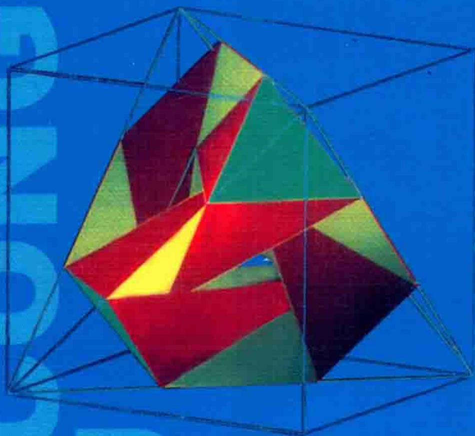
数学奥林匹克小丛书

初中卷 7

Shuxue Aolinpike XIAOCONGSHU



四边形：从分解到组合

沈文选 冷岗松 编著

华东师范大学出版社

Shuxue A

Xiao

Congshu

Shuxue

olinpike

数学奥林匹克小丛书

初中卷 7

四边形：从分解到组合

Olinpike Xiao Congshu ● 沈文选 冷岗松 编著

华东师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学奥林匹克小丛书．初中卷．四边形：从分解到组合/沈文选，冷岗松编著．—上海：华东师范大学出版社，2005.3
ISBN 7-5617-4078-6

I.数... II.①沈...②冷... III.数学课-初中-教学参考资料 IV.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第016381号

数学奥林匹克小丛书·初中卷
四边形：从分解到组合

编　　著　沈文选　冷岗松
策划组稿　倪　明
责任编辑　徐惟简
封面设计　高　山
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
　　　　　市场部 电话 021-62865537
　　　　　门市(邮购) 电话 021-62869887
　　　　　门市地址 华东师大校内先锋路口
业务电话　上海地区 021-62232873
　　　　　华东 中南地区 021-62458734
　　　　　华北 东北地区 021-62571961
　　　　　西南 西北地区 021-62232893
业务传真　021-62860410 62602316
http://www.ecnupress.com.cn
社　　址　上海市中山北路3663号
　　　　　邮编 200062

印 刷 者　江苏宜兴市德胜印刷有限公司
开　　本　787×960 16开
印　　张　9
字　　数　149千字
版　　次　2005年4月第一版
印　　次　2005年4月第一次
印　　数　16 000
书　　号　ISBN 7-5617-4078-6/G·2318
定　　价　11.00元

出 版 人　朱杰人

本书导读

本书全面、系统地介绍了一般四边形与特殊四边形（平行四边形、矩形、菱形、正方形、梯形、与圆有关的四边形等）的基本性质．书中通过大量有关四边形的数学竞赛题是如何运用这些基本性质来处理，以及一些非四边形问题的数学竞赛题是如何分解或组合成四边形问题而求解，详细介绍了四边形基本性质的灵活运用．每一单元配有一定量的习题，供读者进行实战训练．本书对提高数学竞赛的水平有很大帮助．

沈文选　湖南师大数学与计算机科学学院教授、硕士生导师、奥林匹克数学研究所负责人，中国数学奥林匹克高级教练，全国初等数学研究协调组成员，全国高师数学教育研究会常务理事，《数学教育学报》编委，湖南省数学会初等数学委员会副主任．长期从事数学教育和数学竞赛研究，出版著作有《单形论导引——三角形的高维推广研究》、《矩阵的初等应用》、《竞赛数学教程》、《初等数学研究教程》等30种，发表论文200多篇，曾参与数学冬令营、全国高中联赛、全国初中联赛等竞赛的命题工作．

数学奥林匹克小丛书

冯志刚	第44届IMO中国队副领队 上海中学特级教师
葛　军	中国数学奥林匹克高级教练、江苏省数学会普委会副主任 南京师范大学副教授
冷岗松	中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练 上海大学教授、博士生导师
李胜宏	第44届IMO中国队领队、中国数学奥林匹克委员会委员 浙江大学教授、博士生导师
李伟固	中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练 北京大学教授、博士生导师
刘诗雄	中国数学奥林匹克委员会委员 武钢三中校长、特级教师
倪　明	数学奥林匹克小丛书总策划 华东师范大学出版社副总编辑
单　墫	第30、31届IMO中国队领队 南京师范大学教授、博士生导师
吴建平	中国数学会普委会副主任、中国数学奥委会副主席 第40届IMO中国队副领队、《中学生数学》主编
熊　斌	第46届IMO中国队领队、中国数学奥林匹克委员会委员 华东师范大学副教授
余红兵	中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练 苏州大学教授、博士生导师
朱华伟	中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练 广州大学软件所常务副所长、研究员

总　序

数学竞赛像其他竞赛活动一样，是青少年学生的一种智力竞赛．在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中，数学竞赛的历史最悠久、国际性强，影响也最大．我国于1956年开始举行数学竞赛，当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动，并组织出版了一系列青少年数学读物，激励了一大批青年学生立志从事科学事业．我国于1986年起参加国际数学奥林匹克，多次获得团体总分第一，并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克，这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位，为各国科学家与教育家所瞩目．

我国数学竞赛活动表明，凡是开展好的地区和单位，都能大大激发学生的学习数学的兴趣，有利于培养创造性思维，提高学生的学习效率．这项竞赛活动，将健康的竞争机制引进数学教学过程中，有利于选拔人才．由数学竞赛选拔的优胜者，既有踏实广泛的数学基础，又有刻苦钻研、科学的学习方法，其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者．在美国，数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺（J.W.Milnor）、芒福德（D.B.Mumford）、奎伦（D.Quillen）等都是菲尔兹数学奖的获得者；在波兰，著名数论专家辛哲尔（A.Schinzel）学生时代是一位数学竞赛优胜者；在匈牙利，著名数学家费叶尔（L.Fejér）、里斯（M.Riesz）、舍贵（G.Szegö）、哈尔（A.Haar）、拉多（T.Radó）等都曾是数学竞赛获奖者．匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家，产生了同它的人口不成比例的许多大数学家！

在开展数学竞赛的活动同时，各学校能加强联系，彼此交流数学教学经验，从这种意义上来说，数学竞赛可能成为数学课程改革的“催化剂”，成为培养优秀人才的有力措施．

不过，应当注意在数学竞赛活动中，注意普及与提高相结合，而且要以普及为主，使竞赛具有广泛的群众基础，否则难以持久．

当然，现在有些人过于关注数学竞赛的成绩，组织和参与都具有很强的功利目的，过分扩大数学竞赛的作用，这些都是不正确的，违背了开展数学竞赛活动的本意. 这些缺点有其深层次的社会原因，需要逐步加以克服，不必因为有某些缺点，就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版. 这套书，规模大、专题细. 据我所知，这样的丛书还不多见. 这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述，而且对竞赛题作了精到的分析解答，不少出自作者自己的研究所得，是一套很好的数学竞赛专题教程，也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员，不少是国家集训队的教练和国家队的领队. 他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在IMO上取得成绩、为国争光作出了贡献，为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动. 华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向IMO》等竞赛图书基础上，策划组织了这套丛书，花了不少心血. 我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作，并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

王元

王元，著名数学家，中国科学院院士，曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

目　录

1 四边形的基本概念与性质

1.1 四边形的基本概念与三角形

四边形是人们日常生活和生产中应用较广的一种几何图形,是平面几何中的基本图形,也是平面几何研究的主要对象.四边形有凸四边形(每一个内角均小于平角)、凹四边形(有一个内角大于平角)和折四边形(有两条边相交),这里我们只讨论凸四边形和特殊凸四边形.对于平行四边形、矩形、菱形、正方形、梯形等特殊凸四边形,它们有着一系列美妙的性质,我们将在以后各节分别介绍.

凸四边形有四条边,四个内角.凸四边形的全等是要求对应边都相等且对应角都相等,凸四边形的相似是要求对应角都相等且对应边都成比例.凸四边形的内角和为 $360°$,其外角和也为 $360°$.连接凸四边形两个不相邻的顶点的线段称为四边形的对角线.凸四边形的每条对角线将四边形分割成两个三角形.因此,开始研究凸四边形时,常通过作辅助线把四边形转化为三角形,运用三角形的知识来研究四边形问题.例如,前述的四边形的内角和定理即是.但当我们获得了四边形的这些基本性质后,就可直接运用这些性质,不必再回到三角形的方法中去了.值得注意的是,在求解某些四边形问题时,常常将四边形分割成一些三角形或将四边形补形成三角形来处理.

例1 (1) 一个凸四边形的四个内角之比为 $1:5:6:6$,求四个内角的度数;

(2) 凸四边形的四个内角可能都是钝角吗?最多有几个钝角?最少有几个钝角?

解 (1) 设凸四边形的最小内角为 $x°$,则其他三个内角分别为 $5x°$,$6x°$,$6x°$,根据四边形内角和定理,知

$$x+5x+6x+6x=360.$$

解得　$x = 20$.

从而　$5x = 100$, $6x = 120$.

故凸四边形四个内角度数分别为 $20°$, $100°$, $120°$, $120°$.

(2) 凸四边形的四个内角不可能都是钝角. 因为若四个内角都是钝角,即每个内角都大于 $90°$,则四个内角和大于 $360°$,这与四边形内角和定理矛盾.

凸四边形最多有三个钝角,凸四边形可以没有钝角(四个角均为直角).

例 2　如图 1-1,四边形 $ABCD$ 内有两点 E、F,使 A、B、C、D、E、F 中任意三点都不在同一条直线上,连接这些点,得若干线段,把四边形分成若干个互不重叠的三角形,则所有这些三角形的内角和为________;同样,若四边形 $ABCD$ 内有 n 个点,使 A、B、C、D 和这 n 个点中任意三点都不在同一条直线上,以 A、B、C、D 和这 n 个点为顶点作成若干个互不重叠的三角形,则所有这些三角形的内角和为________. (第 9 届"希望杯"竞赛题)

解　如图,在四边形 $ABCD$ 中,以 A、B、C、D、E、F 为顶点作成互不重叠的三角形有 6 个,易得这些三角形的内角和为 $1\,080°$.

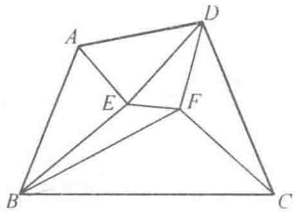


图 1-1

若四边形内有 n 个点,则以这 n 个点所成 n 个周角,再加上原来四边形的内角和 $360°$,即得

$$n \cdot 360° + 360° = (n+1) \cdot 360°.$$

故在两填空处分别填 $1\,080°$, $(n+1) \cdot 360°$.

注　以这些点为顶点作成互不重叠的三角形的方法不唯一. 另外,第一问也可按第二问求解思路处理.

例 3　如图 1-2,四边形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = 90°$, $AB = BC = 2\sqrt{3}$, $AC = 6$, $AD = 3$, 则 CD 的长是(　　).

A. 4　　　　B. $4\sqrt{2}$

C. $3\sqrt{2}$　　　　D. $3\sqrt{3}$

(2001 年江苏省竞赛题)

解　选 D. 理由:过 B 作 $BE \perp AC$ 于 E,则 $AE = 3$, $BE = \sqrt{3}$. 从而 $\angle BAE = 30°$, $\angle DAE = 60°$.

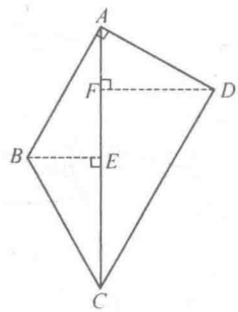


图 1-2

过 D 作 $DF \perp AC$ 于 F,则 $\angle ADF = 30°$, $AF = \frac{1}{2}AD = \frac{3}{2}$. 从而 $CF = \frac{9}{2}$.

在 Rt△ADF 中，可得

$$DF=\sqrt{AD^2-AF^2}=\sqrt{9-\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

在 Rt△CDF 中，可得

$$CD=\sqrt{CF^2+FD^2}=\sqrt{\frac{81}{4}+\frac{27}{4}}=3\sqrt{3}.$$

另解：过 B 作 $BE\perp AC$ 于 E，则 $AE=3$，连 ED，可推证得△AED 为正三角形，则 $ED=AE=EC$，知△ADC 为直角三角形，$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=3\sqrt{3}$.

例 4 如图 1-3，四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=60°$，$\angle B=\angle D=90°$，$AD=8$，$AB=7$，则 $BC+CD$ 等于（　　）.

A. $6\sqrt{3}$　　B. $5\sqrt{3}$　　C. $4\sqrt{3}$　　D. $3\sqrt{3}$

（2003 年山东省竞赛题）

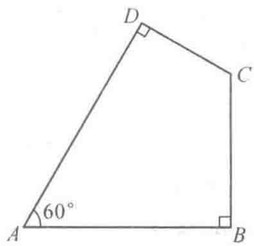


图 1-3

解 选 B. 理由：延长 AD、BC 相交于 E，在 Rt△ABE中，由 $\angle A=60°$，有 $AE=2AB=14$，从而 $DE=AE-AD=6$，又可求得 $BE=7\sqrt{3}$.

在 Rt△CDE 中，可求得 $CD=2\sqrt{3}$，$CE=4\sqrt{3}$.

于是 $BC=BE-CE=3\sqrt{3}$，故 $BC+CD=5\sqrt{3}$.

例 5 （1）如图 1-4，已知四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$\angle BAD=60°$，$\angle BCD=120°$. 证明：$BC+DC=AC$.

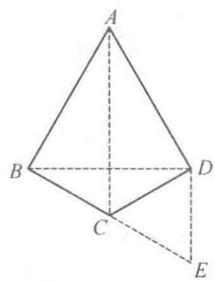


图 1-4

（2）如图 1-5，四边形 $ABCD$ 中，$AB=BC$，$\angle ABC=60°$，P 为四边形 $ABCD$ 内一点，且 $\angle APD=120°$. 证明：$PA+PD+PC\geqslant BD$.（2000 年江苏省竞赛题）

证明 （1）如图 1-4，延长 BC 至 E，使 $CE=CD$，连 DE.

由 $\angle BCD=120°$，知 $\angle DCE=60°$. 又由 $CE=CD$，知△CDE 为等边三角形. 即有 $DE=CD=CE$，$\angle CDE=60°$.

又因 $AB=AD$，$\angle BAD=60°$，连 BD，知△ABD 为等边三角形. 即 $AB=AD=BD$，$\angle BDA=60°$.

连 AC，在△ACD 和△BED 中，由 $\angle ADB=\angle CDE$，知

$$\angle ADC = \angle ADB + \angle BDC = \angle CDE + \angle BDC = \angle BDE.$$

又 $AD = BD$，$CD = DE$，故 $\triangle ACD \cong \triangle BED$. 于是

$$AC = BE = BC + CE = BC + CD.$$

即

$$BC + DC = AC.$$

（2）如图 1-5，在四边形 $ABCD$ 外侧作正 $\triangle AB'D$. 由 $\angle APD = 120°$，知四边形 $APDB'$ 符合(1)的条件，连 $B'P$，则 $B'P = AP + PD$.

连 $B'C$，则易知 $B'C \leqslant PB' + PC$，得 $B'C \leqslant AP + PD + PC$.

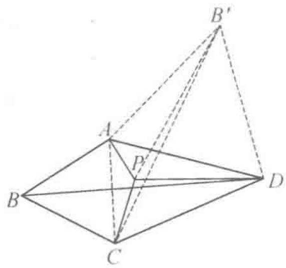


图 1-5

下面证明 $BD = B'C$.

因 $\triangle AB'D$ 是正三角形，故 $AB' = AD$，$\angle B'AD = 60°$.

连 AC，又易知 $\triangle ABC$ 为正三角形，故 $AC = AB$、$\angle BAC = 60°$.

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACB'$ 中，$\angle DAB = \angle DAC + \angle BAC = \angle DAC + \angle DAB' = \angle B'AC$，$AB = AC$，$AD = AB'$，故 $\triangle ABD \cong \triangle ACB'$.

从而 $BD = B'C$. 故 $PA + PD + PC \geqslant BD$.

例 6 如图 1-6，在四边形 $ABCD$ 中，F 为对角线 AC 上任一点，直线 BF 交 CD 所在直线于点 E，直线 DF 交 BC 所在直线于点 G. P 为 AC 上任一点，直线 PG 交 AB 所在直线于 R，PD 交 AE 所在直线于点 H. 求证：R、F、H 三点共线.

证明 因直线 AHE 截 $\triangle DCP$，由梅涅劳斯定理，得

$$\frac{DH}{HP} \cdot \frac{PA}{AC} \cdot \frac{CE}{ED} = 1. \qquad ①$$

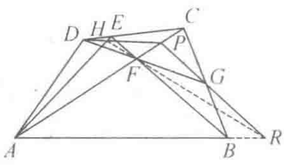


图 1-6

同理，由直线 ABR 截 $\triangle CPG$，得

$$\frac{PR}{RG} \cdot \frac{GB}{BC} \cdot \frac{CA}{AP} = 1. \qquad ②$$

由直线 BFE 截 $\triangle CGD$，得

$$\frac{GF}{FD} \cdot \frac{DE}{EC} \cdot \frac{CB}{BG} = 1. \qquad ③$$

由 ①×②×③，得

$$\frac{DH}{HP} \cdot \frac{PR}{RG} \cdot \frac{GF}{FD} = 1.$$

对$\triangle DPG$应用梅涅劳斯定理的逆定理，知R、F、H三点共线.

习 题 1.1

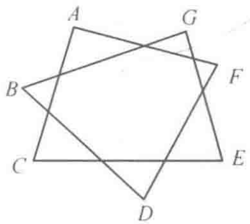
1 在四边形$ABCD$中，$BC > AB$，BD平分$\angle ABC$，$\angle A + \angle C = 180°$. 求证：$AD = CD$.

2 在四边形$ABCD$中，$\angle B = \angle D = 90°$，$AB = 2$，$CD = 1$，$\angle A : \angle C = 1 : 2$. 求$BC$和$AD$的长.

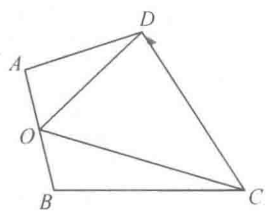
3 如图所示，$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F + \angle G$的值等于（　　）.

A. 360°　　B. 450°　　C. 540°　　D. 720°

（2003年"TRULY®信利杯"全国联赛题）



第3题图



第4题图

4 如图，在四边形$ABCD$中，$BC > CD > DA$，O为AB的中点，连OC，OD. 若$\angle AOD = \angle DOC = \angle COB = 60°$，则$BC$与$CD + DA$的关系为（　　）.

A. $BC > CD + DA$　　B. $BC = CD + DA$

C. $BC < CD + DA$　　D. 不能确定

5 设在凸四边形中，经过一组对边中点的直线与两条对角线所成的角相等. 求证：这两条对角线相等.（第24届全苏数学奥林匹克题）

6 给定凸四边形$ABCD$与形内一点O，且$\angle AOB = \angle COD = 120°$，且$AO = OB$，$CO = OD$. 设$K$、$L$、$M$分别为线段$AB$，$BC$，$CD$的中点. 求证：(1) $KL = LM$；(2) $\triangle KLM$为等边三角形.（第58届莫斯科数学奥林匹克题）

7 在凸四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC = 30°$，$\angle ADC = 60°$，又 $AD = DC$. 求证：$BD^2 = AB^2 + BC^2$.（1996 年北京市竞赛题）

8 设凸四边形 $ABCD$ 与凸四边形 $A'B'C'D'$ 的边对应相等（即 $AB = A'B'$，$BC = B'C'$，等等）. 求证：如果 $\angle A > \angle A'$，则必有 $\angle B < \angle B'$，$\angle C > \angle C'$，$\angle D < \angle D'$.（第 14 届莫斯科数学奥林匹克题）

9 在四边形 $ABCD$ 中，F 为对角线 AC 上任一点，直线 BF 交 CD 于点 E，直线 DF 交 BC 于点 G. P 为 AC 上任一点，直线 GP 交 AD 于点 H，直线 CH 交 AE 于点 K. 求证：B、P、K 三点共线.

1.2 四边形的面积问题

四边形的几个面积公式是运用三角形的知识，例如面积公式以及余弦定理等推证出来的.

如图 1-7，在凸四边形 $ABCD$ 中，四条边和两条对角线的长分别记为 $AB = a$，$BC = b$，$CD = c$，$DA = d$，$AC = e$，$BD = f$，两条对角线夹角为 θ，则

(1) $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}ef \cdot \sin\theta$; (1.2-1)

(2) $S_{ABCD} = \dfrac{1}{4}\sqrt{4e^2f^2 - (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2}$. (1.2-2)

证明 设 AC 与 BD 交于 O.

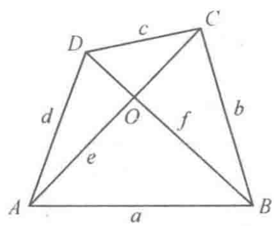


图 1-7

(1)
$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle COD} + S_{\triangle AOD} \\ &= \frac{1}{2}BO \cdot \sin\theta \cdot (AO + OC) + \\ &\quad \frac{1}{2}DO \cdot \sin\theta \cdot (OC + AO) \\ &= \frac{1}{2}ef \cdot \sin\theta. \end{aligned}$$

(2) 注意到三角形的余弦定理，令 $\angle AOB = \theta$，有

$$\begin{aligned} a^2 &= OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos\theta, \\ b^2 &= OB^2 + OC^2 - 2OB \cdot OC \cdot \cos(180° - \theta) \\ &= OB^2 + OC^2 + 2OB \cdot OC \cdot \cos\theta, \\ c^2 &= OC^2 + OD^2 - 2OC \cdot OD \cdot \cos\theta, \\ d^2 &= OD^2 + OA^2 + 2OA \cdot OD \cdot \cos\theta. \end{aligned}$$