Generalized Inverse of Operator Theory and Computation

算子广义逆的理论及计算

刘晓冀 著

科学出版社

算子广义逆的理论及计算

刘晓冀　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

广义逆在研究奇异矩阵问题、病态问题、优化问题以及统计学问题中起着重要作用. 本书主要研究内容包括算子广义逆的性质、表示、反序律、扰动以及算子广义逆的迭代算法.

本书可以作为从事广义逆研究的科技工作者和研究生的参考资料.

图书在版编目(CIP)数据

算子广义逆的理论及计算/刘晓冀著. —北京: 科学出版社, 2017.3

ISBN 978-7-03-051930-6

Ⅰ. ①算… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①广义逆 Ⅳ. ①O151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 040542 号

责任编辑: 胡庆家 / 责任校对: 邹慧卿

责任印制: 张 伟 / 封面设计: 铭轩堂

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

北京东华虎彩印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017 年 3 月第 一 版 开本: 720 × 1000 B5

2017 年 3 月第一次印刷 印张: 16 1/2

字数: 318 000

定价: 98.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

序

广义逆理论可追溯到 1903 年, 当时 Fredholm 用积分算子的广义逆求解积分方程, Fredholm 称这种广义逆为 “伪逆”. 大约在 1903 年, E. H. Moore 发现矩阵广义逆的代数表达式, 但直到 1920 年他才在《美国数学会通报》上以摘要的形式给出了广义逆的定义. 1955 年, Penrose 证明了 Moore 所定义的广义逆 (现在称为 Moore-Penrose 广义逆) 是由四个矩阵方程唯一确定的. 从此, 广义逆理论得到迅速发展, 并在众多方面得到广泛应用. 但是这些研究主要集中在实数域和复数域上的矩阵. Hilbert 空间上线性算子广义逆的研究是从 Moore 的学生、南京大学曾远荣 (Y. R. Tseng) 先生开始的. 1933 年, 曾远荣引入了 Hilbert 空间上线性算子广义逆的概念, 为无限维 Hilbert 空间上线性算子广义逆的研究做出了重大贡献, 后来人们称这种广义逆为 Tseng 广义逆. 1958 年, M. P. Drazin 教授定义结合环和半群上的广义逆. 1959 年, Greville 教授进一步阐述长方形矩阵的广义逆及其应用. 广义逆理论在诸多领域都有广泛的应用, 如 Drazin 逆解二阶微分方程中的应用、处理概率与数理统计的问题、渐近假设检验中的应用及动态系统中的问题等.

广义逆的反序律在上述领域的理论研究和数值计算中发挥着很重要的作用. 自 Moore(1920) 引入广义逆的概念以来, 广义逆的反序律就得到国内外众多学者的广泛研究, 取得了丰富的理论成果. Ben-Israel 和 Grevill(2003) 给出了两个矩阵乘积 Moore-Penrose 逆反序律 $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ 成立的充要条件. Werner(1994) 给出两个矩阵内逆反序律 $(AB)^- = B^- A^-$ 成立的充要条件. 孙文瑜和魏益民 (1998) 研究了两个矩阵乘积加权 Moore-Penrose 逆的反序律, 简洁地证明了 $(AB)^\dagger_{ML} = B^\dagger_{NL} A^\dagger_{MN}$ 成立的充要条件. Djordjević (2007) 研究了 Hilbert 空间两个算子乘积的反序律, 得到了算子广义逆反序律成立的充要条件.

Qiao(1981) 在 Banach 空间上给出了一个有界线性算子 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ 的 Drazin 逆以及 T^{D} 的表达式: 若 $\mathrm{ind}(T) = k(k \geqslant 1)$, 则

$$T^{\mathrm{D}} = \tilde{T}^{-1} Q,$$

其中 Q 是沿着 $\mathcal{N}(T^k)$ 从 $\mathcal{X}$ 到 $\mathcal{R}(T^k)$ 的投影.

Cai(1985) 给出了 T^{D} 的另一种表达式: 若 $\mathrm{ind}(T) = k(k \geqslant 1)$, 则

$$T^{\mathrm{D}} = T^{k\dagger} T^{k-1},$$

此时 $T^{k\dagger}$ 是 T^k 的线性斜投影的广义逆且与 $P_{\mathcal{R}(T^k),\mathcal{N}(T^k)}$ 及 $\mathcal{Z} = \mathcal{R}(T^k) \oplus \mathcal{N}(T^k)$ 有关的投影.

Wei(2000) 得到了 T^{D} 的另一种表达式: 若 $\mathrm{ind}(T)=k(k\geqslant 1)$, 那么

$$T^{\mathrm{D}}=\bar{T}^{-1}T^{k},$$

此时 $\bar{T}=T\mid_{\mathcal{R}(T^k)}$ 是 T 在 $\mathcal{R}(T^k)$ 上的 T 限制.

最近, Wang(2007) 总结了 T^{D} 的三种表示: 若 $\mathrm{ind}(T)=k(k\geqslant 1)$, 则

$$T^{\mathrm{D}}=\hat{T}^{-1}T^{k+}T^{k-1+l}.$$

此时, $\hat{T}=T^{l}\mid_{\mathcal{R}(T^k)}$ 是在 $\mathcal{R}(T^k)$ 的 T^l 限制.

设 $A,B\in\mathcal{L}(H,K)$. 若对每一个 $E\in A\eta$ 和 $F\in B\eta$, $E+F=E(A+B)F$, 那么我们说 A 和 B 的 η-逆吸收律是满足的. Chen(2008) 和 Lin(2011) 等利用矩阵秩、广义 Schur 补及奇异值分解考虑了若干矩阵广义逆的混合第一、第二吸收律等.

Rao 和 Mitra(1971) 讨论了矩阵乘积 $AB^{(1)}C$ 的不变性, 并运用秩的方法给出了一些条件来说明矩阵乘积 $AB^{(1)}C$ 的不变性. 随后, 许多研究者对不变性进行了探索和研究. 例如, Baksalary 等 (1983, 1990, 1992) 给出了值域 $\mathcal{R}(AB^{(1)}C)$ 和 $\mathrm{rank}(AB^{(1)}C)$ 不变性的条件, 以及矩阵乘积 $KL^{(1)}M^{(1)}N$ 不变性的条件. Grob(2006) 用秩的方法研究了矩阵乘积值域包含的不变性. Liu(2014) 通过把有界线性算子表示成矩阵形式的方法来研究算子乘积 $AC^{(1)}B^{(1)}D$ 的不变性, 以及其算子广义逆值域包含的不变性.

Wei(2003) 给出许多不同的积分表示广义逆, 如 Moore-Penrose 逆、Drazin 逆和加权 Drazin 逆. 特别提出了长方矩阵 A, W 的 W-加权 Drazin 逆两个积分表示等.

Wedin(1973) 提出了若干 Moore-Penrose 逆矩阵的酉不变范数、谱范数、Frobenius 范数下摄动界限, Meng 和 Zheng(2010) 使用奇异值分解 Moore-Penrose 的 Frobenius 范数下的最佳扰动界; Deng 和 Wei 探讨了在 Hilbert 空间算子的 Moore-Penrose 逆扰动界, Stewart 等 (1977) 给出了在 Banach 空间上线性算子的扰动界.

近年来, 关于矩阵 A 的 Drazin 逆的扰动理论备受关注, 如 Wei 和 Wang 给出约束条件下的扰动结果; Djordjević 和 Rakoćević(2008) 拓展了扰动界的值; Wei 等 (2000, 2002) 讨论了在条件 $B=A+E$ 下, $\|B^{\sharp}-A^{\sharp}\|/\|A^{\sharp}\|$ 的扰动上界, 同时解决了 Campbell 和 Meyer(1975) 提出的关于 当 $\mathrm{ind}(A)=1$ 时的问题, 并给出了在条件 core-rank$B$ = core-rank$A$ 下的扰动上界 $\|B^{\mathrm{D}}-A^{\mathrm{D}}\|/\|A^{\mathrm{D}}\|$, 并得到了 $\|B^{\sharp}-A^{\mathrm{D}}\|/\|A^{\mathrm{D}}\|$ 的扰动上界; Li 和 Wei (2011) 削弱了扰动上界 $\|B^{\sharp}-A^{\mathrm{D}}\|$, 在条件

$$\mathrm{rank}B=\mathrm{rank}A^{k}\quad 和\quad \|A^{\mathrm{D}}\|\|E\|<\frac{1}{1+\|A^{\mathrm{D}}\|\|A\|}$$

下, Wei, Li 和 Bu 给出了 Drazin 逆的界; Xu, Wei 和 Gu(2010) 仅在 B 是 A 的稳定扰动的条件下, 给出上界 $\|B^{\mathrm{D}}-A^{\mathrm{D}}\|/\|A^{\mathrm{D}}\|$; González 和 Koliha(2000) 探讨了封闭线性算子 Drazin 的扰动值并在一些限制条件下的精确扰动值. Castro-González, Vélez-Cerrada 分析了 Drazin 逆的扰动值 $\|B^{\sharp}-A^{\mathrm{D}}\|$, $\|BB^{\sharp}-AA^{\mathrm{D}}\|$, 并得到了 Banach 空间上群逆的相关结果. Deng 和 Wei(2010) 讨论了线性算子 Drazin 逆扰动并且给出在一些扰动矩阵的限制条件下 Drazin 逆的精确表达式等.

广义逆计算及应用是数值代数理论领域十分活跃的研究课题. 计算广义逆的方法也是种类繁多的, 对于迭代法来说, 已经由原来的牛顿迭代法发展到现在的高阶迭代法, 计算的精度越来越高. 近年来, Ben-Israel, Wedin, Stewart, Djordjevi, Y. Saad, F. Soleymani, 陈永林、王国荣、魏益民、俞耀明、李维国等在广义逆的计算方面做了许多重要的工作. 许多学者利用矩阵分裂来研究矩阵的 $\{1\}$-逆, $\{2\}$-逆和 Moore-Penrose 逆的迭代方法. Chen(1993, 1996) 给出了求解方阵 Drazin 逆的指标固有分裂法, 以及求解长方矩阵 W-加权 Drazin 逆的加权指标固有分裂法. Wei(1998) 介绍了一种新的计算方阵 Drazin 逆的指标分裂法. Zhu(2003) 讨论了 Banach 空间中有界线性算子 Drazin 逆的两种分裂法, 推广了 Chen(1996) 的结果.

Chen(1996) 定义了迭代公式

$$X_{k+1}=X_k+\beta Y(I-AX_k),\quad k=0,1,2,\cdots,\beta\in\mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

这个迭代公式被用来计算矩阵 A 的 $A_{T,S}^{(2)}$ 逆. Djordjević(2007) 把该方法推广到 Banach 空间算子的 $A_{T,S}^{(2)}$ 逆和广义 Drazin 逆.

作者在编写本书时, 得到西安电子科技大学刘三阳教授、上海师范大学魏木生教授、复旦大学魏益民教授、东南大学陈建龙教授的鼓励和支持, 他们提出了很多建设性的意见和建议, 作者在此深表谢意. 本书的工作是与 Benítez, 俞耀明、钟金、胡春梅、周光平、武玲玲、武淑霞、覃永辉、黄少斌、黄蒲、杨琦、靳宏伟、张苗、付石琴、蒋彩静合作完成的. 本书的统稿是由王宏兴、杜为荣完成的, 在此一并致谢.

该书的编写和出版得到国家自然科学基金 (项目编号: 11361009,11401243)、广西高等学校高水平创新团队及卓越学者项目、广西八桂学者项目以及广西民族大学的大力支持.

由于本人水平有限, 书中难免有错误和不妥之处, 希望读者能及时指出, 便于以后纠正.

刘晓冀
广西民族大学
2016 年 9 月

符　号　表

- $\mathcal{L}(H,K)$： 从 Hilbert 空间 H 到 K 的有界的线性算子的集合
- $\mathbb{R}$: 所有实数的全体
- $\mathbb{C}$: 所有复数的全体
- $\mathbb{R}^{m\times n}$: 所有 $m\times n$ 实矩阵的全体
- $\mathbb{C}^{m\times n}$: 所有 $m\times n$ 复矩阵的全体
- A^*: A 的自伴随 (即 $\bar{A}^{\mathrm{T}}$)
- A^{-1}: A 的逆
- $A^{\dagger}$: A 的 Moore-Penrose 逆
- $A^{\sharp}$: A 的群逆
- A^{D}: A 的 Drazin 逆
- I: 恒等算子
- 0: 零算子
- $\mathcal{R}(A)$: 算子 A 的值域
- $\mathrm{span}(u_1,\cdots,u_i)$: 表示由 $u_1,\cdots,u_i$ 张成的子空间
- $\mathcal{N}(A)$: A 的零空间
- P_{klA}: 到 $\mathcal{R}(A)$ 上的正交投影算子
- $\mathrm{rank}(A)$: A 的秩
- $\mathrm{ind}(A)$: A 的指标
- $\|x\|_2$: 向量 x 的 Euclid 长度
- $\|A\|_2$: A 的谱范数
- $\|A\|_F$: A 的 Frobenius 范数
- $\in$: 元素属于
- $\subseteq$: 集合含于
- $\Leftrightarrow$: 等价
- $\Rightarrow$: 蕴涵

目　　录

第 1 章　基本概念和引理

设 $\mathcal{L}(H,K)$ 表示从 Hilbert 空间H 到 K 的有界的线性算子的集合, 其中 $\mathcal{L}(H)=\mathcal{L}(H,H)$. $A\in\mathcal{L}(H,K)$, A^*, $\mathcal{R}(A)$ 及 $\mathcal{N}(A)$ 分别表示自伴随、值域、零空间.

用 I_H 表示 Hilbert 空间 H 中的恒等算子, 一般简记为 I.

我们用 $\mathrm{asc}(A)$ 和 $\mathrm{des}(A)$ 分别表示算子 $A\in\mathcal{B}(H)$ 的升指标和降指标, 是分别指满足方程 $\mathcal{N}(A^k)=\mathcal{N}(A^{k+1})$ 和 $\mathcal{R}(A^k)=\mathcal{R}(A^{k+1})$ 的最小正整数 k. 如果这样的 k 不存在, 则记 $\mathrm{asc}(A)=\infty$ 和 $\mathrm{des}(A)=\infty$. 我们知道, $\mathrm{asc}(A)=\mathrm{des}(A)$ 当且仅当 $\mathrm{asc}(A)$ 和 $\mathrm{des}(A)$ 都是有限的, 此时, $\mathrm{asc}(A)=\mathrm{des}(A)=\mathrm{ind}(A)$, 其中 $\mathrm{ind}(A)$ 称为算子 A 的指标.

算子 $A\in\mathcal{B}(H)$ 为 Hermitian 算子, 若 $A=A^*$. Hermitian 算子 $A\in\mathcal{L}(H)$ 为正定的, 若对任意的 $x\in H$, $(Ax,x)>0$; 若 $(Ax,x)\geqslant 0$ 则为半正定的. 若 A 是正定的, 则 $\sigma(A)\subseteq R^{\dagger}$; 若 A 是半正定的, 则 $\sigma(A)\subseteq R^{\dagger}\cup\{0\}$, 其中 $R^{\dagger}$ 为所有的数.

算子 $X\in\mathcal{L}(K,H)$ 为 $A\in\mathcal{L}(H,K)$ 的 Moore-Penrose 逆, 若 X 满足以下算子方程:

(1) $AXA=A$;

(2) $XAX=X$;

(3) $(AX)^*=AX$;

(4) $(XA)^*=XA$.

若算子 X 存在则记为 $A^{\dagger}$ (参见 [7], [127], [129], [144]). Moore-Penrose 逆 $A^{\dagger}$ 存在, 当且仅当 $\mathcal{R}(A)$ 是封闭的. 设 $i\in\{1,2,3,4\}$. 若 X 满足方程 (i), 则 X 为 A 的 $\{i\}$ 逆, 记作 $X=A^{(i)}$. A 的 $\{i\}$-逆记为 $A\{i\}$. 显然

$$A\{i,j\}\overset{\text{def}}{=}A\{i\}\cap A\{j\},\quad i,j\in\{1,2,3,4\}$$

且记为 $X^{(i,j)}$ 当 $X\in A\{i,j\}$.

定义 1.0.1[144]　*令 $A\in\mathcal{L}(H)$, 称满足方程*

$$A^{k+1}X=A^k,\quad XAX=X,\quad AX=XA \tag{1.0.1}$$

的算子 $X\in\mathcal{L}(H)$ 为算子 A 的 Drazin 逆, 记为 A^{D}. 满足方程组 (1.0.1) 的最小正整数 k 是 A 的指标. 特别地, 若 $\mathrm{ind}(A)=1$, 则 A^{D} 退化为 A 的群逆$A^{\#}$.

定义 1.0.2[144]　令 $A \in \mathcal{L}(H,K)$, $W \in \mathcal{L}(K,H)$ 且 $\operatorname{ind}(AW)=k$. $X \in \mathcal{L}(H,K)$ 称为算子 A 的 W-加权 Drazin 逆, 如果 X 满足

$$(AW)^{k+1}XW = (AW)^k, \quad XWAWX = X, \quad AWX = XWA. \tag{1.0.2}$$

若 X 存在, 则唯一 (见 [7]) 且记为 $X = A^{\mathrm{D},W}$. 容易看出, 若 $H = K$ 且 $W = I$, 则方程组 (1.0.2) 等同于方程组 (1.0.1), 此时, $A^{\mathrm{D},W} = A^{\mathrm{D}}$.

引理 1.0.1[70]　对算子 $A \in \mathcal{L}(H,K)$, $\mathcal{R}(A)$ 是闭的当且仅当存在一个算子 $X \in \mathcal{L}(K,H)$ 使得 $AXA = A$. 此时, A 称为正则的且 X 是 A 的一个内逆 (或 $\{1\}$-逆), 记为 $X = A^-$.

引理 1.0.2[130]　设 X, Y 是 Banach 空间, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, $W \in \mathcal{L}(Y,X)$, 则下列条件等价:

(1) T 是 W-加权 Drazin 可逆;

(2) TW 是 Drazin 可逆;

(3) WT 是 Drazin 可逆;

(4) 对一些 $k \geqslant 1$ 及 $\operatorname{des}(WT) < \infty$, $\operatorname{asc}(TW) = p < \infty$, $\mathcal{R}((TW)^{p+k})$ 是闭的;

(5) 对一些 $k \geqslant 1$ 及 $\operatorname{des}(TW) < \infty$, $\operatorname{asc}(WT) = q < \infty$, $\mathcal{R}((TW)^{q+l})$ 是闭的.

引理 1.0.3[55]　设 $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ 有闭的值域. X_1 和 X_2 是 X 的闭正交补子空间, 使得 $X = X_1 \oplus X_2$. Y_1 和 Y_2 是 Y 的闭正交补子空间, 使得 $Y = Y_1 \oplus Y_2$. 则算子 A 具有对应于正交直和子空间 $X = X_1 \oplus X_2 = \mathcal{R}(A^*) \oplus N(A), Y = Y_1 \oplus Y_2 = \mathcal{R}(A) \oplus N(A^*)$ 的如下矩阵形式:

(a)

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A^*) \end{pmatrix}, \tag{1.0.3}$$

其中 $D = A_1A_1^* + A_2A_2^*$ 且 $D > 0$. 此时

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} A_1^*D^{-1} & 0 \\ A_2^*D^{-1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.0.4}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathcal{R}(A^*) \\ \mathcal{N}(A) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}, \tag{1.0.5}$$

其中 $D = A_1A_1^* + A_2A_2^*$ 且 $D > 0$. 此时有

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} D^{-1}A_1^* & D^{-1}A_2^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.0.6}$$

引理 1.0.4[55]　设 $A\in\mathcal{L}(X,X)$, 则 A 是 Drazin 可逆的当且仅当 $\operatorname{ind}(A)=k<\infty$. 此时, 子空间 $\mathcal{R}(A^k)$ 和 $\mathcal{N}(A^k)$ 是 X 的闭子空间, $X=\mathcal{R}(A^k)\oplus\mathcal{N}(A^k)$:

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}:\begin{pmatrix} \mathcal{R}(A^k) \\ \mathcal{N}(A^k) \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} \mathcal{R}(A^k) \\ \mathcal{N}(A^k) \end{pmatrix}, \tag{1.0.7}$$

其中 A_1 可逆, A_2 幂零, 此时有

$$A^{\mathrm{D}}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.0.8}$$

引理 1.0.5[55]　设 $A\in\mathcal{L}(X,X)$, 则 A 群可逆, 当且仅当 A 具有如下的分块形式:

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}:\begin{pmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A) \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A) \end{pmatrix}, \tag{1.0.9}$$

其中 A_1 可逆. 此时有

$$A^{\#}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}:\begin{pmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A) \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A) \end{pmatrix}. \tag{1.0.10}$$

容易验证如下算子广义逆的结果.

引理 1.0.6　设 $A\in\mathcal{L}(H,K)$, 则

(1) $A\{1\}=\{A^{(1)}+W-A^{(1)}AWAA^{(1)}:W\in\mathcal{L}(K,H)\}$
$\qquad=\{A^{(1)}+(I-A^{(1)}A)W_1+W_2(I-AA^{(1)}):W_i\in\mathcal{L}(K,H),i=1,2\}$;

(2) $A\{1,2\}=\{X_1AX_2:X_i\in A(1),i=1,2\}$
$\qquad=\{[A^\dagger+(I-A^\dagger A)W_1]A[A^\dagger+W_2(I-AA^\dagger)]:W_i\in\mathcal{L}(K,H),i=1,2\}$;

(3) $A\{1,3\}=\{A^{(1,3)}+(I-A^{(1,3)}A)W:W\in\mathcal{L}(K,H)\}$;

(4) $A\{1,4\}=\{A^{(1,4)}+W(I-AA^{(1,4)}):W\in\mathcal{L}(K,H)\}$;

(5) $A\{1,2,3\}=\{A^{(1,2,3)}+(I-A^{(1,2,3)}A)WA^{(1,2,3)}:W\in\mathcal{L}(K,H)\}$;

(6) $A\{1,2,4\}=\{A^{(1,2,4)}+A^{(1,2,4)}W(I-A^{(1,2,4)}A):W\in\mathcal{L}(K,H)\}$;

(7) $A\{1,3,4\}=\{A^{(1,3,4)}+(I-A^{(1,3,4)}A)W(I-AA^{(1,3,4)}):W\in\mathcal{L}(K,H)\}$.

定义 1.0.3[7]　设 H, K 为 Hilbert 空间且 $A\in\mathcal{L}(H,K)$. $M\in\mathcal{L}(K)$, $N\in\mathcal{L}(H)$ 是正算子. 若存在算子 $X\in\mathcal{L}(K,H)$ 满足

(1) $AXA=A$;

(2) $XAX=X$;

(3) $(MAX)^*=MAX$;

(4) $(NXA)^*=NXA$,

则称 X 为 A 的加权 Moore-Penrose 逆, 记为 $X=A^\dagger_{MN}$.

$A^\dagger_{MN}$ 存在当且仅当 $\mathcal{R}(M^{\frac{1}{2}}AN^{-\frac{1}{2}})$ 是闭的, 此时

$$A^\dagger_{MN} = N^{-\frac{1}{2}}(M^{\frac{1}{2}}AN^{-\frac{1}{2}})^\dagger M^{\frac{1}{2}}.$$

引理 1.0.7[55] 设 $A \in \mathcal{L}(H,K)$ 具有闭值域, 则 Hilbert 空间 H 和 K 分别具有空间正交直和分解 $H = \mathcal{R}(A^*) \oplus \mathcal{N}(A)$ 和 $K = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A^*)$. 于是算子 A 关于 H 和 K 的这种分解具有矩阵分块表示:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathcal{R}(A^*) \\ \mathcal{N}(A) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A^*) \end{pmatrix}, \tag{1.0.11}$$

其中 $A_1 : \mathcal{R}(A^*) \to \mathcal{R}(A)$ 是可逆算子. 此时 A 的 Moore-Penrose 逆 $A^\dagger \in \mathcal{B}(K,H)$ 具有矩阵表示:

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A^*) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathcal{R}(A^*) \\ \mathcal{N}(A) \end{pmatrix}. \tag{1.0.12}$$

引理 1.0.8[7] 设 H, K 为 Hilbert 空间且 $A \in \mathcal{L}(H,K)$. $M \in \mathcal{L}(K)$, $N \in \mathcal{L}(H)$ 是正算子且 $\mathcal{R}(M^{\frac{1}{2}}AN^{-\frac{1}{2}})$ 是闭集, 则 $X = A^\dagger_{MN}$ 有下列性质:

(1) $(A^\dagger_{MN})^\dagger_{NM} = A$, $(A^\dagger_{MN})^* = (A^*)^\dagger_{N^{-1},M^{-1}}$;

(2) $\mathcal{R}(A^\dagger_{MN}) = N^{-1}\mathcal{R}(A^*) = \mathcal{R}(A^\sharp)$, $\mathcal{N}(A^\dagger_{MN}) = M^{-1}\mathcal{N}(A^*) = \mathcal{N}(A^\sharp)$;

(3) $AA^\dagger_{MN} = P_{\mathcal{R}(A),M^{-1}\mathcal{N}(A^*)} = P_{\mathcal{R}(A),\mathcal{N}(A^\sharp)}$,
$A^\dagger_{MN}A = P_{N^{-1}\mathcal{R}(A^*),\mathcal{N}(A)} = P_{\mathcal{R}(A^\sharp),\mathcal{N}(A)}$.

在本书中, X, Y 表示 Banach 空间, 且 $\mathcal{B}(X,Y)$ 表示所有从 X 到 Y 的线性算子集. 若 $X = Y$, 则 $B(X,Y) = B(X)$, $A \in \mathcal{B}(X)$, $\mathcal{R}(\mathcal{A})$, $\mathcal{N}(\mathcal{A})$, $\sigma(A)$, $r(A)$ 分别表示值域、零空间、谱、谱半径. 相应地, $A \in \mathcal{B}(X)$, 若存在 X 满足

$$XAX = X, \quad AX = XA, \quad A^{k+1}X = A^k, \tag{1.0.13}$$

则 X 为 A 的 Drazin 逆, 记为 $X = A^{\mathrm{D}}$. 最小的正整数值 k 满足 (1.0.13), 记为 A 的指标 $\mathrm{ind}(A)$.

在文献 [77] 中, Koliha 介绍了一个广义 Drazin 逆的概念. $A \in B(X)$ 的广义 Drazin 逆算子存在当且仅当 $0 \notin \mathrm{acc}\sigma(A)$. 若 $0 \notin \mathrm{acc}\sigma(A)$, 则存在 $\mathbb{C}$ 的开集 U 和 V, 满足 $\sigma(A) \setminus \{0\} \subset U$, $0 \in V$, $U \cap V = \varnothing$. 定义 f 如下:

$$f(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda \in V, \\ \dfrac{1}{\lambda}, & \lambda \in U, \end{cases}$$

正则函数 f 定义在 $\sigma(A)$ 的邻域上. A 的 Drain 逆定义为 $f(A) = A^{\mathrm{D}}$.

引理 1.0.9 [65]　若 $A\in\mathcal{B}(X)$, $B\in\mathcal{B}(Y)$ (广义) Drazin 可逆, $C\in\mathcal{B}(Y,X)$, $D\in\mathcal{B}(X,Y)$, 且

$$M=\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix},\quad N=\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & A \end{pmatrix}$$

也是 (广义) Drazin 逆存在的,

$$M^{\mathrm{D}}=\begin{pmatrix} A^{\mathrm{D}} & S \\ 0 & B^{\mathrm{D}} \end{pmatrix},\quad N^{\mathrm{D}}=\begin{pmatrix} B^{\mathrm{D}} & 0 \\ S & A^{\mathrm{D}} \end{pmatrix}; \tag{1.0.14}$$

其中 $S=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(A^{\mathrm{D}})^{n+2}CB^nB^\pi+\sum\limits_{n=0}^{\infty}A^\pi A^nC(B^{\mathrm{D}})^{n+2}-A^{\mathrm{D}}CB^{\mathrm{D}}$.

引理 1.0.10[79]　设 $A\in\mathcal{B}(X)$(广义) Drazin 可逆. 若 $r(A)>0$, 则

$$\mathrm{dist}(0,\sigma(A)\backslash\{0\})=(r(A^{\mathrm{D}}))^{-1}.$$

引理 1.0.11[65]　设 $Q\in\mathcal{B}(X)$(广义) Drazin 可逆, 且 $AQ=0$, 则 $A+Q$ (广义) Drazin 可逆, 且

$$(A+Q)^{\mathrm{D}}=Q^\pi\sum_{n=0}^{\infty}Q^n(A^{\mathrm{D}})^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(Q^{\mathrm{D}})^{n+1}A^nA^\pi.$$

引理 1.0.12[49]　设 $Q\in\mathcal{B}(X)$ (广义) Drazin 可逆, 且 $AQ=QA$, 则 $A+Q$ (广义) Drazin 可逆当且仅当 $I+A^{\mathrm{D}}Q$ (广义) Drazin 可逆, 且

$$(A+Q)^{\mathrm{D}}=A^{\mathrm{D}}(I+A^{\mathrm{D}}Q)^{\mathrm{D}}QQ^{\mathrm{D}}+Q^\pi\sum_{n=0}^{\infty}(-Q)^n(A^{\mathrm{D}})^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(Q^{\mathrm{D}})^{n+1}(-A)^nA^\pi$$

且

$$(A+Q)(A+Q)^{\mathrm{D}}=(AA^{\mathrm{D}}+QA^{\mathrm{D}})(I+A^{\mathrm{D}}Q)QQ^{\mathrm{D}}+Q^\pi AA^{\mathrm{D}}+QQ^{\mathrm{D}}A^\pi.$$

众所周知, 已知的广义逆如 Moore-Penrose 逆 $A^\dagger$, 群 Moore-Penrose 逆 $A^\dagger_{MN}$, Drazin 逆 A^{D}, 群逆 $A^\#$, Bott-Duffin 逆 $A^{(-1)}_{(L)}$, 广义 Bott-Duffin 逆 $A^{(\dagger)}_{(L)}$, 等等, 都是给定值域 T 和零空间 S 的广义 $A^{(2)}_{T,S}$ 逆, $\{2\}$-逆.

Chen 和 Hartwig[30] 定义了迭代公式

$$R_k=P-PAX_k,\quad X_{k+1}=X_k(I+R_k+\cdots+R_k^{p-1}),\quad k=0,1,2,\cdots, \tag{1.0.15}$$

其中 $P^2=P$ 并且 $p\geqslant 2$. 这个迭代公式被用来计算一个矩阵的 Moore-Penrose 逆和 Drazin 逆.

引理 1.0.13[56]　令 $A \in \mathcal{B}(X,Y)$, T 和 S 分别为 X 和 Y 的闭子空间, 那么下列陈述等价:

(1) A 有一个 $\{2\}$-逆 $B \in \mathcal{B}(Y,X)$ 使得 $\mathcal{R}(B)=T$ 及 $\mathcal{N}(B)=S$;

(2) T 是 X 的一个补子空间, $A(T)$ 是闭的, $A|_T : T \to A(T)$ 可逆并且 $A(T) \oplus S = Y$.

当 (1) 或者 (2) 成立的情况下, B 是唯一的, 并记为 $A^{(2)}_{T,S}$.

引理 1.0.14[59]　假设引理 1.0.13 的条件都成立. 如果我们取 $T_1 = \mathcal{N}(A^{(2)}_{T,S}A)$, 那么 $X = T \oplus T_1$ 成立并且 A 有如下矩阵形式:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} T \\ T_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A(T) \\ S \end{pmatrix}, \tag{1.0.16}$$

其中 A_1 可逆. 此外, $A^{(2)}_{T,S}$ 有如下矩阵形式:

$$A^{(2)}_{T,S} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} A(T) \\ S \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} T \\ T_1 \end{pmatrix}. \tag{1.0.17}$$

引理 1.0.15[125]　设 $a \in \mathcal{A}$, 则

(1) $\sigma(a)$ 是 $\mathbb{C}$ 的非空子集;

(2) (多项的普映射定理) 如果 f 是一个多项式, 那么

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a));$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ 当且仅当 $\rho(a) < 1$.

第 2 章　算子广义逆的性质

2.1　算子广义逆的吸收律

本节主要考虑了 $\{1\}$- 逆, $\{1,2\}$- 逆, $\{1,3\}$-逆和 $\{1,4\}$-逆吸收律成立的充要条件. 同时, 也考虑了广义逆多种形式的混合吸收律.

设 H 和 K 是复 Hilbert 空间且 $\mathcal{L}(H,K)$ 定义为从 H 到 K 的所有有界线性算子集合. 对于给定的 $A \in \mathcal{L}(H,K)$, 符号 $\mathcal{N}(A)$ 和 $\mathcal{R}(A)$ 分别表示 A 的零空间和值域.

称 $A \in \mathcal{L}(H,K)$ 有 Moore-Penrose 逆, 若存在算子 $X \in \mathcal{L}(K,H)$, 使得

$$\begin{aligned} &(1)\ AXA = A; \\ &(2)\ XAX = X; \\ &(3)\ (AX)^* = AX; \\ &(4)\ (XA)^* = XA. \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

算子 $A \in \mathcal{L}(H,K)$ 的 Moore-Penrose 逆存在当且仅当 A 有闭值域且唯一, 被记为 $A^{\dagger}$.

对 $\eta \subseteq \{1,2,3,4\}$, 称 B 是一个 η-逆, 若 B 满足 (2.1.1) 中的 η 方程, 记 $A\eta$ 是所有 $A-\eta$ 的集合.

设 $A, B \in \mathcal{L}(H,K)$. 若对每一个 $E \in A\eta$ 和 $F \in B\eta$,

$$E + F = E(A+B)F, \tag{2.1.2}$$

那么我们说 A 和 B 的 η-逆吸收律是满足的. 更多地, 对任意 $E \in A\eta$ 和 $F \in B\mu$, 若 (2.1.2) 成立, 那么我们说 A 和 B 的混合吸收律是满足的. 显然, 如果 A 和 B 是可逆算子, 那么

$$A^{-1} + B^{-1} = A^{-1}(A+B)B^{-1}$$

总是满足的.

矩阵的吸收律被 Chen, Zhang 和 Guo[39] 及 Lin 和 Gao[82] 所研究. 文献 [53] 利用广义 Schur 补的秩描述了 $G + H - G(A+B)H$ 的极大极小秩, 在这种情况下, G 和 H 分别是 A 和 B 的广义逆. 基于这些, $\{1,3\}$-逆和 $\{1,4\}$-逆吸收律的条件已被得到. 文献 [39] 利用矩阵秩的方法、广义 Schur 补及奇异值分解考虑了 $\{1,2\}$-逆和 $\{1,3\}$-逆的混合第一、第二吸收律.

首先, 介绍几个引理.

引理 2.1.1[144] 设 $A \in \mathcal{L}(H,K)$ 有闭值域且 $B \in \mathcal{L}(K,H)$, 则下列陈述等价:

(1) $ABA = A$ 和 $(AB)^* = AB$;

(2) 存在 $X \in \mathcal{L}(K,H)$, $B = A^\dagger + (I - A^\dagger A)X$.

引理 2.1.2[144] 设 $A \in \mathcal{L}(H,K)$ 有闭值域且 $B \in \mathcal{L}(K,H)$, 那么下列陈述等价:

(1) $ABA = A$, $(BA)^* = BA$;

(2) $B = A^\dagger + Y(I - AA^\dagger)$, 存在 $Y \in \mathcal{L}(K,H)$.

本节将给出 Moore-Penrose 逆, $\{1\}$- 逆, $\{1,2\}$- 逆, $\{1,3\}$-逆和 $\{1,4\}$-逆吸收律成立的充要条件.

假设 A 和 B 为

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathcal{R}(B^*) \\ \mathcal{N}(B) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A^*) \end{pmatrix} \tag{2.1.3}$$

和

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ B_2 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathcal{R}(B^*) \\ \mathcal{N}(B) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A^*) \end{pmatrix}. \tag{2.1.4}$$

此时有

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} A_1^* D^{-1} & 0 \\ A_2^* D^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad B^\dagger = \begin{pmatrix} E^{-1} B_1^* & E^{-1} B_2^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中, $D = A_1 A_1^* + A_2 A_2^*$, $E = B_1^* B_1 + B_2^* B_2$.

定理 2.1.3 设 $A, B \in \mathcal{L}(H,K)$ 使得 $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{R}(B)$ 是闭的, 则下列陈述等价:

(1) $A^\dagger + B^\dagger = A^\dagger (A+B) B^\dagger$;

(2) $\mathcal{R}(B^*) \subseteq \mathcal{R}(A^*)$, $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B)$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2): 由 $A^\dagger(A+B)B^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$ 可知, 下列四个等式成立:

$$A_1^* D^{-1} A_1 E^{-1} B_1^* + A_1^* D^{-1} B_1 E^{-1} B_1^* = A_1^* D^{-1} + E^{-1} B_1^*, \tag{2.1.5}$$

$$A_1^* D^{-1} A_1 E^{-1} B_2^* + A_1^* D^{-1} B_1 E^{-1} B_2^* = E^{-1} B_2^*, \tag{2.1.6}$$

$$A_2^* D^{-1} A_1 E^{-1} B_1^* + A_2^* D^{-1} B_1 E^{-1} B_1^* = A_2^* D^{-1}, \tag{2.1.7}$$

$$A_2^* D^{-1} A_1 E^{-1} B_2^* + A_2^* D^{-1} B_1 E^{-1} B_2^* = 0. \tag{2.1.8}$$

现在, 由 $(2.1.5) \times B_1 + (2.1.6) \times B_2$ 可得

$$A_1^* D^{-1} A_1 + A_1^* D^{-1} B_1 = A_1^* D^{-1} B_1 + I, \quad 即\ A_1^* D^{-1} A_1 = I.$$

由 $(2.1.7) \times B_1 + (2.1.8) \times B_2$ 可知

$$A_2^* D^{-1} A_1 + A_2^* D^{-1} B_1 = A_2^* D^{-1} B_1, \quad 即\ A_2^* D^{-1} A_1 = 0.$$

由 $A_1 \times (2.1.5) + A_2 \times (2.1.7)$ 可知

$$A_1E^{-1}B_1^* + B_1E^{-1}B_1^* = I + A_1E^{-1}B_1^*, \quad \text{即 } B_1E^{-1}B_1^* = I.$$

由 $A_1 \times (2.1.6) + A_2 \times (2.1.8)$ 可知

$$A_1E^{-1}B_2^* + B_1E^{-1}B_2^* = A_1E^{-1}B_1^*, \quad \text{即 } B_1E^{-1}B_2^* = 0.$$

容易验证 $B^\dagger BA^\dagger A = B^\dagger B$ 和 $AA^\dagger BB^\dagger = AA^\dagger$ 等价于 $BA^\dagger A = B$ 和 $BB^\dagger A = A$.

(2) ⇒ (1): 设 $\mathcal{R}(B^*) \subseteq \mathcal{R}(A^*)$ 和 $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B)$, 那么

$$B^\dagger BA^\dagger A = B^\dagger B \quad \text{和} \quad AA^\dagger BB^\dagger = AA^\dagger,$$

即

$$A_1^*D^{-1}A_1 = I, \quad A_2^*D^{-1}A_1 = 0, \quad B_1E^{-1}B_1^* = I, \quad B_1E^{-1}B_2^* = 0.$$

通过计算可知 (1) 成立.

接下来, 我们考虑 $\{1\}$-逆的吸收律.

定理 2.1.4 设 $A, B \in \mathcal{L}(H, K)$ 使得 $\mathcal{R}(A), \mathcal{R}(B)$ 是闭的, 则下列陈述等价:

(1) $A^{(1)} + B^{(1)} = A^{(1)}(A+B)B^{(1)}, \forall A^{(1)} \in A\{1\}, \forall B^{(1)} \in B\{1\}$;

(2) $A^\dagger A = I$, $BB^\dagger = I$.

证明 根据引理 1.0.6, 任意 $A^{(1)}$ 和 $B^{(1)}$ 有下列矩阵形式:

$$\begin{aligned} A^{(1)} &= A^\dagger + X - A^\dagger AXAA^\dagger \\ &= \begin{pmatrix} A_1^*D^{-1} + X_{11} - A_1^*D^{-1}A_1X_{11} - A_1^*D^{-1}A_2X_{21} & X_{12} \\ A_2^*D^{-1} + X_{21} - A_2^*D^{-1}A_1X_{11} - A_2^*D^{-1}A_2X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} B^{(1)} &= B^\dagger + Y - B^\dagger BYBB^\dagger \\ &= \begin{pmatrix} E^{-1}B_1^* + Y_{11} & E^{-1}B_2^* + Y_{12} \\ -(Y_{11}B_1 + Y_{12}B_2)E^{-1}B_1^* & -(Y_{11}B_1 + Y_{12}B_2)E^{-1}B_2^* \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

设

$$A^{(1)}(A+B)B^{(1)} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix},$$