

美国高校入学考试指导丛书

SAT 教父全新力作

改革版

MATHEMATICS WORKBOOK

SAT 数学

张一冰 著



上海译文出版社



美国高校入学考试数学 workbook

SAT 教父全新力作

改革版

MATHEMATICS WORKBOOK

SAT

数学

张一冰 著



上海译文出版社

图书在版编目(CIP)数据

SAT数学 / 张一冰著. —上海: 上海译文出版社, 2016. 8

(美国高校入学考试指导丛书)

ISBN 978-7-5327-7277-3

I. ①S… II. ①张… III. ①数学—高等学校—入学考试—美国—自学参考资料
IV. ①01

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第096458号

本书所有出版权归本社独家所有,
非经本社同意不得连载、摘编或复制

SAT 数学

(美国高校入学考试指导丛书)

张一冰 著

上海世纪出版股份有限公司

译文出版社出版

网址: www.yiwen.com.cn

上海世纪出版股份有限公司发行中心发行

200001 上海福建中路193号 www.ewen.co

上海市印刷四厂印刷

开本 787×1092 1/16 印张 13.5 插页 2 字数 281,000

2016年8月第1版 2016年8月第1次印刷

印数: 0,001—3,000册

ISBN 978-7-5327-7277-3/H·1308

定价: 40.00元

如有质量问题,请与承印厂质量科联系。T: 021-59886521

作者序

呈现在读者面前的这套新 SAT 系列丛书，针对的是 2016 年 3 月开始的新版 SAT 考试，共有 8 个分册，囊括新版 SAT 考试的方方面面。

这套丛书延续了笔者旧版 SAT 考试丛书，即市面上通称的 SAT 白皮书的写作特点，以试题分析为主，力求用简单直接的语言去解释 SAT 考试的各个环节，以期实实在在帮助广大考生提高实力，充满信心地迎接新版 SAT 考试。

任何考试，都是技巧和实力的结合，新版 SAT 考试也不例外，只是其中技巧性的因素大大下降，考查实力的因素大幅提升。有鉴于此，希望广大考生要更早地准备，多下功夫夯实自己的英文阅读基础及表达能力，不要有临时抱佛脚的幻想。很多时候，通向成功的唯一捷径，就是脚踏实地地艰辛付出。

从 2001 年到 2016 年，笔者从事 SAT 教学及美国大学申请策划工作已经整整 15 个年头。15 年来，笔者的教学热情和写作热情丝毫未减。而且我相信，我会一直教下去，以期帮助更多的学生实现美国名校梦。我也会一直写下去，用更多更好的作品回馈给读者。

衷心感谢上海译文出版社的各位英文编辑以及笔者的各位朋友为本书所做的巨大贡献，也衷心感谢各位同学对笔者丛书的认可。

值此新书付梓之际，笔者在此祝福各位：愿你们的人生，风调雨顺。

张一冰

目 录

关于本书	1
新 SAT 数学改革介绍及应对策略	2
第一章 算数	6
第一节 基本四则运算	6
第二节 偶数和奇数	9
第三节 整除和因子	11
第四节 分数和小数	16
第五节 百分数	19
第六节 比和比例	21
第七节 平均数、中位数和众数	24
第八节 指数和根	27
第九节 集合	30
第十节 序列	33
第二章 代数	37
第一节 方程	37
第二节 方程组	42
第三节 不等式	46
第四节 函数及其图像	51
第三章 几何	60
第一节 线和角	60
第二节 三角形及三角函数	67
第三节 多边形和四边形	76

第四节 圆	81
第五节 立体	88
第六节 解析几何	94
第四章 统计、概率和逻辑推理	103
第五章 图表题	114
第六章 新 SAT 数学样题 (1—4 套)	121
第 1 套题	121
第 2 套题	142
第 3 套题	164
第 4 套题	186
附录: SAT 数学常用英语词汇	208

关于本书

2016年3月开始的新SAT考试，数学占了整个考试1600分中的800分。考生需要在80分钟内完成58道数学试题。考试分为两个部分，其中第一个部分共20题，明确规定不可以使用计算器；第二个部分共38题，允许考生使用计算器。题型包括单选题和计算题，单选题从以前的五选一改为四选一。

改革后的SAT数学涉及的依然是中国国内初、高中的数学部分内容，虽然涉及的知识面较广，但同旧SAT数学相比，题目难度并没有明显增加。

本书将SAT数学所涉及到的考点按照算术、代数、几何、统计概率和逻辑推理、图表分析进行分类，每一大类下又分成若干具体的小节。每个小节中，先列出该知识点所包含的相关概念和结论，然后从看问题的角度、知识点的归纳以及解题技巧这几方面入手，对典型例题进行细致的分析。

重要数学考点的总结复习之后，本书还提供了新SAT数学部分4套样题的详细分析，旨在帮助考生更进一步熟悉新SAT数学的题型和结构，以及做题思路和方法等。同时，本书的附录部分提供了SAT数学常用词汇的中英文对照表。

本书重在对SAT数学题型进行归纳、整理和分析，希望能够帮助考生将知识点融会贯通，从而逐渐形成自己的思维习惯，而非一味要大家被动地掌握所谓的策略和技巧。笔者始终认为，想要攻克SAT数学，在考试中取得高分，关键是要训练自己看问题的思路，只有这样才能在考试中做到处变不惊，临危不乱，从容应对一切可能出现的问题，最终取得理想的成绩。

希望本书能成为你实现这一目标的好帮手！

新SAT数学改革介绍及应对策略

对于中国学生来说，SAT 中的数学一向是比较容易拿分的部分，毕竟 SAT 考查的部分只相当于中国学生初三至高一的教学内容。但是即便如此，每次考试能够保证拿到满分的同学却寥寥无几，主要原因不是 SAT 数学太难，而是考生考试时读题不仔细，运算太粗心，当然部分原因也可以归结到对题干部分的英文理解问题。

2016 年 3 月以前的 SAT 考试满分为 2400 分，数学占 800 分。新 SAT 改革后，满分变为 1600 分，但数学依然占 800 分。也就是说，数学在 SAT 总分中所占的比重大大增加，务必要引起同学们足够的重视。

改革后的 SAT 数学分为两个部分，其中第一个部分做题时间为 25 分钟，共 20 题，不允许使用计算器。在这 20 题中，前 15 题为 4 选 1 的单选题，后 5 题为计算题即填空题；第二个部分做题时间为 55 分钟，共 38 题，允许使用计算器。在这 38 题中，前 30 题为单选题，后 8 题为计算题即填空题。

改革后的 SAT 数学部分到底有哪些变化呢？笔者总结了以下七点：

一、选项变为 4 个，取消了答错倒扣分的规则

由 SAT 改革的这一举措来看，SAT 数学题目的难度似乎降低了，因为选项变少了，而且取消了倒扣分的规则，所以对于不确定的题目考生可以更加大胆地去猜了。

但是实际上这个变化对于中国学生来说并不是什么好消息，由于中国考生的数学基础普遍较好，选项是 4 个还是 5 个其实对做题来说影响不大，并且中国学生数学部分的正确率普遍较高，倒扣分的惩罚在中国考生看来不是非常致命。反倒对于其他考生，此项变化使题目难度有所降低，特别是对善于使用计算器的美国考生来说，选项变少意味着有更多的时间用计算器将每个选项验算一遍，而且即使不会做，只靠瞎蒙，也没有了倒扣分的顾忌。

考虑到 SAT 成绩是以正态分布的形式计算标准分，所以当全体考生的原始分数都提高的时候，就意味着得高分的难度更大了。也就是说，对于有志于冲击 SAT 数学高分的中国学生来说，容错率进一步降低了。

二、更强调计算器的使用

改革后的 SAT 数学变为两个部分，58 道试题中，允许使用计算器的部分有 38 题，

且做题时间有 55 分钟；不允许使用计算器的部分仅有 20 题，且做题时间只有 20 分钟。从题目数量和每题所分配的时间上可以看出 SAT 对于计算器部分的重视。难题的分布都集中在计算器部分，所以擅长使用计算器的美国考生能在此项改变上获益，中国考生的优势进一步减小。

因为以前的 SAT 考试中没有出现过专门使用计算器完成的部分，只需要简单的加减乘除就能计算出最终的答案。而改革后的 SAT 对于计算器的使用有了更高的要求，基本上要求学生熟练掌握科学计算器的所有运算功能。建议学生学习使用计算器解方程和画函数图像。

三、考查方式由单一的知识点变成了综合应用

一直以来，SAT 数学部分的特点就是知识面不广，而且每个知识点考查的难度较低，改革后的 SAT 数学依然呈现这个特点。但考查的方式提高了难度：以往都是所谓的“铲式教学”，学生只需要理解一个知识点的基本概念就可以了，考查不深入，而且题目难度不高；而改革后的 SAT 加强了知识网络间的综合应用和理解，比如函数在图像中的几何性质、代数与概率的结合应用、三角函数和方程的结合等。虽然加强了综合应用，难度有所提升，但所有题目和知识点对中国考生来说依旧是比较简单的，所以大家不需要对此感到紧张，而要将此变化当做一个利好。

四、对阅读题干和理解问题的能力有了更高要求

改革后的 SAT 数学一个很大的特点是题干越来越长，读题越来越难，有时候看完了题目都不知道条件是什么、问题是什么。这里要提醒大家，一定要提高自己的读题和理解能力，很长的题干读下来要能明白要考查的知识点是什么，需要哪些条件才能解答这个问题，同时要能快速定位有效条件。

有的考生数学基础不错，但总是拿不到理想的高分，总推脱是自己粗心没考好，其实原因在于题目做得少，对于考试题型不熟悉。SAT 的数学题目和普高甚至是国际课程的数学题目出题方式不同，由于实际考查的知识点都比较基础，出题者只能在题目表述上和阅读难度上做文章。

这里介绍一个技巧，就是读两遍题干，并快速将文字内容转化为简单的数学表达。有时候题干很长，但是 80% 的内容都与计算过程无关，只是在讲背景知识。考生如果花很多时间去理解这个内容，会对解题的思路产生疑惑，简单的题目也被弄复杂了。所以建议学生先快速读一遍题干，大概了解主体意思，再次读题的时候就可以做到心中有数了，需要哪些条件也能比较快地定位出来，自动忽视迷惑信息。这样的方法有些费时间，但对中国学生来说，数学部分做题时间比较宽裕，针对部分题干较长的试题，这样的方

法是可行的。

五、个别题目中引入了虚数 i 的基本概念

虚数 i 是一个新的概念，在改革后的 SAT 数学当中偶尔会出现，虚数的定义为 $i = \sqrt{-1}$ ，所以 $i^2 = -1$ 。由于 i 的特殊性， i 的高次方可以不断作以下循环：

$$i^1 = i,$$

$$i^2 = -1,$$

$$i^3 = -i,$$

$$i^4 = 1,$$

$$i^5 = i,$$

$$i^6 = -1,$$

...

i^n 具有周期性，且最小正周期是 4。

要做对含有虚数的题目，需要将 i 当成是一个已知数，熟悉它的表达方式 $a + bi$ ，不会额外考查其他相关知识，所以对于中国学生来说，这个知识点难度也不大。

六、要求学生灵活且适当地运用技巧解题

中国学生有一个特点，就是喜欢用简便、快捷的方式解题，这是一个非常好的习惯。在 SAT 数学不允许使用计算器的部分中，快捷方式往往是最不会出错的方式，找出规律不但可以提高速度，同时也可以提高正确率。

但是在使用计算器的部分中，特别是在填空题的部分，中国考生可能会因为使用了快捷方式或者是找规律的方式造成误差。因为使用计算器的部分通常会给出不规律的数据，中国学生由于求快或者是使用心算，在四舍五入或者是在粗算的过程中误差过大，使最终答案与正确答案差之毫厘。所以在此建议各位考生将完整的计算过程输入计算器，通过一次计算得出答案，确保不会因为精确度出错。

七、考查考生解题过程中的仔细程度

改革后的 SAT 数学仍然是比较简单的拿分项目，但是提醒各位考生千万不能麻痹大意，不管是在解题过程当中，还是在最后算出正确答案和涂卡的时候。

对于中国考生来说，数学两个部分的考试时间通常都是比较充裕的，所以务必进行检查，而且要仔细阅读每一道题的问题部分，看看求出的答案是不是问题中要求的数字，不要因为粗心出现令人扼腕的低级错误。

最后，在这里将 SAT 数学的考查范围给大家罗列出来，同学们可以根据知识点参照中学数学课本，进行系统性的复习回顾，祝各位考生都拿到理想的成绩！

数和运算	算数应用题(包括百分数、比率和比例)
	整数性质(偶数、奇数、质数、整除性等等)
	有理数
	集合(合集、交集、元素)
	计数技术
	数列和级数(包括几何增长)
	数论初步
代数和函数	指数的性质
	代数应用题
	求解线性方程和线性不等式
	方程组和不等式组
	一元二次方程
	有理和无理方程
	直线方程
	绝对值
	变量的正反关系
	代数函数的概念
几何和测量	多边形的面积和周长
	圆的面积和周长
	立方体、正方体和圆柱体的体积
	勾股定理和等腰、等边、直角三角形的性质
	平行线、垂直线的性质
	解析几何初步
	几何想象题
	斜率
	相似
	转换
数据分析、统计和概率	数据描述(表和图)
	统计知识(平均值、中位值、众数)
	概率

第一章 算 数

第一节 基本四则运算

加 (add, plus) → 和 (sum)

减 (subtract) → 差 (difference)

乘 (multiply, times) → 积 (product)

除 (divide) → 商 (quotient)

例 The sum of the numbers x , $3x - y$ and $2y + 4$ is subtracted from 15. In terms of x and y , what is the result?

(A) $11 - 4x - 3y$

(B) $11 - 4x - y$

(C) $11 + 2x - 3y$

(D) $19 - 4x - y$

(E) $19 + 2x - 3y$

分析 “A is subtracted from B” 这一常见表达表示从 B 中减去 A。在本题中，从 15 减去三个数的和(sum)，通过计算不难选出正确答案 B。

例 If 13 is added to 2 more than one-half of a certain number, the result is 37. What is the original number?

(A) 24

(B) 40

(C) 44

(D) 61

(E) 80

分析 “add” 和 “add to” 都有加上的意思，但 add 仅是加上后面的数，而 add to 是加上后面的整个部分。比如 “1 add 2 minus 3” 表示 “ $1 + 2 - 3$ ”，而 “1 is added to 2 minus 3” 表示 “ $1 + (2 - 3)$ ”。因此，本题有 $13 + \left(\frac{x}{2} + 2\right) = 37 \Rightarrow x = 44$ ，选 C。

例 If a number x is increased by 2 and the result is squared, the final value will be 49. Which of the following could be the value of x ?

- (A) - 9
- (B) - 7
- (C) - 5
- (D) - 3
- (E) - 1

分析 “A is increased/decreased by B” 表示 A 增加/减少了 B，另一个容易与之混淆的表达是 “A is increased/decreased to B” A 增加/减少到 B，请大家注意区分。

“A is squared” 是将 A 平方的意思，等价的表达有 “square A”，“the square of A” 等等。由此题目所要表达的是 $(x+2)^2 = 49$ ，两边开方，则 $x+2 = 7$ 或 -7 ，故选 A。

例 If $8 + x$ is 4 more than 16, what is the value of $2x$?

分析 “A more/less than B” 表示比 B 多/少 A，故得到 $8 + x = 16 + 4$ ，故 $x = 12$ ，则 $2x = 24$ 。

例 If multiplying k by 7 gives the same result as squaring k , which of the following must be true?

- (A) $7 + k^2$
- (B) $k^2 + k = 7$
- (C) $k^2 + 7k = 1$
- (D) $7k = 1$
- (E) $7k = k^2$

分析 “multiply A by B” 表示用 B 乘以 A，另一种等价的表达是 “A is multiplied by B”。本题中，根据题目得到 7 乘以 k 等于 k 的平方，故选择 E。

【练习题】

1. If 5 times t is decreased by 8, which of the following represents the result?

- (A) $8 - 5t$
- (B) $5t - 8$
- (C) $5(t - 8)$
- (D) $5(8 - t)$
- (E) $8(t - 5)$

2. If 6 times j is 1 more than the square of k , where k is an integer, what is the smallest possible value of j ?

(A) -5 (B) $-\frac{1}{6}$ (C) 0 (D) $\frac{1}{6}$

(E) It cannot be determined from the information given.

3. A number is added to 9 less than the number. If the result is 181, what is the number?
4. The product of 3, 5, 7 is equal to one-half the sum of 20 and x . What is the values of x ?
5. By Saturday afternoon, 375 tickets had been sold for a Saturday evening performance at a theater with a capacity of 500 seats. After those 375 tickets were sold, half the members of a group of 210 people each purchased a ticket. If no other tickets were sold prior to the performance, how many tickets remained unsold at the time of the performance?
6. Prime numbers k and n are each greater than 2, and they differ by 4. If there is no prime number between k and n , what is the least possible value of $k + n$?

【习题解答】

1. B
2. D. 由题意可得 $6j = k^2 + 1 \geq 1$ (k 为整数), 故当 $k = 0$, $6j = 1$ 最小, 此时 $j = 1/6$.
3. 95. $x + (x - 9) = 181 \Rightarrow x = 95$
4. 190. $\frac{20+x}{2} = 3 \times 5 \times 7 = 105 \Rightarrow 20 + x = 210 \Rightarrow x = 190$
5. 20. 该题只是一道简单的减法题, 对于这种较长的题目强烈建议大家在读题时及时将题目中反映出的相关数据和信息转换成数学表达, 这样就避免了反复读题, 浪费不必要的时间。已经卖掉的票是 $375 + 210 \times 1/2 = 480$, 所以剩下 20 张票没有卖出。
6. 18. “differ by” 是相差多少的意思, 并不表明量与量之间确切的大小关系, 即 $|k - n| = 4$ 。

要使 $k + n$ 的值最小, 则 k 和 n 的值都要尽可能小。令 k 为相对较小的素数, 当 $k = 3$ 时, $n = 7$, 中间还有素数 5 不符合题意; 当 $k = 5$ 时, $n = 9$ 不是素数; 当 $k = 7$ 时, $n = 11$, 是素数, 且中间没有别的素数, 故 $k + n$ 的最小值为 18。这种题, 有时候用死办法反而是个好办法。

Prime number: 质数, 也称为素数。

第二节 偶数和奇数

奇数(odd): 不能被 2 整除的整数。

偶数(even): 能被 2 整除的整数。

运算律: $\text{odd} \pm \text{odd} = \text{even}$

$\text{odd} \pm \text{even} = \text{odd}$

$\text{even} \pm \text{even} = \text{even}$

$\text{odd} \times \text{odd} = \text{odd}$

$\text{odd} \times \text{even} = \text{even}$

$\text{even} \times \text{even} = \text{even}$

例 If a and b are positive odd integers, which of the following must be a positive odd integer?

(A) $a + b$

(B) $a - b$

(C) $2a + b$

(D) $2a - b$

(E) $\frac{a+b}{2}$

分析 由奇偶数的运算律排除 A、B、E。根据运算律 C、D 的结果都为奇数，但是由于两数大小关系未知，故只有 C 能保证结果为正。特别注意，当 $a = b$ 时， $a - b = 0$ ，而我们规定 0 也是偶数。

例 If x, y, z are integers, which of the following is NOT a possible value for $2x + 4y + 6z$?

(A) 4

(B) 8

(C) 12

(D) 26

(E) 29

分析 由奇偶数的运算律可知，无论 x, y, z 原来是何种奇偶性，它们和偶数的乘积一定还是偶数，而偶数与偶数的和也是偶数，所以 $2x + 4y + 6z$ 的结果必然是偶数。故只有 E 的结果符合条件（注意原题的 NOT）。

【练习题】

1. The sum of which of the following combinations of number will be odd?

(A) One even and two odd numbers

(B) Two even numbers

- (C) Three even numbers
- (D) Three odd numbers
- (E) Four odd numbers

2. If x and y are integers and $xy + x^2$ is odd, which of the following statements must be true?
- I. x is odd.
 - II. y is odd.
 - III. $x + y$ is odd.
- (A) I only
 - (B) III only
 - (C) I and II only
 - (D) I and III only
 - (E) II and III only
3. If x is an even integer, how many even integers are there between $x + 3$ and $x + 13$, inclusive?

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

4. How many pairs of different numbers can be chosen from the list above so that the sum of the two numbers is even? (Note: The pair 1, 3 is the same as the pair 3, 1)

【习题解答】

1. D
2. D. $xy + x^2 = x(y + x)$, 奇数和奇数相乘必为奇数, 就是说 x 和 $y + x$ 两个都必须要是奇数才能保证 $xy + x^2$ 为奇数。故选择 D。
3. 5。“inclusive” 此处的意思是“包含 $x + 3, x + 13$ ”。由于 $\text{even} \pm \text{even} = \text{even}$, 故只要找出 3 和 13 之间的偶数 4, 6, 8, 10, 12 和 x 相加就行。本题中学会排除 x 的干扰。
4. 9. $\text{odd} \pm \text{odd} = \text{even}$, $\text{even} \pm \text{even} = \text{even}$, 从 1 开始排起, 和为偶数的数对有:

$$1 \begin{cases} 3 \\ 5, 2 \\ 7 \end{cases} 2 \begin{cases} 4 \\ 6 \end{cases} 3 \begin{cases} 5 \\ 7 \end{cases} 4 \begin{cases} 6, 5 \end{cases} 7$$

共有 9 对。

第三节 整除和因子

被除数 (dividend) $\div$ 除数 (divisor) = 商 (quotient) + 余数 (remainder) $\div$ 除数 (divisor)

因子 (factor) 和倍数 (multiple): 假如整数 n 除以 m , 结果是无余数的整数, 那么我们称 m 就是 n 的因子, n 是 m 的倍数。

素数 (prime): 在大于 1 的整数中, 只能被 1 和这个数本身整除的数。

合数 (composite): 在大于 1 的整数中, 除了 1 和这个数本身, 还能被其他正整数整除的数。

素因子分解 (prime factorization): 把一个数分解成素数相乘。

- 例** Trains A, B and C passed through a station at different speeds. Train A's speed was 3 times Train B's speed, and Train C's speed was twice Train A's. What was Train C's speed, in miles per hour, if Train B's speed was 7 miles per hour?
- (A) 14
(B) 21
(C) 28
(D) 35
(E) 42

分析 此题包含 2 个表示倍数的常见用法, “ n times A” 表示 A 的 n 倍; “twice A” 表示 A 的 2 倍。由题意 A 的速度是 B 的 3 倍, A 的速度是 21; C 的速度是 A 的 2 倍, C 的速度是 42, 选 E。文字题要学会立即转化为数学表达, 本题中, $A = 3B$, $C = 2A$, 又知 $B = 7$, 则很快可以得出 $C = 42$ 。

- 例** When the positive integer k is divided by 7, the remainder is 6. What is the remainder when $k + 2$ is divided by 7?
- (A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

分析 这一类型的题目是 SAT 考试中的常见题。比较简单的做法是代值, 选择符合条件的 k 值代入即可。本题中可选择 $k = 13$ 代入计算, 则 $k + 2 = 15$, 被 7 除是余数为 1, 故选 B。