 已知一极限求另一极限	182
	题型 10. 基本定理证明	193
	题型 11. 求面积	196
	题型 12. 求旋转体的体积	203
第二篇	概率统计常考题型总结	232
	题型 1. 求矩估计	233
	题型 2. 求最大似然估计	238
	题型 3. 求分布律 (概率分布)	247
	题型 4. 已知分布律, 求概率	262
	题型 5. 求相关系数	264
	题型 6. 求协方差	265
	题型 7. 求数学期望	268
	题型 8. 求方差	274
	题型 9. 已知联合概率密度函数, 求: 边缘概率密度函数、 条件概率密度函数、概率	276
	题型 10. 求分布函数	303
第三篇	线性代数常考题型总结	310
	题型 1. 求解不含参数的方程组	311

题型 2. 求解含参数的方程组	325
题型 3. 已知解的类型, 求方程组中的参数	329
题型 4. 化二次型为标准形	334
题型 5. 证明标准形	340
题型 6. 已知两个矩阵相似, 求矩阵中的参数	342
题型 7. 证明两个矩阵相似	346
题型 8. 求特征值	348
题型 9. 求某矩阵	353
题型 10. 证明线性相关/线性无关	366

第一篇 高等数学常考题型总结



麒麟才子提示大家

① 大家一定要知道本书与《超级通俗 考研数学 三大攻坚战》的区别。如果大家只看《超级通俗 考研数学 三大攻坚战》而不看本书的话,那么,虽然大家考研题都会做,可是每一道题大家还需要去想到底怎么做,比较浪费时间,三个小时不一定能做完;如果大家只看本书而不看《超级通俗 考研数学 三大攻坚战》的话,那么我告诉大家,考研数学真题中一定有题不属于本书所总结的题型,那你们不就不会做了嘛;如果大家既看了《超级通俗 考研数学 三大攻坚战》又看了本书,那么,在考试中,大家就可以先把属于本书所总结的题型的题给快速做完,然后再利用《超级通俗 考研数学 三大攻坚战》中的知识去做剩下的题,一定能得到特别高的分数,而且时间也完全够用。

② 自新一届命题组命题以来(2009 年至今),考研数学高等数学部分一共有 12 种常考题型,本书已经把解题方法给大家总结得非常详细了,大家背下来就可以了。

题型 1. 函数极限计算题

“函数极限计算题”几乎每年都会考一道或二道,属于“非常常考的题型”。

一旦考研数学中出了“函数极限计算题”,那么该题型所占的分值要么是 4 分(只出一道填空题),要么是 10 分(只出一道大题),要么是 14 分(出了一道填空题和一道大题)。

而且我再告诉大家,“函数极限计算题”一旦出了,要么就是第 9 题(填空题),要么就是第 15 题(大题),要么就是第 9 题和第 15 题(填空题和大题)。

自从新一届命题组开始命题以来(2009 年至今),“函数极限计算题”就只出过以下这两大类。

第一大类: $\frac{0}{0}$ 型、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型。

第二大类: 1^∞ 型、 0^0 型、 ∞^0 型。

我们现在来看一些题。

大家注意:本书中的每一道题皆为考研数学真题。

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x^4}}$ 。

解:本题是 2016 年的第 15 题,分值为 10 分。

我们现在并不真正地去这道题,因为我还没有给大家讲解题方法,我们现在只是来判断一下本题属于不属于“题型 1. 函数极限计算题”,如果属于的话,我们再判断一下本题属于题型 1 的哪一大类。

很明显,第一眼看上去,就知道本题属于“题型 1. 函数极限计算题”。

接下来我们再判断一下本题属于题型 1 的哪一大类。

我们需要分别计算一下 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4}$ 。

先来计算 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)$ 。

通过计算可知 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x) = 1$ 。

再来计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4}$ 。

通过计算可知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} = \infty$ 。

好,截止到目前,我们已经计算出了 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x) = 1$ 和 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} = \infty$, 所以本题属于题型 1 的第二大类(即“ 1^∞ 型、 0^0 型、 ∞^0 型”)。再具体地说,本题属于题型 1 的第二大类中的“ 1^∞ 型”。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

解：本题是2015年的填空题(第9题)，分值为4分。

我们现在并不真正地去做法这道题，因为我还没有给大家讲解题方法，我们现在只是来判断一下本题属于不属于“题型1. 函数极限计算题”，如果属于的话，我们再判断一下本题属于题型1的哪一大类。

很明显，第一眼看上去，就知道本题属于“题型1. 函数极限计算题”。

接下来我们再判断一下本题属于题型1的哪一大类。

我们需要分别计算一下 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2$ 和 $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \cos x$ 。

先来计算 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2$ 。

通过计算可知 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ 。

再来计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \cos x$ 。

通过计算可知 $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \cos x = 0$ 。

好，截止到目前，我们已经计算出了 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ 和 $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \cos x = 0$ ，所以本题属于题型1的第一大类(即“ $\frac{0}{0}$ 型”、“ $\frac{\infty}{\infty}$ 型”)。再具体地说，本题属于题型1的第一大类中的“ $\frac{0}{0}$ 型”。

$$\text{求极限 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}.$$

解：本题是2014年的大题(第15题)，分值为10分。

我们现在并不真正地去做法这道题，因为我还没有给大家讲解题方法，我们现在只是来判断一下本题属于不属于“题型1. 函数极限计算题”，如果属于的话，我们再判断一下本题属于题型1的哪一大类。

很明显，第一眼看上去，就知道本题属于“题型1. 函数极限计算题”。

接下来我们再判断一下本题属于题型1的哪一大类。

我们需要分别计算一下 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ 和 $\lim_{x \rightarrow 0} \int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt$ 。

先来计算 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ 。

通过计算可知 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0$ 。

再来计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt$ 。

$\lim_{x \rightarrow 0} \int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt$ 虽然也可以计算出来(先算积分, 然后算极限就可以了, 最终的计算结果得 0), 但是它会非常难算, 有没有什么更好的办法呢? 有!

$\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt$ 是一个变上限积分, 大家记住, 考研中一旦出现变上限积分, 考的一定是变上限积分求导。既然这样, 我们立刻就可以知道 $\lim_{x \rightarrow 0} \int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt = 0$ (因为只有 $\lim_{x \rightarrow 0} \int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt = 0$, 本题才属于“ $\frac{0}{0}$ ”型, 才可以用洛必达法则, 才会将 $\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt$ 求导)。所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt = 0$ 。

好, 截止到目前, 我们已经计算出了 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0$ 和 $\lim_{x \rightarrow 0} \int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt = 0$, 所以本题属于题型 1 的第一大类(即“ $\frac{0}{0}$ ”型、“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型)。再具体地说, 本题属于题型 1 的第一大类中的“ $\frac{0}{0}$ ”型。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[2 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}。$$

解: 本题是 2013 年的填空题(第 9 题), 分值为 4 分。

我们现在并不真正地去做题, 因为我还没有给大家讲解题方法, 我们现在只是来判断一下本题属于不属于“题型 1. 函数极限计算题”, 如果属于的话, 我们再判断一下本题属于题型 1 的哪一大类。

很明显, 第一眼看上去, 就知道本题属于“题型 1. 函数极限计算题”。

接下来我们再判断一下本题属于题型 1 的哪一大类。

我们需要分别计算一下 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[2 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right]$ 和 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ 。

先来计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[2 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right]$ 。

通过计算可知 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[2 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right] = 1$ 。

再来计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ 。

通过计算可知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ 。

好,截止到目前,我们已经计算出了 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[2 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right] = 1$ 和 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$, 所以本题属于题型 1 的第二大类(即“ 1^∞ 型、 0^0 型、 ∞^0 型”)。再具体地说, 本题属于题型 1 的第二大类中的“ 1^∞ 型”。

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\frac{1}{\cos x - \sin x}} = \underline{\hspace{2cm}}。$$

解: 本题是 2012 年的填空题(第 9 题), 分值为 4 分。

我们现在并不真正地去这道题, 因为我还没有给大家讲解题方法, 我们现在只是来判断一下本题属于不属于“题型 1. 函数极限计算题”, 如果属于的话, 我们再判断一下本题属于题型 1 的哪一大类。

很明显, 第一眼看上去, 就知道本题属于“题型 1. 函数极限计算题”。

接下来我们再判断一下本题属于题型 1 的哪一大类。

我们需要分别计算一下 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan x$ 和 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x - \sin x}$ 。

先来计算 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan x$ 。

通过计算可知 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan x = 1$ 。

再来计算 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x - \sin x}$ 。

通过计算可知 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x - \sin x} = \infty$ 。

好,截止到目前,我们已经计算出了 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan x = 1$ 和 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x - \sin x} = \infty$, 所以本题属于题型 1 的第二大类(即“ 1^∞ 型、 0^0 型、 ∞^0 型”)。再具体地说, 本题属于题型 1 的第二大类中的“ 1^∞ 型”。

$$\text{求极限 } \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1+x)}{x} \right]^{\frac{1}{e^x - 1}}。$$

解: 本题是 2011 年的大题(第 15 题), 分值为 10 分。

我们现在并不真正地去这道题, 因为我还没有给大家讲解题方法, 我们现在只是来判断一下本题属于不属于“题型 1. 函数极限计算题”, 如果属于的话, 我们再判断一下本题属于题型 1 的哪一大类。