微积分 Ⅰ

马 荣 张玉莲 王夕予 袁明霞 编

Calculus

南京大学出版社

微积分 I

马 荣 张玉莲 王夕予 袁明霞 编

Calculus

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分. Ⅰ / 马荣等编. —南京：南京大学出版社，2016. 8

ISBN 978 - 7 - 305 - 17074 - 4

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①马… Ⅲ. ①微积分—高等学校—教材 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 128661 号

出版发行 南京大学出版社
社 址 南京市汉口路 22 号 邮 编 210093
出 版 人 金鑫荣

书 名 微积分(Ⅰ)
编 者 马 荣 张玉莲 王夕予 袁明霞
责任编辑 刘 琦 编辑热线 025 - 83593923

照 排 南京理工大学资产经营有限公司
印 刷 南京京新印刷厂
开 本 718×960 1/16 印张 15 字数 214 千字
版 次 2016 年 8 月第 1 版 2016 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 978 - 7 - 305 - 17074 - 4
定 价 35.00 元

网 址:http://www.njupco.com
官方微博:http://weibo.com/njupco
微信服务号:njuyuexue
销售咨询热线:(025)83594756

前　言

本书是根据教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会2014年颁布的《大学数学课程教学基本要求》中“经济和管理类本科数学基础课程教学基本要求”编写的，可以作为大学经济和管理类学生学习微积分课程的教材和参考书，其他相关专业也可以使用。

作为面向独立学院经济和管理类学生的微积分教材，本书紧扣独立学院培养具有创新精神的应用型人才的目标，结合数学的学科特征，立足于基础与应用并重，以提高数学素养为目标。在基础与应用并重的思想指导下，我们编写教材与教学实践紧密结合，在实践中编写，编写后再实践，反复完善。在编写中，努力做到：

(1) 注重数学的思想与方法，使得学生通过学习本书，不仅获得基本概念、基本定理、基本方法，还能使学生得到一些基本的科学训练，学到数学的思维方式，提高逻辑推理能力。

(2) 注重数学的应用，使得学生通过本书的学习，能够更好地学习相关专业课的核心概念如边际成本、边际收入、边际利润、弹性等。

本书介绍了微积分的基本理论与方法。上册内容包含预备知识、极限与连续、导数与微分、一元函数积分学，下册内容包含向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、二重积分、无穷级数、常微分方程与差分方程，共九章，适用于应用型本科院校，尤其是独立学院各相关专业。本书可安排两个学期，每周6学时，共讲授192学时。书中用“*”标出段落为较难内容，供任课教师选用，一般留给有兴趣的学生课外阅读或查阅。书中的习题分为A，B两组，A组为基本要求，B组为较高要求，书末附有部分习题答案与提示。

本书由南京大学金陵学院大学数学教研室编著，分Ⅰ、Ⅱ两册。Ⅰ册中，张玉莲编写第1章与第3章3.5节至3.9节，马荣编写第2章，王夕予编写第3章3.1节至3.4节，袁明霞编写第4章。Ⅱ册中，邓建平编写第5章和第7章，林小围编写第6章，章丽霞编写第8章，王培编写第9章。Ⅰ册由马荣统稿，Ⅱ册由章丽霞统稿。教研室主任黄卫华教授对全部教材进行了仔细地审校，提出了许多有益的建议。

感谢省教育厅与南京大学出版社合作将本课程建设项目立项进行教材建设。感谢南京大学金陵学院教务处和基础教学部领导对编者们的关心和支持。感谢南京大学孔敏教授、陈阶智教授以及兄弟院校的郭宜彬、汪鹏、魏文峰、邵宝刚等老师对本课程的一贯支持。感谢南京大学出版社吴汀和刘琦两位编辑的认真负责与悉心编校，使本书质量大有提高。

书中不足与错误难免，敬请专家、同行和读者不吝赐教。

编　者
2016.3.30

目　录

第 1 章　预备知识

1.1　预备知识

首先介绍本书中常用的数学符号：

(1) $\forall$：表示"对于任意给定的"或"对所有的". 例如，"$\forall \varepsilon>0$"表示"对于任意一个正数 ε".

(2) $\exists$：表示"存在某个"或"至少有一个". 例如，"$\exists \delta>0$"表示"存在正数 δ".

(3) $\Rightarrow$：表示"推出". 例如，"$P\Rightarrow Q$" 表示"若命题 P 成立，可推出命题 Q 也成立"，"命题 P 是 Q 的充分条件"或"命题 Q 是 P 的必要条件".

(4) $\Leftrightarrow$：表示"等价"或"充分必要". 例如，"$P\Leftrightarrow Q$"表示"命题 P 与 Q 等价"或"命题 P 的充分必要条件是 Q".

(5) max：表示"最大". 例如，$\max\{-1,1,3\}=3$.

(6) min：表示"最小". 例如，$\min\{-1,1,3\}=-1$.

(7) $\sum$：表示"求和". 例如，$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1+a_2+\cdots+a_n$.

(8) $\prod$：表示"求积". 例如，$\prod\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1 a_2 \cdots a_n$.

(9) $\square$：表示一个定理、推论证明结束，或一个例题解答完毕.

1.1.1　集合

一、集合的概念

集合是指所考察的具有共同特性的对象的全体. 例如，一个班级的所有学

生组成一个集合，全体实数构成一个集合等. 组成集合的每一个对象称为该集合的**元素**.

通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素. 若 x 是集合 A 的元素，则称 x 属于 A，记作 $x\in A$；如果 x 不是集合 A 的元素，则称 x 不属于 A，记作 $x\notin A$. 由有限多个元素组成的集合称为**有限集**，由无穷多个元素组成的集合称为**无限集**. 不含任何元素的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$.

通常可用列举法和描述法来表示集合.

所谓列举法，就是把集合的全体元素一一列举出来表示. 例如，由元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的集合 A，记作

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}.$$

所谓描述法，就是通过描述集合中元素的共同特性来表示集合. 一般地，若集合 S 由具有性质 P 的元素 x 组成，则记作

$$S=\{x\mid x\text{ 具有性质 }P\}.$$

例如，集合 B 是方程 $x^2-3x+2=0$ 的解集，则可表示为

$$B=\{x\mid x^2-3x+2=0\}.$$

通常用 $\mathbf{N}$ 表示自然数集，用 $\mathbf{N}^*$ 表示正整数集，用 $\mathbf{Z}$ 表示整数集，用 $\mathbf{Q}$ 表示有理数集，即

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}.$$

$$\mathbf{N}^*=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}.$$

$$\mathbf{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm n,\cdots\}.$$

$$\mathbf{Q}=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{p}{q},p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N}^*,\text{且 }p\text{ 与 }q\text{ 互质}\right\}.$$

有理数总可用有限小数或无限循环小数表示. 将无限不循环小数称为无理数，有理数与无理数统称为实数. 全体实数的集合称为实数集，记为 $\mathbf{R}$，$\mathbf{R}^+$

为全体正实数集.

设 A,B 是两个集合，若 $\forall x\in A\Rightarrow x\in B$，则称 A 是 B 的**子集**，记作 $A\subset B$. 我们规定空集 $\varnothing$ 是任何集合的子集. 例如，$A=\{1,2\}$，则 A 的全部子集有 $\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{1,2\}$.

如果集合 A 与集合 B 互为子集，即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B **相等**，记作 $A=B$. 例如，$A=\{1,2\}$，$B=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，则 $A=B$.

二、集合的运算

集合的基本运算有交、并、差、补这几种，定义如下：

$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$，称为 A 与 B 的**并集**；

$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$，称为 A 与 B 的**交集**；

$A\setminus B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$，称为 A 与 B 的**差集**.

在研究集合与集合之间的关系时，将具有某种性质的研究对象的全体称为全集，记为 U. 若 $A\subset U$，则

$\overline{A}=\{x\mid x\in U$ 且 $x\notin A\}$，称为 A 的**补集**.

1.1.2　区间与邻域

区间是用得较多的一类数集. 设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$，有

(1) 开区间：$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$；

(2) 闭区间：$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$；

(3) 半开半闭区间：$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$，$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$；

(4) 无穷区间：$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}$，$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$，

$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$，$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$.

上述前三种区间称为有限区间，$b-a$ 称为区间长度. 第四种区间称为无穷区间，其中“$+\infty$”读作“正无穷大”，“$-\infty$”读作“负无穷大”，它们仅为一种符号，并不是具体的实数. 实数集 $\mathbf{R}$ 也记作 $(-\infty,+\infty)$，是一个无穷区间.

在不需要考虑区间的具体形式时，简单地称其为“区间”，并用字母 I，X

等表示.

设 δ 为任意正实数,称开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 为**点 a 的 δ 邻域**,记作 $U(a,\delta)$,即

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

其中,点 a 称为**邻域的中心**,δ 称为**邻域的半径**. $U(a,\delta)$ 中去掉邻域中心 a 得到的集合称为**点 a 的去心 δ 邻域**,记作 $\mathring{U}(a,\delta)$,即

$$\mathring{U}(a,\delta)=U(a,\delta)\backslash\{a\}=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

称开区间 $(a-\delta,a)$ 为**点 a 的左 δ 邻域**,$(a,a+\delta)$ 为**点 a 的右 δ 邻域**.

1.1.3 数集的界

定义 1.1.1 (数集的界)设 S 为 $\mathbf{R}$ 中的一个数集,若存在实数 M(或 m),使得 $\forall x\in S$,都有 $x\leqslant M$(或 $x\geqslant m$),则称 M(或 m)为**数集 S 的上界**(或**下界**),并称 S 为**上有界**(或**下有界**)**集合**. 若 S 既有上界又有下界,则称 S 为**有界集合**. 若 $\forall M>0$,$\exists x\in S$,使得 $x>M$(或 $x<-M$),则称 S 为**上无界**(或**下无界**)**集合**,上无界集合和下无界集合统称**无界集合**.

例如,自然数集 $\mathbf{N}$ 是一个下有界上无界的集合,0 是 $\mathbf{N}$ 的一个下界. 闭区间 $[-1,1]$ 是一个有界集合,-1 是它的一个下界,1 是它的一个上界.

* **定义 1.1.2** (上确界与下确界)若数集 S 上有界,则 S 有无数多个上界,所有上界中最小者称为 S 的**上确界**,记作 $\sup S$;若 S 下有界,则 S 有无数多个下界,所有下界中最大者称为 S 的**下确界**,记作 $\inf S$.

例如,$S_1=(-1,1]$,则 $\sup S_1=1$,$\inf S_1=-1$. 对 $S_2=\left\{\frac{1}{n^2}\middle| n\in N^*\right\}$,有 $\sup S_2=1$,$\inf S_2=0$. 由此可见,数集 S 的上确界与下确界可能属于 S,也可能不属于 S.

* **定理 1.1.1** (确界定理)每一个非空上有界(或下有界)集合必有唯一的实数作为其上确界(或下确界).

习　题　1.1

A 组

1. 设 $A=\{0\}$，$B=\{0,1\}$，判断下列陈述是否正确？

(1) $A=\varnothing$；　(2) $A\subset B$；　(3) $0\subset B$；　(4) $\{0\}\subset B$；　(5) $A\cap B=0$；(6) $A\cup B=B$.

2. 设全集 U 为小于 10 的正整数组成的集合，其子集 A,B 为 $A=\{$奇数$\}$，$B=\{3$ 的倍数$\}$，

求：(1) $A\cap B$；　(2) $A\cup B$；　(3) $A\backslash B$.

3. 设集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{(x,y)\mid x\in A,y\in A,x-y\in A\}$，求集合 B 中的元素个数.

4. 下列集合是否有上(或下)确界？若有的话，写出其上(或下)确界：

(1) $S_1=\left\{n-\dfrac{1}{n}\,\middle|\,n\in\mathbf{N}^*\right\}$；　　(2) $S_2=\left\{\dfrac{1}{n^{(-1)^n}}\,\middle|\,n\in\mathbf{N}^*\right\}$；

(3) $S_3=(-3,10)\cup(20,100)$.

B 组

1. 设 A,B 是任意集合，求证：

(1) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$；　　(2) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

2. 设 $A=\{x\mid x^3+2x^2-x-2>0\}$，$B=\{x\mid x^2+ax+b\leqslant 0\}$. 试求能使 $A\cup B=\{x\mid x+2>0\}$，$A\cap B=\{x\mid 1<x\leqslant 3\}$ 的 a,b 的值.

1.2　一元函数

1.2.1　映射与函数

定义 1.2.1　(映射) 设 A,B 是两个非空集合，若 $\forall x\in A$，按某对应法则 f 有唯一的 $y\in B$ 与之对应，则称 f 为由 A 到 B 的**映射**，记为 $f:A\rightarrow B$. 称 y

为 x 关于映射 f 的**像**,记为 $f(x)$,称 x 为 y 的**原像**,称 A 为映射 f 的**定义域**,记为 D_f,称 A 中元素的像 $f(x)$的集合为映射 f 的**值域**,记为 R_f 或 $f(A)$.

例 1.2.1 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,对 $\forall x\in\mathbf{R}$,$f(x)=|x|$. 显然,f 是一个映射,f 的定义域 $D_f=\mathbf{R}$,值域 $R_f=\{y|y\geqslant 0\}\subset\mathbf{R}$. $\forall y\in R_f$,$y\neq 0$,其原像都不是唯一的. 如 $y=1$ 的原像就有 $x=1$ 和 $x=-1$ 两个.

下面介绍几类特殊的映射:

(1) 若 $R_f=B$,则称 $f:A\to B$ 为**满映射**;

(2) 若 $\forall x_1,x_2\in A$,$x_1\neq x_2$,有 $f(x_1)\neq f(x_2)$,则称 $f:A\to B$ 为**单映射**;

(3) 若 $f:A\to B$ 既是单映射又是满映射,则称 $f:A\to B$ 为 **1－1 映射**,或**双映射**.

例 1.2.1 中映射 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 既不是单映射,也不是满映射.

例 1.2.2 设 A 为金陵学院 2015 届新生的集合,B 为该校所有宿舍的集合. $\forall x\in A$,$y=f(x)$表示该新生的所在宿舍,则 $f:A\to B$ 既不是单映射,也不是满映射.

例 1.2.3 $y=\sin x:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 既不是单映射也不是满映射;$y=\sin x:\mathbf{R}\to[-1,1]$是满映射但不是单映射;$y=\sin x:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$是双映射.

定义 1.2.2 (函数) 设 $D\subset\mathbf{R}$,称映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 为**一元函数**,简记为

$$y=f(x),x\in D.$$

其中 x 称为**自变量**,y 称为**因变量**或 x 的**函数**,D 称为函数的**定义域**,即 $D_f=D$. 值域 $R_f=\{y|y=f(x),x\in D\}$.

表示函数的记号可以任意选取,除了常用的 f 外,也可用其他英文字母或希腊字母,如“g”,“F”,“φ”等. 相应地,将函数记作 $y=g(x)$,$y=F(x)$,$y=\varphi(x)$等. 有时还直接用因变量的记号来表示函数,即 $y=y(x)$.

在函数定义中,定义域及对应法则是两个基本要素. 定义域和对应法则确定之后,值域也就随之确定了. 所以,函数的值域通常不必指明. 如果两个函数

的定义域及对应法则都相同，那么这两个函数就相同.

例 1.2.4　判别下列函数 f 与 g 是否相同：

(1) $f(x)=(\sqrt[3]{x})^3, g(t)=(\sqrt[3]{t})^3$；

(2) $f(x)=\ln x^2, g(x)=2\ln x$.

解　(1) 函数 f 与 g 的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$，对应法则也相同，所以 f 与 g 是相同函数，与自变量用什么符号表示无关.

(2) 函数 f 的定义域为 $\{x \mid x\neq 0\}$，函数 g 的定义域为 $\{x \mid x>0\}$. 所以，函数 f 与 g 不相同. □

函数的表示有表格法、图形法及解析法三种. 表格法就是用表格的形式给出自变量 x 与函数值 $f(x)$ 之间的关系. 例如，常用的对数函数表、三角函数表等. 坐标平面上的点集 $\{(x,y) \mid y=f(x), x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x), x\in D$ 的图形或图像. 图形法就是在坐标平面上用函数的图像表示函数. 解析法就是用数学表达式表示自变量和因变量之间的对应关系. 例如，$y=\sqrt{1-x^2}$，$y=\ln x+\dfrac{1}{x+2}$ 给出了因变量 y 与自变量 x 之间的函数关系. 对于用解析法给出的函数，约定其定义域为使得解析式有意义的一切实数组成的集合，这种定义域称为函数的自然定义域. 例如，$y=\sqrt{1-x^2}$ 后面没有指定定义域，则其定义域为闭区间 $[-1,1]$. 对有实际背景的函数，其定义域根据实际背景中变量的实际意义确定. 例如，圆的面积 S 与半径 r 之间有函数关系 $S=\pi r^2$，其定义域为一切正实数.

例 1.2.5　某工厂生产某型号车床，年产量为 100 台，分若干批进行生产，每批生产准备费为 2 000 元，设产品均匀投放市场，即平均库存量为批量的一半. 设每年每台库存费为 100 元. 显然，生产批量大则库存费高；生产批量少则批数增多，因而生产准备费高. 为了选择最优批量，试求出一年中库存费与生产准备费的和与批量的函数关系.

解　设每批的生产量为 x 台，一年中库存费与生产准备费的和为 y. 则一