

算经之首：《九章算术》



介绍古代中国数学研究与古希腊数学研究的区别，阐释《九章算术》的「构造性和机械化」特点。

郭书春·著

 海天出版社（中国·深圳）

第五辑

《自然国学》丛书

算经之首：
《九章算术》



郭书春 • 著



海天出版社（中国·深圳）

图书在版编目 (CIP) 数据

算经之首：《九章算术》 / 郭书春著. — 深圳 :
海天出版社, 2016.10
(自然国学丛书)
ISBN 978-7-5507-1699-5

I. ①算… II. ①郭… III. ①古典数学—研究—中国
IV. ①O112
中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第159625号

算经之首：《九章算术》

Suan Jing zhi Shou: Jiu Zhang Suan Shu

出品人 聂雄前
出版策划 尹昌龙
丛书主编 孙关龙 宋正海 刘长林
责任编辑 梁 萍
责任技编 蔡梅琴
封面设计 风生水起

出版发行 海天出版社
地 址 深圳市彩田南路海天大厦 (518033)
网 址 www.htph.com.cn
订购电话 0755-83460293 (批发) 83460397 (邮购)
设计制作 深圳市同舟设计制作有限公司 Tel: 0755-83618288
印 刷 深圳市新联美术印刷有限公司
版 次 2016年10月第1版
印 次 2016年10月第1次
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 10.875
字 数 150千
定 价 30.00元

海天版图书版权所有, 侵权必究。
海天版图书凡有印装质量问题, 请随时向承印厂调换。

总序

21世纪初，国内外出现了新一轮传统文化热。人们以从未有过的情对待中国传统文化，出现了前所未有的国学热。世界各国也以从未有过的情学习和研究中国传统文化，联合国设立“孔子奖”，各国雨后春笋般地设立孔子学院或大学中文系。显然，人们开始用新的眼光重新审视中国传统文化，认识到中国传统文化是中华民族之根，是中华民族振兴、腾飞的基础。面对近几百年以来没有过的文化热，这就要求我们加强对传统文化的研究，并从新的高度挖掘和认识中国传统文化。我们这套《自然国学》丛书就是在这样的背景下应运而生的。

自然国学是我们在国家社会科学基金项目“中国传统文化在当代科技前沿探索中如何发挥重要作用的理论研究”中提出的新的研究方向。在我们组织的、坚持20余年约1000次的“天地生人学术讲座”中，有大量涉及这一课题的报告和讨论。自然国学是指国学中的科学技术及其自然观、科学观、技术观，是国学的重要组成部分。长久以来由于缺乏系统研究，以致社会上不知道国学中有自然国学这一回事；不少学者甚至提出“中国古代没有科学”的论断，认为中国人自古以来缺乏创新精神。然而，事实完全不是这样的：中国古代不但有科学，而且曾经长时期地居于世界前列，至少有甲骨文记载的商周至17世纪上半叶的中国古代科学技术一直居于世界前列；在公元3世纪至15世纪，中国科学技术则是独步世界，占据世界领先地位达千余年；中国古人富有创新精神，据统计，在公元前6世纪至公元1500年的2000多年中，中国的技术、工

艺发明成果约占全世界的54%；现存的古代科学技术知识文献数量，也超过世界任何一个国家。因此，自然国学研究应是21世纪中国传统文化一个重要的新的研究方向。对它的深入研究，不仅能从新的角度、新的高度认识和弘扬中国传统文化，使中国传统文化获得新的生命力，而且能从新的角度、新的高度认识和弘扬中国传统科学技术，有助于当前的科技创新，有助于走富有中国特色的科学技术现代化之路。

本套丛书是中国第一套自然国学研究丛书。其任务是：开辟自然国学研究方向；以全新角度挖掘和弘扬中国传统文化，使中国传统文化获得新的生命力；以全新角度介绍和挖掘中国古代科学技术知识，为当代科技创新和科学技术现代化提供一系列新的思维、新的“基因”。它是“一套普及型的学术研究专著”，要求“把物化在中国传统科技中的中国传统文化挖掘出来，把散落在中国传统文化中的中国传统科技整理出来”。这套丛书的特点：一是“新”，即“观念新、角度新、内容新”，要求每本书有所创新，能成一家之言；二是学术性与普及性相结合，既强调每本书“是各位专家长期学术研究的成果”，学术上要富有个性，又强调语言上要简明、生动，使普通读者爱读；三是“科技味”与“文化味”相结合，强调“紧紧围绕中国传统科技与中国传统文化交互相融”这个纲要进行写作，要求科技器物类选题着重从中国传统文化的角度进行解读，观念理论类选题注重从中国传统科技的角度进行解释。

由于是第一套《自然国学》丛书，加上我们学识不够，本套丛书肯定会存在这样或那样的不足，乃至出现这样或那样的差错。我们衷心地希望能听到批评、指教之声，形成争鸣、研讨之风。

《自然国学》丛书主编

2011年10月

目 录

第一章	《九章算术》概说	1
	一、《九章算术》的内容	4
	二、《九章算术》的体例	6
	三、《九章算术》的编纂	10
第二章	《九章算术》的成就	27
	一、分数四则运算、比例与盈不足术	29
	二、面积、体积与勾股测望	46
	三、开方术、方程术与正负术	75
第三章	《九章算术》在中国和世界数学史上的地位	101
	一、《九章算术》规范了中国古典数学的表达方式	103
	二、《九章算术》影响了中国和东方的数学研究	106
	三、中国古典数学属于世界数学发展的主流	113
第四章	《九章算术》的儒学传统	115
	一、儒家“九数”与《九章算术》的编纂	117
	二、荀派儒学对《九章算术》的影响	120
	三、《九章算术》的特点	122
	四、《九章算术》与和	136
参考文献		141
索 引		143

第一章

《九章算术》概说

九章算經卷第一

魏劉徽注

唐朝孫奭《大史記》全韋都尉臣李淳風等奉勅注釋

方田

以御田
界域

今有田廣十五步從十六步問爲田幾何

答曰一畝

又有田廣十二步從十四步問爲田幾何

百六十八步

圓從十四
廣十二

数学是中国古代最为发达的基础科学学科之一，从前3世纪至14世纪初居于世界先进水平1700余年，属当时世界数学发展的主流。这不仅是中国数学史界、中国科学史界的共识，也为国内外有识之士所赞同。可现在，有不少人既不研究中国古代的数学典籍，也不学习有关的研究著述，无知者无畏，拾欧洲中心论者的牙慧，或在报刊上发表文章，或在各种会议上发表高论，说什么中国古代“在数学上交了白卷”，“只知道勾股定理”，甚至挖苦中国古代数学成就是“阿Q头上的疮疤”，并作为“中国古代无科学”的佐证。有人还进而想由此找到中国为什么没有得诺贝尔奖的原因。而学术界，包括中国数学界，许多人多是接受西方中心论，以中国近代数学的落后推想古代亦无足道者，也常误以为中国古代数学发达是中国人吹牛。

事实胜于雄辩。要了解中国古代数学的真实情况，判断上述两种截然相反的看法孰对孰错，只有研究中国古代的数学典籍，别无他法。中国古代数学典籍最有代表性的便是《九章算术》。然而，即使对中国古代数学推崇的许多学者甚至研究者，对中国古代数学和《九章算术》也有某些误解，比如认为中国古代数学著作都是应用问题的堆砌，只有成就，没有理论；《九章算术》“都是一题、一答、一术”，而且“‘术’都是应用问题的具体解法”；等等。笔者从事《九章算术》研究三十余年，有一些心得，出版了几部关于《九章算术》和刘徽的著作。现将这些心得摘要写出，一方面为普及中国古代数学和《九章算术》的知识尽绵薄之力，另一方面希望纠正学术界的某些误解。



一、《九章算术》的内容

《九章算术》^①是中国古典数学最重要的著作，历来被尊为算经之首。后来被列入《算经十书》。《算经十书》在隋唐称为“十部算经”，是中国古典数学研究奠基时期著作的总集，含有《周髀算经》《九章算术》《海岛算经》《孙子算经》《夏侯阳算经》《缀术》《张丘建算经》《五曹算经》《五经算术》《缉古算经》，经唐初李淳风等整理后成为算学馆的教材和明算科的考试科目。唐中叶之后，《夏侯阳算经》《缀术》亡佚。北宋元丰七年（1084）秘书省刊刻十部算经，以唐中叶一部实用算术书充任《夏侯阳算经》，对《缀术》则付之阙如。秘书省刻本今皆不存。1200—1213年南宋天算学家鲍澣之翻刻了北宋秘书省刻本，同时刊刻了《数术记遗》。清中叶戴震整理十部算经，由孔继涵刊刻，始称《算经十书》。

通常说的《九章算术》，有狭义与广义两种含义。狭义地说，是指西汉张苍、耿寿昌编订的《九章算术》原文，广义地说，还包括与之一体行世的魏刘徽注、唐李淳风等注释。本书自然主要阐释《九章算术》原文。

《九章算术》之名在目前所存文献中最先见之于东汉灵帝光和二年（179）的大司农斛、权的铭文中：

依黄钟律历、《九章算术》，以均长短、轻重、大小，用
齐七政，令海内都同。^②

可见它原本作《九章算术》，唐初改作《九章算经》，清中叶戴震从

①郭书春汇校：《九章算术》，沈阳：辽宁教育出版社，1990年。郭书春汇校：《九章算术》增补版，沈阳：辽宁教育出版社；台北：台湾九章出版社，2004年。郭书春汇校：《九章算术新校》，合肥：中国科学技术大学出版社，2014年。本书凡引《九章算术》及其刘徽注原文，均依《九章算术新校》。不再另注。

②国家计量总局：《中国古代度量衡图集》，北京：文物出版社，1984年，第97页。

《永乐大典》中将其辑出，改称《九章算术》，遂成为惯用书名。图1-1是南宋鲍澣之刻本书影，刻于1200年。这是目前传世的世界上最早的印刷本数学著作。

《九章算术》共分为九章：(1)方田——刘徽说“以御田畴界域”，有各种形状的面积公式，还有世界上最早的分数四则运算法则；(2)粟米——刘徽说“以御交质变易”，有以今有术为主体的比例算法；(3)衰分——刘徽说“以御贵贱禀税”，有比例分配算法，以及谈若干比例问题；(4)少广——刘徽说“以御积幂方圆”，有面积与体积的逆运算，最重要的是提出了世界上最早

的开平方与开立方程序；(5)商功——刘徽说“以御功程积实”，有各种体积公式和土方工程工作量的分配算法；(6)均输——刘徽说“以御远近劳费”，有赋税的合理负担算法，及各种数学难题；(7)盈不足——刘徽说“以御隐杂互见”，有盈亏类问题的算法及其在其他数学问题中的应用；(8)方程——刘徽说“以御错糅正负”，有现今之线性方程组解法、列方程的损益术和正负数加减法则；(9)勾股——刘徽说“以御高深深远”，有解勾股形以及简单的测望问题。《九章算术》含有近百条十分抽象的术文，即公式、解法，以及246道例题。其中分数理论，比例和比例分配、盈不足、开方等算法，线性方程组解法，正负数加减法则，解勾股形方法等都超前其他文化传统几百年甚至千余年，是具有世界意义的重大成就。

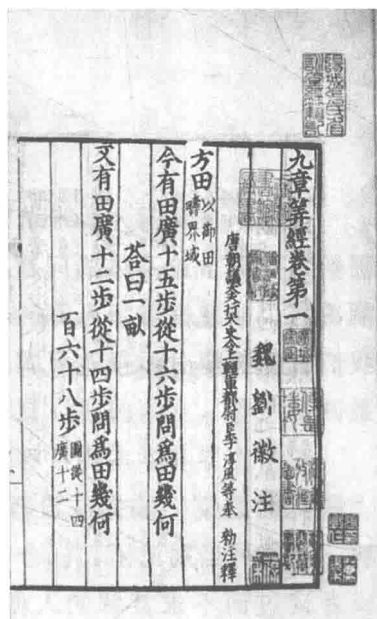


图1-1 《九章算经》卷一书影
(南宋本)

二、《九章算术》的体例

传本《九章算术》未署作者，因此《九章算术》的编纂是20世纪中国数学史界争论不休的问题。而《九章算术》本身的结构和体例为彻底解决这个问题提供了可靠的信息，也是最终解决这个问题的钥匙。因此我们首先需要分析《九章算术》的结构和体例，特别是题目与术文的关系。

数学史界和学术界常将《九章算术》称为应用问题集。一般说来，“应用问题集”的提法没有什么不可。但是，如果这一提法会引起误解，那就另当别论了。一个明显的事实是，许多没有读过《九章算术》或者读过而不求甚解的人便从“《九章算术》是一部应用问题集”的提法出发，想当然地得出“《九章算术》都是一题、一答、一术”，而“术都是应用问题的具体解法”的看法。这根本不符合《九章算术》的实际情况，因而是十分错误的。

关于《九章算术》的题目与术文的关系，大体说来有以下几种情形^①：

1. 抽象性术文统率例题的形式

关于一类问题的抽象性术文统率若干例题形式，往往一术多题或一术一题。这是《九章算术》主要内容所采取的形式，又有不同的情形：

(1) 先例题后术文

这是先给出一个或几道例题，然后给出一条或几条抽象性的术文，而例题中只有题目、答案，没有具体演算的术文。以《九章算术》方田章圆田术及其例题为例：

^①郭书春：《关于中国古典数学的“术”》，载林东岱、李文林、虞言林主编：《数学与数学机械化》，济南：山东教育出版社，2001年，第441～456页。

今有圆田，周三十步，径十步。问：为田几何？

答曰：七十五步。

又有圆田，周一百八十一步，径六十步三分步之一。问：
为田几何？

答曰：十一亩九十步十二分步之一。

术曰：半周半径相乘得积步。

这里的2道例题都没有各自的术文，显然术文是2道例题共有的，而不是哪道例题特有的。有的著述大约从《九章算术》都是“一题、一答、一术”的成见出发，把这条术文说成是方田章第32题的术文，显然是断章取义，其偏颇是不言而喻的。

《九章算术》的整个方田章，以及粟米、少广、商功、均输、盈不足、勾股等章的部分，甚或大部分都属于这类情形，共有73术，106道例题。

（2）先术文后例题，题中无子术

这是先给出抽象的术文，再列出几道例题；而例题只有题目、答案，亦没有演算术文。以《九章算术》商功章城、垣、堤、沟、堑、渠术及其例题为例：

城、垣、堤、沟、堑、渠皆同术。

术曰：并上下广而半之，以高若深乘之，又以袤乘之，即积尺。

今有城，下广四丈，上广二丈，高五丈，袤一百二十六丈五尺。问：积几何？

答曰：一百八十九万七千五百尺。

以下是关于垣、堤、沟、堑、渠的例题。同一章刳童、盘池、曲池、冥谷术及其4道例题亦如是，不另赘述。共2术，10道例题。

（3）先总术后例题，题有子术

先给出抽象性的总术，再给出若干例题；而例题包含了题目、答案、术文三项。

其中的术文是总术的应用。以《九章算术》粟米章今有术及31个粟米互换题目为例：

今有术曰：以所有数乘所求率为实，以所有率为法。实如法而一。

今有粟一斗，欲为粳米。问得几何？

答曰：为粳米六升。

术曰：以粟求粳米，三之，五而一。

下面还有30道同样类型的例题。属于这类情形的还有方程章的全部内容，以及衰分、少广、盈不足等章的部分内容，共7术，80道例题。

这三种情形共82术，196道例题，约占全书的80%。尽管表达方式有差异，却有三个共同特点：首先，术文在这里是中心，是主体，题目是作为例题出现的，是依附于术文的；其次，作为中心的术文非常抽象、严谨，具有普适性，换成现代符号就是公式或运算程序；再次，这些术文具有构造性、机械化的特点。因此，我们将之称为术文统率例题的形式。

2. 应用问题集的形式

《九章算术》确实有应用问题集的形式，它们确实表现为一题、一答、一术。其术文的抽象程度也有所不同：

（1）关于一种问题的抽象性术文

《九章算术》有一部分问题的术文是关于一种问题的抽象性术文。以均输章鳧雁问为例：

今有鳧起南海，七日至北海；雁起北海，九日至南海。今鳧、雁俱起，问：何日相逢？

答曰：三日十六分日之十五。

术曰：并日数为法。日数相乘为实。实如法得一日。

其术文虽未离开日数这种具体对象，但没有具体数字的运算，可以离开题目而独立存在，它对同一种问题都是适用的。粟米、衰分、均输、勾股等章的部分题目就属于这种情形。

（2）具体问题的算草

《九章算术》有一部分问题的术文以题目的具体数字入算，是不能离开题目而独立存在的。衰分、均输、勾股等章的部分题目都是如此。以勾股章开门去阕问（本书以下所引《九章算术》的题目，皆略去答案）为例：

今有开门去阕，不合二寸。问：门广几何？

术曰：以去阕一尺自乘。所得，以不合二寸半之而一。所得，增不合之半，即得门广。

这部分内容共有50道题目，全部是衰分章的非衰分类问题，均输章的非典型均输类问题，以及勾股章的解勾股形等问题。显然，这些内容是以题目为中心的，术文只是所依附的题目的解法，甚至演算细草，计算程序是正确的，尽管第(1)种术文对某一种问题具有普适性，却不具有《九章算术》大多数术文那样高度的抽象性、广泛的普适性等特点。

3. 《九章算术》术文的层次

显然，《九章算术》的术不是一个层次的。它起码可以分成三个不同的层次：

第一个层次是一类问题的术，尽管其表达方式有差异，却有几个共同特点：术文是中心，是主体，题目依附于术文，作为例题出现；作为中心的术文非常抽象、严谨，具有普适性，换成现代符号就是公式或运算程序。这个层次大约占《九章算术》80%的篇幅。

第二个层次是一种问题的比较抽象的术。

第三个层次是具体问题的算草。第二、第三个层次大约占《九章算术》20%的篇幅。



这些抽象的和比较抽象的术文，当然是数学理论的体现。有的著述笼统地说《九章算术》共有多少术，不做具体分析，不仅没有什么意义，而且会误导读者。

不言而喻，不宜将《九章算术》笼统地归结为“应用问题集”，更不能说它都是“一题、一答、一术”。所谓“一题、一答、一术”反映的应该是《九章算术》的一少部分及《孙子算经》等著作的情形，而不符合《九章算术》主体部分的实际。我们认为，数学史上起码存在过三种不同体例的著作，一是像欧几里得《几何原本》那样，形成一个公理化体系；一是像丢番图的《算术》那样的应用问题集，正如德国数学史家汉克尔所说的，研究了丢番图的100个问题后，去解第101个问题，仍然感到困难；显然，《九章算术》的主体部分，既不像欧几里得的《几何原本》，也不像丢番图的《算术》和《孙子算经》，而是第三种体例，即以算法（术）为中心，表现为算法统率例题的形式。

三、《九章算术》的编纂

了解了《九章算术》的体例，便可以回头讨论《九章算术》的编纂问题。关于《九章算术》的编纂，不仅涉及某些历史人物的定位，而且关系到对先秦数学的认识，因而是中国数学史研究中的重大问题。

1.《九章算术》编纂诸说

关于《九章算术》的编纂与成书年代，历代学者说法不一，主要有以下几种说法：

（1）西汉张苍、耿寿昌在先秦遗文基础上删补而成

在现存资料中，最先谈到《九章算术》编纂的是为其作注的三国魏人刘徽。刘徽说：

周公制礼而有九数。九数之流，则《九章》是矣。往者暴秦焚书，经术散坏。自时厥后，汉北平侯张苍、大司农中丞耿寿昌皆以善算命世。苍等因旧文之遗残，各称删补。故校其目则与古或异，而所论者多近语也。

（2）西周初周公所作

唐初王孝通《上缉古算经表》说：“昔周公制礼而有九数之名，窃寻九数即《九章》是也。”^①南宋鲍澣之^②、清屈曾发^③等亦持这种看法。

（3）黄帝、隶首所作

唐贾宪《夏侯阳算经》说：“黄帝定三数为十等，隶首因以著《九章》。”^④北宋贾宪^⑤、南宋荣棨^⑥、元莫若^⑦等皆持此说。

（4）否定张苍删补《九章》，西汉中叶之后成书诸说

清戴震说：“今考书内有长安、上林之名。上林苑在武帝时，苍在汉初，何缘预载？知述是书者，在西汉中叶后矣。”^⑧戴震此说一出，

① [唐]王孝通：《缉古算经》（郭书春点校），载郭书春、刘钝点校：《算经十书》，沈阳：辽宁教育出版社，1998年。《算经十书》修订本，台北：台湾九章出版社，2001年。

② [宋]鲍澣之：《九章算经后序》，载郭书春汇校：《九章算术新校》附录，合肥：中国科学技术大学出版社，2014年。

③ [清]屈曾发：《合刻九章算术海岛算经序》，载郭书春汇校：《九章算术新校》附录，合肥：中国科学技术大学出版社，2014年。

④ [唐]佚名：《夏侯阳算经》（郭书春点校），载郭书春、刘钝点校：《算经十书》，沈阳：辽宁教育出版社，1998年。《算经十书》修订本，台北：台湾九章出版社，2001年。

⑤ 贾宪为《九章算术》撰细草，名曰《黄帝九章算经细草》。将“黄帝”嵌入书名，可见其态度。

⑥ [宋]荣棨：《黄帝九章序》，载郭书春汇校：《九章算术新校》附录，合肥：中国科学技术大学出版社，2014年。以下引荣棨语均据此。

⑦ [元]莫若：《四元玉鉴前序》，载郭书春主编：《中国科学技术典籍通汇·数学卷》第1册，郑州：河南教育出版社，1993年。

⑧ [清]戴震：《九章算术提要》，《四库全书》文津阁本，北京：商务印书馆，2006年影印本。又载郭书春汇校：《九章算术新校》附录，合肥：中国科学技术大学出版社，2014年。