

图像处理宝典

图像去噪 复原方法研究

Research on
Image Denoising and Restoration

王小玉◎著



中国工信出版集团



电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
<http://www.phei.com.cn>

图像去噪复原方法研究

王小玉 著

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 · BEIJING

内 容 简 介

本书是作者在多年进行图像去噪图像复原研究的基础上撰写而成的,系统地论述和分析了图像去噪与图像复原的相关技术和理论。

全书共 11 章,主要阐述了小波分析和脊波变换、小波阈值去噪、基于脊波变换和图像融合的去噪、基于偏微分方程的图像去噪、加权型曲率保持 PDE 图像滤波方法、结构保持的非局部图像变分模型与算法、超分辨率图像复原相关理论、基于内容的字典学习的超分辨率图像复原、基于内容的双字典学习的图像超分辨率复原、超低分辨率人脸图像复原研究等。

本书主要供计算机科学与技术、信息与通信工程、控制科学与工程等学科领域的高年级本科生、研究生、研究人员及工程技术人员参考使用。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

图像去噪复原方法研究 / 王小玉著. —北京:电子工业出版社, 2017.3
ISBN 978-7-121-30068-4

I. ①图… II. ①王… III. ①数字图象处理 IV. ①TN911.73

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 243667 号

责任编辑:秦绪军

特约编辑:刘广钦 刘红涛

印 刷:北京季蜂印刷有限公司

装 订:北京季蜂印刷有限公司

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱

邮编:100036

开 本:720×1000 1/16 印张:11.75 字数:206 千字

版 次:2017 年 3 月第 1 版

印 次:2017 年 3 月第 1 次印刷

定 价:49.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010) 88254888, 88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式:(010) 88254750。

前 言

随着多媒体技术和网络技术的飞速发展，在人们的工作、学习和生活中，图像信息越来越重要。但是，图像在获取、存储和传输等过程的各个环节，会受到技术上的限制、天气因素及一些其他因素的影响，导致最终获取的图像不可避免地存在各种图像质量下降问题，表现为图像模糊、失真、有噪声等。而我们需要的是清晰的、高分辨率的图像，因此，对降质的图像进行去噪复原在实际应用和生活中具有非常重要的意义。

图像去噪方法很多，本书主要阐述的是小波阈值去噪和基于偏微分方程的图像去噪方法。首先，本书以传统的软硬阈值去噪存在的缺点为基础，从以下 4 个方面进行阐述：改进传统的小波去噪函数；改进传统的统一阈值；利用基于小波变换的阈值去噪函数的改进型与脊波变换去噪；利用图像融合的方法将改进小波阈值函数的去噪方法和基于脊波变换的去噪方法获得的图像融合。一个好的去噪方法应该既能够有效地消除图像中的噪声，又能够很好地保留图像中的边缘细节结构，而传统的去噪方法显得有些力不从心。基于偏微分方程的图像去噪方法作为一种有效的图像去噪方法，能够有效地平衡去除噪声和保持图像结构信息方面之间的矛盾，使去噪图像能够得到很好的视觉效果，受到了学者们的广泛研究。其次，本书阐述了将偏微分方程应用于图像中加性噪声的去除。详细分析了张量驱动型曲率保持 PDE 滤波方法，该方法可以做进一步的改进来提高图像去噪效果，对此进行了相关的分析和研究。非局部均值滤波是近年提出的一种有效的去噪方法，受到了广泛研究，将非局部滤波的思想应用于基于 PDE 的图像去噪方法中，结合变分法和非局部均值滤波法来对图像滤波，获得了更好的去噪结果。最后，本书阐述了超分辨率图像复原方法。阐述了一种基于内容的双字典学习及稀疏表示的超分辨率图像复原方法。把图像的高频



成分分解为主要高频部分和冗余高频部分，分别有步骤地进行训练和构建稀疏字典，将待复原的图像进行双层次的超分辨率图像复原。针对超低分辨率人脸图像复原问题，本书阐述了一种基于 DCT 的改进方法，实验结果表明改进的 DCT 方法可以在超低分辨率的人脸图像复原中获得比较好的表现。

在本书的编写过程中，参考了大量的国内外相关技术资料、书籍、学术期刊和学术论文，吸取了许多专家和同仁的宝贵经验，在此向他们深表谢意！实验用图来自 MATLAB 自带图及中科院的人脸库，在此表示感谢！感谢黑龙江省教育厅科学研究项目（编号：12541177）的资助！感谢姜峰、董薇、顾丽、冉起、张亚洲、欧晓旭、郭晓中、王璐、孟晔在资料整理过程中所付出的辛勤工作！特别感谢电子工业出版社的编辑为本书出版做的大量细致的工作！感谢哈尔滨理工大学的支持！

本书涉及内容广泛，由于作者学识所限，书中难免存在疏漏和不足之处，恳请广大读者批评指正。

作 者

2016 年

目 录

■ 第 1 章 绪论	1
1.1 研究目的和意义	1
1.2 图像去噪的研究概况与展望	3
1.2.1 国外研究概况	4
1.2.2 国内研究概况	8
1.2.3 存在的问题及发展展望	11
1.3 图像复原的研究概况和展望	13
1.3.1 国外研究概况	13
1.3.2 国内研究概况	17
1.3.3 存在的问题及发展展望	21
1.4 图像质量评价	22
1.4.1 主观质量评价法	24
1.4.2 客观质量评价法	25
■ 第 2 章 小波分析和脊波变换	29
2.1 小波分析基本理论	29
2.1.1 傅里叶变换到小波分析	29
2.1.2 连续小波变换	32
2.1.3 离散小波变换	33
2.1.4 多分辨分析与 Mallet 算法	34
2.2 脊波变换基本理论	36
2.2.1 脊波变换	36



2.2.2 离散脊波变换.....	38
2.3 本章小结.....	40
■ 第3章 小波阈值去噪.....	41
3.1 小波阈值去噪原理.....	41
3.2 小波阈值去噪函数.....	42
3.3 改进的小波阈值去噪函数.....	44
3.4 改进的统一阈值.....	45
3.5 仿真实验与结果.....	46
3.5.1 仿真实验过程.....	46
3.5.2 实验结果.....	47
3.6 本章小结.....	50
■ 第4章 基于脊波变换和图像融合的去噪.....	51
4.1 脊波变换与改进的小波阈值去噪.....	51
4.1.1 脊波变换去噪过程.....	52
4.1.2 脊波与小波融合去噪过程.....	52
4.2 仿真实验与结果.....	53
4.2.1 仿真实验.....	53
4.2.2 实验结果.....	54
4.3 图像融合的方法.....	58
4.4 本章小结.....	59
■ 第5章 基于偏微分方程的图像去噪.....	61
5.1 基于偏微分方程的去噪方法.....	61
5.2 变分法与PDE的相关理论.....	63
5.3 基于偏微分方程的图像去噪模型.....	66
5.3.1 各向同性PDE扩散模型.....	66
5.3.2 线性扩散PDE模型.....	68
5.3.3 非线性扩散PDE模型.....	70

5.4 本章小结	72
■ 第 6 章 加权型曲率保持 PDE 图像滤波方法	73
6.1 结构张量	74
6.1.1 线性结构张量	74
6.1.2 非线性结构张量	76
6.2 线积分卷积	77
6.3 基于加权型曲率保持 PDE 图像去噪	79
6.3.1 模型的提出	79
6.3.2 扩散张量的构造	80
6.3.3 权重函数的构造	81
6.3.4 实验验证和分析	83
6.4 本章小结	85
■ 第 7 章 结构保持的非局部图像变分模型与算法	87
7.1 非局部平均滤波方法	88
7.1.1 非局部均值滤波法	89
7.1.2 非局部算子	91
7.2 非局部总广义变分模型及数值解法	92
7.3 基于 Patch 相似性保真的图像变分模型	94
7.3.1 模型的提出	94
7.3.2 实验验证及分析	96
7.4 基于 Patch 相似性的 WCPDE 滤波方法	97
7.4.1 模型的提出	97
7.4.2 实验验证及分析	99
7.5 本章小结	100
■ 第 8 章 超分辨率图像复原相关理论	101
8.1 超分辨率图像复原的模型	101
8.2 传统超分辨率复原算法概述	104



8.2.1	基于插值的算法	104
8.2.2	基于重建的算法	105
8.2.3	基于学习的算法	107
8.3	稀疏表示理论	110
8.3.1	稀疏表示的数学模型	110
8.3.2	常用算法	112
8.3.3	相关定理	115
8.4	本章小结	117
■ 第 9 章	基于内容的字典学习的超分辨率图像复原	118
9.1	字典学习	118
9.1.1	数学模型	119
9.1.2	常用算法	120
9.2	基于内容的字典学习和稀疏表示的超分辨率图像复原	122
9.2.1	聚类分析算法概述	122
9.2.2	K-means 算法	123
9.2.3	图像重构	124
9.3	仿真实验与分析	128
9.4	本章小结	133
■ 第 10 章	基于内容的双字典学习的图像超分辨率复原	134
10.1	双字典的构建	135
10.2	图像的复原操作	138
10.3	仿真实验与分析	140
10.4	本章小结	144
■ 第 11 章	超低分辨率人脸图像复原研究	146
11.1	DCT 变换方法	146
11.1.1	DCT 变换的压缩数据原理	147
11.1.2	DCT 变换系数	147

11.2	基于 DCT 变换的图像复原	148
11.3	基于 DCT 变换的人脸复原算法改进	152
11.4	算法在超低分辨率人脸复原中的实现	154
11.5	仿真实验与分析	155
11.6	本章小结	157
参考文献		158

第 1 章

绪 论

1.1 研究目的和意义

当今是一个数字化的时代，各种信息充斥于我们的日常生活当中。图像信息由于具有一系列的优点，诸如信息量大、传输速度快、作用距离远等，所以，成为人类获取信息的重要来源。依据统计表明，人类从外界获得的信息中大约有 75%是来自图像信息的^[1]，可见图像已经成为人们认识客观世界的主要信息来源，伴随着科技的发展和人们生活水平的提高，对于图像质量的要求也越来越高。

在实际应用中，现有的成像设备都存在各种各样的局限性，尤其在图像的获取过程中很容易受到复杂工作环境和条件的干扰和影响，取得的图像往往包含噪声或者产生了一些退化和降质，使图像从主观视觉上看起来模糊甚至变形。尽管人们可以通过改良成像设备的传感器水平来获取高质量图像，但是硬件设备技术的发展终究还是存在着局限性，此外，提高硬件水平的成本十分昂贵，无法做到普及应用。通过改善硬件设备作为提高图像质量的方法存在着较大的局限，这就使得人们必须从改进软件或提高算法的效率方面着手，以此来提高图像的质量，以及对图像细节方面的处理，相应的图像去噪复原方法的研究正迎合了这种时代的需求。

作为图像处理的热点研究领域，图像去噪复原技术起到了十分重要的作用，



已经在诸如遥感图像处理、医学图像处理、公共安全、军事科学及天文观测等领域有着广泛的应用。对它的研究可以说具有十分重要的意义。下面介绍一些典型的应用领域。

1. 遥感领域

卫星周期性地沿其轨道运行的时候，只有在最靠近地点时，获得的图像分辨率才最高。卫星都有自己的高度，并且由于天气原因和大气污染的干扰，拍摄到的图像大多是不能满足应用要求的。但是这些图像在追踪地球资源方面非常有用，诸如洪水和火灾控制、农作物预测、城市扩张、地形映射、天气状况等方面的应用。此时，可以通过图像去噪复原技术，提高光学遥感图像的分辨率和清晰度。

2. 医学图像处理

图像去噪复原技术陆续应用于医学成像系统（如 CT、MRI、计算机放射摄影等）。通过对成像设备得到的图像，诸如轴向 X 射线断层摄影的图像、超声扫描获得的图像、血管荧光胶片记录等，进行图像去噪复原处理，能够获得更加清晰的医学造影图像，从而能够帮助医生快速准确地确定病人的病情，降低医生误判的可能性，大大地提高了诊断水平。

3. 公共安全

现在很多公共场合都安装了视频监控设备，如高速公路、学校、银行等，但是以现有的监控设施的性能和技术手段，能够采集到的图像信息大多情况下是含有噪声的、不够清晰的，依据它们是无法用来识别异常事件的。这时就可以使用图像去噪复原技术对降质图像进行去噪复原，从而增强图像质量，帮助工作人员对异常事件进行相应的处理。

4. 军事科学

应用于侦查的军事设施缺点较多，如造价昂贵、体积大、重量大等，因此，在军事侦察、夜视、战场监控等场景中获取满足要求的高分辨率图像比较困难，但采用图像去噪复原技术后可以利用低分辨率成像系统拍摄，再进行超分辨率处理从而得到满意的结果，这样可以在现代化战争中降低成本并且获取准确的情报。



5. 天文观测

在天文观测中, 图像采集系统由于受大气随机介质的影响, 采集得到的图像严重退化, 这对后续的图像信息的处理带来了很大的困难。在太空的图像采集系统中, 由于宇宙飞船的速度很快, 相机快门速度比宇宙飞船的速度慢很多, 这也会使得到的天文图像质量下降, 因此, 只有对得到的图像进行图像去噪复原使其恢复真实场景, 科研工作者才能从去噪复原图像中获得更多有价值的信息。

在其他领域, 随着宽带通信技术的发展, 数字电视、视频通话、视频会议等高科技产品大大方便了人们的生活, 而图像质量却是影响这些技术用户体验的最重要因素。可见, 图像去噪复原在日常生活和科研工作中都有着广泛的实用性, 它的应用前景十分广泛。正因如此, 近年来, 图像去噪复原技术已经逐渐成为计算机视觉领域、图像处理领域中相当活跃的研究课题之一。

1.2 图像去噪的研究概况与展望

图像去噪技术作为图像处理的重要步骤, 是随着图像处理技术和数学理论的发展而发展的。图像去噪的算法也是层出不穷, 主要可以分为两大类: 空域中的去噪算法和频域中的去噪算法, 如图 1-1 所示。

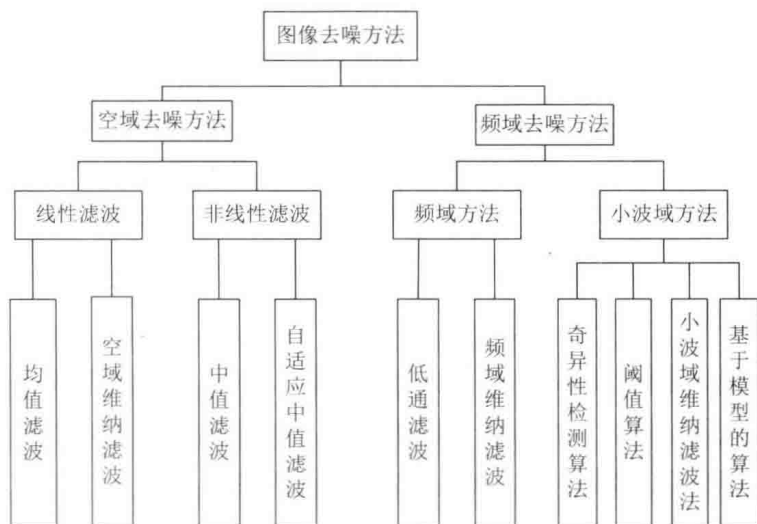


图 1-1 图像去噪方法分类



1.2.1 国外研究概况

从 20 世纪开始,学者们就进行图像去噪方法的研究,关于该领域研究的中外文献有许多。针对图像的像素点直接利用去噪方法进行去噪就是空域算法,该方法主要是对一幅图像中的每个像素的灰度值进行处理。经典的空域算法主要有均值滤波法^[2]、中值滤波法^[3, 4]与自适应中值滤波法^[5]。就一般情况而言,一幅图像中的突出、尖锐部分多是由噪声引起的,然而其中有一部分可能是由于其他原因引起的,如果再用上述方法进行去噪可能会使得图像的原始信息受到损失,从而造成图像模糊现象。因此,实际的图像去噪应用需要改进这方面的不足。

1971 年, Turkey 提出了中值滤波的思想。随后,在图像去噪领域,中值滤波法得到大范围的应用,并且由该方法去噪获得的图像效果很好。利用中值滤波法对图像进行去噪,当噪声表现为椒盐噪声时,该方法对这种噪声的处理可以获得不错的效果;由于这种方法是一种非线性的滤波算法,所以,该方法去噪时难免局限于对单个像素的去噪处理。中值滤波器法是以中值滤波理论为基础的去噪方法,同样,该方法也存在局限于对单个像素点进行处理的缺点。但是该去噪方法对于图像去噪研究仍然会有启发。均值滤波去噪算法和中值滤波去噪算法在直观性、易于理解和操作性方面比较好。这两种去噪算法的思想可以在去噪研究中得到借鉴和创新。自适应中值滤波法通过判断图像像素点,从而将图像的像素点分成两类:噪声点和图像信号点。图像去噪时,在保持图像原始像素值不变,进而在去除噪声的情况下,尽量保护图像的原始信息。然而,该算法同样也存在缺点:当滤波器的窗口中噪声像素点的个数大于或等于该窗口内像素总个数的一半时^[6],该方法无法获得良好的去噪效果。为了解决该方法失效问题,可以适当增加窗口的尺寸。虽然该算法存在上述缺点,但是在图像去噪方面仍然提供了有效的借鉴。

频域中的去噪算法是从傅里叶变换^[7]发展而来的。频域去噪算法就是将含噪图像由时域变换到频域,然后在频域内通过具体的算法将噪声去除,最后把去噪之后的频域图像变换到时域,最后将图像噪声去除。

频域算法中常用的算法有维纳滤波器法^[8]、卡尔曼滤波器法^[9]。1942 年,在



以最小均方差为准则,以噪声信号与原始图像信号之间均方差最小为目的的前提条件下,N.Wiener 设计了维纳滤波器。较之均值滤波法、中值滤波法,维纳滤波器在抑制高斯噪声、乘性噪声方面表现良好。但是维纳滤波器法要求图像信号和噪声信号是平稳随机过程且频谱特性是已知的,在实际应用中受到噪声干扰的图像的特性是不可预知的,在这种情况下,维纳滤波器法不可能达到最好的效果。要想使得维纳滤波器法达到理想效果,该算法需要在这方面做出改进。维纳滤波器是以最小均方差为准则进行去噪的,这种思想可以与其他去噪算法结合达到创新的目的,从而获得更好的去噪效果。1960年,卡尔曼等提出了适用于多维随机过程和非平稳随机过程的使用状态空间法来描述系统的方法,这种方法被称为使用递推形算法的卡尔曼滤波法。这种方法因设计简单、数据存储量小,在图像处理领域得到高度关注。另外,对于平稳过程和非平稳过程,卡尔曼滤波器均表现出良好的适应性。但是,卡尔曼滤波器也有它的不足,那就是卡尔曼滤波对于无限过去数据的需求。在图像去噪领域,卡尔曼滤波器仍然是应用广泛、效果良好的有效工具。

1822年,非周期信号的分解思想由傅里叶提出。自此之后,傅里叶变换成为各种信号处理领域的有效方法。随着信号分析研究的不断深入,傅里叶变换不再能满足要求。傅里叶变换是完全的频域分析工具,对于时域信息和频域信息不能做到完美的结合。也就是说,傅里叶变换无法把时域领域内的时点信息对应到频域领域内。为了解决傅里叶变换存在的问题,1946年,Gabor 提出了 Gabor 变换,进一步将傅里叶变换改进为短时傅里叶变换。该变换的思想就是:在信号上加一个窗,信号的傅里叶变换主要集中在窗内进行,这样可以得出信号的局部特性。Gabor 变换也有缺点,那就是该变换的窗口面积和形态无法与时间和频率存在相关性并且保持稳定不变。这个缺点使其对频率较多的并且非平稳的信号的分析是不利的,此时小波变换可以比较好地解决这个问题^[10]。1984年,当研究地震波局部时频特性时,法国的地质物理学家 Morlet 第一次把小波分析的概念应用到了信号的研究当中,Morlet 的研究方法对数值分析领域也十分有效。在此基础上,20世纪80年代末到90年代初,小波分析的理论基础由 Meyer、Grossman、Coifman 和 Daubechies 等人建立。在小波分析的研究中, Daubechies 基对于小波变换的研究起到了里程碑式的作用。Daubechies 基或者称



为具有紧支光滑正交小波基是由比利时数学家 I. Daubechies 于 1988 年提出的。I. Daubechies 撰写的《小波十讲》^[11]在小波分析领域更是具有里程碑意义。随后,在综合了 Meyer、Stromberg、Lemarie、Battle 等人完善的小波分析相关方面的理论, Mallat 对小波函数进行改进并在小波分解与小波逆变换中加入了多分辨的概念,把小波相关理论与信号的变换与逆变换结合起来,并在图像的分解与重构方面应用,这就是著名的 Mallat 算法。Mallat 算法由于在图像分解与重构方面表现良好,因此,在图像信号分析方面得到了普遍的应用。

将图像中噪声去除的主要功能就是将原始的图像从含噪图像中分离出来。小波变换由于其在时频分析方面的优势,立刻吸引了图像去噪领域的注意力。现在,小波变换在图像的噪声去除中得到较多的应用。因为小波变换在图像处理方面有着诸多优点,如经过该变换去噪的图像视觉效果良好,去噪过程简单,该方法已经成为图像去噪中常用的方法^[12]。目前,以小波变换为基础的常用图像去噪方法主要有小波阈值去噪法、模极大值去噪法和空域相关去噪法^[13]。

1989 年, Mallat 提出了将小波变换的模极大值算法用于图像去噪。该算法的主要内容如下:在尺度不同的条件下,图像信号和噪声信号在模极大值方面的特性存在不同,可以根据这一特性,将图像中由噪声变换而来的小波系数去除,再利用去除之后的小波系数重构图像,从而可以将图像中存在的噪声去除^[14,15]。对该算法而言,最大的困难是对搜索模极大值范围的确定,若搜索的区域过大,那么可以选择的传播点过多,此时可能会包含噪声的模极大值;相反,如果搜索区域的范围过小,那么可能使得由噪声引起的模极大值点的丢失^[16]。以尺度相关性为基础的图像去噪算法的去噪思想通过计算图像相邻尺度间的相关性的大小,利用噪声和图像相关性的不同将噪声信息去除,最后恢复图像,进而将图像中存在的噪声剔除^[17]。然而,该算法无法实现对图像边缘等具有“线奇异”特征函数的最优逼近^[18]。1992 年,小波阈值收缩方法由 Donoho 和 Johnstone 发现,利用该方法进行去噪可以使得图像拥有良好的去噪效果,而且通过证明发现该方法在最小均方差准则下可以达到最优^[19]。但是该算法中的硬阈值去噪函数由于自身不连续的缺点,容易造成经过去噪处理的图像出现伪吉布斯现象;该算法中的软阈值去噪函数则会造成经过去噪处理的图像出现边缘模糊的现象。1995 年, Donoho 又给出了小波阈值去噪函数阈值的统一公式^[20]。该阈值计



算公式对各层采用的阈值是相同的,这样可能会出现对原始图像小波系数“过扼杀”的现象。同样在1995年,为了克服小波硬阈值函数去噪的缺点,Coifman和Donoho提出了平移不变量小波阈值函数^[21],但是该算法计算量大^[22]。1997年,Jansen利用广义交叉验证法来计算小波去噪函数的阈值大小,以获得的阈值为基础来判断图像中的信息和噪声,进而进行取舍,使得图像获得良好的去噪效果^[23]。虽然这个小波阈值计算公式可以改善峰值信噪比,但是不能有效地维持细节^[24]。1998年,Downie提出多小波阈值去噪公式^[25]。但是多小波阈值技术去噪仍然存在着经过其去噪处理的图像边缘模糊的缺点^[26]。2000年,根据每幅图像的不同特点选定噪声阈值,Grace提出了自适应小波阈值算法^[27,28]。通过该方法去噪获得的图像优于传统算法,但是该算法计算过程复杂。2002年,针对Donoho的阈值单一并且不能随着图像分解尺度自适应变化的特点,Lakhwinder等人提出了NormalShrink阈值法^[29]。2007年,Luisier提出了基于尺度间正交小波阈值的图像去噪算法^[30]。2009年,Yu Hancheng等人提出了在小波域利用双边滤波器去噪方法^[31],该方法通过将空域和时域相结合进行去噪,使得去噪之后的图像获得了不错的效果。但是该方法仍然具有传统时域去噪的缺点。2014年,Mohammed Kadiri等提出了基于四元小波变换的图像去噪方法^[32],利用该方法去噪之后,图像的边缘可以得到比较好的保护,而且图像也比较平滑,但是作者并没有提及该方法的计算过程的复杂性。2015年,Hari Om提出了基于邻域小波系数的图像去噪方法^[33],该方法通过将计算邻域小波系数的特征来区分噪声和图像信息,利用该方法可以保留更多的原始图像信息,但该方法会引入过多的噪声。

小波变换对于点奇异性的搜寻能力比较强,但是对于线奇异性的搜寻能力则不然。脊波变换是在小波变换的基础上提出的,脊波变换对点奇异性和线奇异性的搜寻能力则相反,对线奇异性搜索表现出良好的能力,对于点奇异性的搜索能力则相反。可以认为,脊波变换是对小波变换的补充。1998年,Emmanuel J.Candes博士在他的博士论文^[34]和研究性论文^[35]中提出了脊波变换的概念。小波变换对点奇异性的搜寻能力比较强,但是对线奇异性的搜寻能力则不然。脊波变换是在小波变换的基础上提出的,脊波变换对点奇异性和线奇异性的搜寻能力则相反,对线奇异性搜索表现出良好的能力,对点奇异性的搜索能力则相