普通高等教育“十三五”规划教材

微积分

主编 刘二根 盛梅波 范自柱

普通高等教育“十三五”规划教材
江西省普通高等学校优秀教材

微积分

主　编◯ 刘二根　盛梅波　范自柱
副主编◯ 任飞正　闫云娟　钟卫稼
高　鹰　冯大一　李印权
朱惠倩

西南交通大学出版社
·成 都·

内容提要

本书按照普通高等学校经济管理类专业微积分课程的教学大纲及考研大纲，根据面向21世纪经济管理类数学教学内容和课程体系改革的基本精神编写而成．内容包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分应用、多元函数微分学、二重积分、无穷级数、常微分方程与差分方程及附录一：基础知识、附录二：Mathematica软件介绍与数学实验．每节配有习题、每章配有复习题，书末附有习题及复习题的参考答案．

本书可作为普通高等学校经济管理类专业“微积分”课程的教材，也可作为高等院校各专业师生、成人高校各专业师生、自学考试人员及工程技术人员的参考用书．

图书在版编目（CIP）数据

微积分／刘二根，盛梅波，范自柱主编．—成都：
西南交通大学出版社，2016.7
普通高等教育“十三五”规划教材
ISBN 978-7-5643-4849-6

Ⅰ．①微… Ⅱ．①刘… ②盛… ③范… Ⅲ．①微积分–高等学校–教材 Ⅳ．①O172

中国版本图书馆CIP数据核字（2016）第175648号

普通高等教育“十三五”规划教材

微积分

主编 刘二根 盛梅波 范自柱

责任编辑 张宝华
封面设计 何东琳设计工作室

印张 18.5 字数 462千
成品尺寸 185 mm × 260 mm
版本 2016年7月第1版
印次 2016年7月第1次
印刷 成都蓉军广告印务有限责任公司

出版 发行 西南交通大学出版社
网址 http://www.xnjdcbs.com
地址 四川省成都市二环路北一段111号
西南交通大学创新大厦21楼
邮政编码 610031
发行部电话 028-87600564 028-87600533

书号：ISBN 978-7-5643-4849-6
定价：40.00元

课件咨询电话：028-87600533
图书如有印装质量问题 本社负责退换

前　　言

《微积分》是普通高等学校经济管理类各专业重要基础课之一，是学习其他数学课程和经济管理类课程必备的数学基础，是培养抽象思维能力、逻辑推理与判断能力、几何直观和空间想象能力、熟练的运算能力、初步的数学建模能力以及综合运用所学的知识分析和解决实际应用问题能力的强有力的数学工具.

本书按照普通高等学校经济管理类专业微积分课程的教学大纲及考研大纲，根据面向21世纪经济管理类数学教学内容和课程体系改革的基本精神编写而成. 内容包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分、定积分应用、多元函数微分学、二重积分、无穷级数、常微分方程与差分方程及附录一：基础知识、附录二：Mathematica软件介绍与数学实验. 每节配有习题、每章配有复习题，书末附有习题及复习题的参考答案.

在编写过程中，考虑到经济管理类专业有相当一部分学生学文科，我们把本课程涉及的中学数学中的一些重要公式，特别是三角函数及反三角函数的一些公式，极坐标等知识作为附录一列出，以方便学生查用. 每章的复习题中都精选了近年来全国硕士研究生入学考试的部分数学试题，它可作为学生的课后学习辅导、提高训练及考研训练之用.

参加本书编写工作的有刘二根、盛梅波、范自柱、钟卫稼、闫云娟、高鹰、任飞正、冯大一、李印权、朱惠倩. 由刘二根对全书进行审稿和统稿.

由于编者水平有限，加上时间仓促，不足之处在所难免，恳请读者批评指正.

编　者

2016年2月

目　　录

第一章　函数、极限与连续

初等数学的研究对象基本上是不变的量，而高等数学的研究对象是变动的量．函数是高等数学的主要研究对象，极限是微积分的理论基础，极限方法是研究变量的一种基本方法，而连续是函数的一个重要性态．本章将介绍函数、极限与连续的基本概念、基本方法以及一些性质．

第一节　函　数

一、集　合

1．集合概念

集合是数学的一个重要概念，下面通过几个例子来理解它．例如，一个专业的学生、一批灯泡、全体实数等，这些由某种特定事物组成的集体就是集合．一般地，具有某种特定性质的事物的总体称为**集合**，通常用大写英文字母如 A，B，C 等表示．而组成集合的事物称为集合的**元素**，用小写英文字母如 a，b，c 表示．如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记为 $a\in A$．如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记为 $a\notin A$ 或 $a\,\overline{\in}\,A$．由有限个元素组成的集合称为**有限集**，由无限个元素组成的集合称为**无限集**．

下面举几个集合的例子．

（1）某大学 2016 级的全体学生．　　（2）不等式 $x^2-6x+8<0$ 的所有解．

（3）全体有理数．　　（4）抛物线 $y=x^2-3x+2$ 上所有的点．

2．集合的表示

（1）列举法：把集合的所有元素一一列举出来，并用 $\{\ \}$ 括起来．例如，由 a,b,c,d,e,f 组成的集合 A，可表示为 $A=\{a,b,c,d,e,f\}$．

（2）描述法：若集合 A 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成，那么 A 可表示为 $A=\{x\mid x\text{具有性质}P\}$．例如，$A=\{x\mid x^2-6x+8<0\}$．

对于数集，下面介绍几个特殊的数集及其记法：

全体非负整数，即自然数构成的集合记为 $\mathbf{N}$，即 $\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$．

全体正整数构成的集合记为 $\mathbf{Z}^+$，即 $\mathbf{Z}^+=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$．

全体整数构成的集合记为 $\mathbf{Z}$，即 $\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$．

全体有理数构成的集合记为 $\mathbf{Q}$，即 $\mathbf{Q}=\left\{\dfrac{p}{q}\middle| p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{Z}^+,\text{且}\ p\ \text{与}\ q\ \text{互质}\right\}$．

全体实数构成的集合记为 $\mathbf{R}$，全体正实数构成的集合记为 $\mathbf{R}^+$，全体复数构成的集合记为 $\mathbf{C}$．

3．子集

设 A，B 是两个集合，如果集合 A 的所有元素都是集合 B 的元素，即若 $x\in A$，必有 $x\in B$，则称 A 是 B 的**子集**，记为 $A\subset B$（读作 A 包含于 B）或 $B\supset A$（读作 B 包含 A）．

如果集合 A 与集合 B 互为子集，即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称集合 A 与集合 B **相等**，记为 $A=B$. 例如，设 $A=\{x\,|\,1<x<2\}$，$B=\{x\,|\,x^2-3x+2<0\}$，则 $A=B$.

若 $A\subset B$ 且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的**真子集**，记为 $A\subsetneqq B$. 例如，$\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{Z}\subsetneqq\mathbf{Q}\subsetneqq\mathbf{R}$.

不含任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$. 规定：空集是任何集合的子集.

4. 集合的运算

（1）并：设 A，B 是两个集合，由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**并集**（简称并），记为 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\left\{x\middle|x\in A\text{或}x\in B\right\}.$$

（2）交：设 A，B 是两个集合，由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**交集**（简称交），记为 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\left\{x\middle|x\in A\text{且}x\in B\right\}.$$

（3）差：设 A，B 是两个集合，由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**差集**（简称差），记为 $A\setminus B$，即

$$A\setminus B=\left\{x\middle|x\in A\text{且}x\notin B\right\}.$$

如果所研究的某个问题限定在一个大的集合 I 中进行，而所研究的其他集合 A 都是 I 的子集，则称集合 I 为**全集**，$I\setminus A$ 为 A 的**余集或补集**，记为 $\overline{A}$ 或 A^C.

例如，设 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$，$B=\{1,3,5,7\}$，$I=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，则

$$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7\},\quad A\cap B=\{1,3,5\};$$

$$A\setminus B=\{2,4,6\},\quad B\setminus A=\{7\};$$

$$\overline{A}=\{7,8,9,10\},\quad \overline{B}=\{2,4,6,8,9,10\}.$$

（4）集合运算规律.

设 A，B，C 为任意三个集合，则

① 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$.

② 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

③ 分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

④ 对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

以上规律都可以根据集合运算及相等的定义证明.

5. 区间和邻域

（1）区间.

区间是微积分中常用的实数集. 设 a 和 b 为实数，且 $a<b$，数集 $\left\{x\middle|a<x<b\right\}$ 称为**开区间**，记为 (a,b)，即

$$(a,b)=\left\{x\middle|a<x<b\right\}.$$

其中 a 和 b 称为开区间 (a,b) 的端点.

类似可定义闭区间和半开半闭区间：

闭区间：$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$.

半开半闭区间：$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$，$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$.

以上区间称为**有限区间**，而数 $b-a$ 称为这些区间的**长度**．另外，我们还可以定义无限区间，为此引入记号 $+\infty$（读作正无穷大）及 $-\infty$（读作负无穷大），则可以如下定义**无限区间**：

$$(a,+\infty)=\{x|x>a\},\quad [a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\};$$

$$(-\infty,b)=\{x|x<b\},\quad (-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\};\quad (-\infty,+\infty)=\mathbf{R}.$$

有限区间和无限区间都可以在数轴上表示，例如，图 1-1 (a), (b), (c), (d) 分别表示区间 (a,b), $[a,b]$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,b)$.

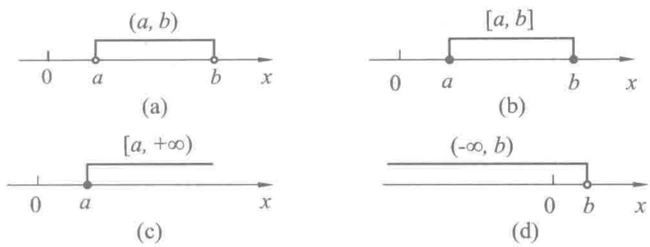

图 1-1

（2）邻域．

邻域是微积分中常用的实数集，它是一类特殊的区间．设 a 和 δ 为实数，且 $\delta>0$，数集 $\{x||x-a|<\delta\}$ 称为以点 a 中心、δ 为半径的**邻域**，记为 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x||x-a|<\delta\}.$$

$U(a,\delta)$ 还可以表示为

$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta).$$

如果不需要指出其半径，则 $U(a,\delta)$ 可简记为 $U(a)$.

点 a 的 δ 邻域 $U(a,\delta)$ 在数轴上表示为图 1-2.

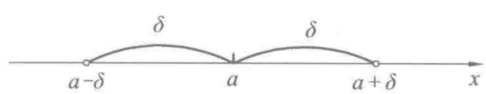

图 1-2

有时用到的邻域要把中心去掉，点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后称为点 a 的**去心 δ 邻域**，记为 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}.$$

二、函　数

1．函数的概念

定义 1.1　设 D 是一个非空数集，如果存在一个法则 f，使得对 D 中每一个元素 x，按照法则 f，都有一个确定的实数 y 与之对应，则称 f 为定义在 D 上的**函数**，记为

$$y=f(x),$$

其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，数集 D 称为函数的**定义域**，记为 D_f，即 $D_f=D$.

对 $x_0 \in D$，按照法则 f，有确定的值 y_0（记为 $f(x_0)$）与之对应，称 $f(x_0)$为函数在点 x_0 处的**函数值**，还可记为 $y\big|_{x=x_0}$．所有函数值的集合称为函数的**值域**，记为 R_f，即

$$R_f = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

函数的定义域和对应法则是确定函数的两个要素，当两个函数的定义域和对应法则均相同时，称这两个函数**相等**.

例 1　下列各对函数是否相同?

（1）$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $g(x)=x+1$；　　（2）$f(x)=\lg x^2$ 与 $g(x)=2\lg|x|$.

解　(1)因为 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，$g(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域不同，故 $f(x)$与$g(x)$ 不相同.

（2）因为 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$g(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域相同．又 $f(x)=2\lg|x|$，所以 $f(x)$与$g(x)$ 的对应法则也相同．故 $f(x)$与$g(x)$ 相同.

关于函数的定义域，通常按以下两种情形来确定：一种是对有实际背景的函数，需根据实际背景中变量的实际意义确定. 例如，在自由落体运动中，设物体下落的时间为 t，下落的距离为 s，开始下落的时刻 $t=0$，落地的时刻 $t=T$，则 s 与 t 之间的函数关系是 $s=\dfrac{1}{2}gt^2, t\in[0,T]$．则这个函数的定义域就是区间 $[0,T]$．另一种是对用算式表达的函数，通常约定这种函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合，这种定义域称为函数的自然定义域．例如，函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是闭区间 $[-1,1]$，函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是开区间 $(-1,1)$.

例 2　求下列函数的定义域.

（1）$f(x)=\lg(x-1)+\sqrt{4-x^2}$；　　（2）$f(x)=\arcsin(x-2)+\dfrac{1}{x-3}$.

解（1）要使函数有意义，必须满足

$$\begin{cases} x-1>0, \\ 4-x^2 \geqslant 0. \end{cases}$$

解不等式，得 $\begin{cases} x>1, \\ -2\leqslant x\leqslant 2. \end{cases}$ 所以 $1<x\leqslant 2$，故所求定义域为 $D_f=(1,2]$.

（2）要使函数有意义，必须满足

$$\begin{cases} |x-2| \leqslant 1, \\ x-3\neq 0. \end{cases}$$

解不等式，得 $\begin{cases} 1\leqslant x\leqslant 3, \\ x\neq 3. \end{cases}$ 所以 $1\leqslant x<3$，故所求定义域为 $D_f=[1,3)$.

在函数的定义中，对每个 $x\in D_f$，对应的函数值 y 总是唯一的，这样的函数称为**单值函数**；否则，称为**多值函数**．例如，方程 $x^2+y^2=r^2$ 在闭区间 $[-r,r]$ 上确定了以 x 为自变量、y 为因变量的函数，但对每个 $x\in(-r,r)$，对应的 y 有两个值 $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$，所以此方程确定了一个多值函数．一般若无特别说明，本教材中的函数均指单值函数.

表示函数的方法主要有三种：表格法、图形法、解析法（公式法）．这在中学里大家已经熟

悉了．其中用图形法表示函数是基于函数图形的概念，即坐标平面上的点集

$$W=\left\{(x, y) \middle| y=f(x), x\in D_f\right\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的**图形**（见图 1-3）．

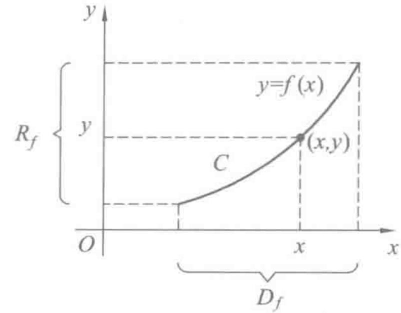

图 1-3

根据函数解析式的不同形式，函数又分为显函数、隐函数、分段函数．

（1）显函数：函数 y 由 x 的解析表达式直接给出．例如，$y=x+\sin x$．

（2）隐函数：函数的因变量 y 与自变量 x 的对应关系由方程 $F(x,y)=0$ 给出．例如，$y=\ln(x+y)$．

（3）分段函数：函数在定义域的不同变化范围内，具有不同的解析表达式．下面介绍几个分段函数．

例 3　绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

其定义域为 $D_f=(-\infty,+\infty)$，值域为 $R_f=[0,+\infty)$，图形如图 1-4 所示．

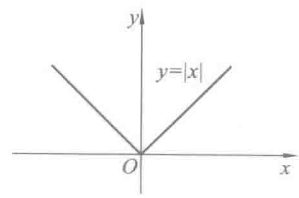

图 1-4

例 4　符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0. \end{cases}$$

其定义域为 $D_f=(-\infty,+\infty)$，值域为 $R_f=\{-1,0,1\}$，图形如图 1-5 所示．

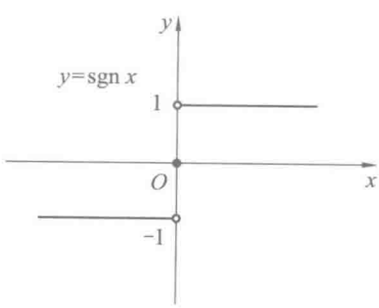

图 1-5

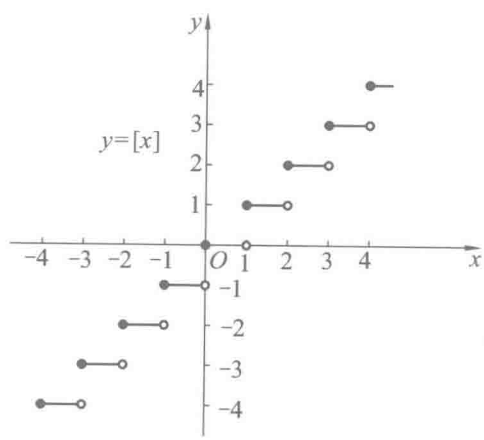

图 1-6

例 5　取整函数

$$y=[x],$$

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数．例如，$[2.4]=2,\ [0.3]=0,\ [-2.3]=-3$．

取整函数 $y=[x]$ 的定义域为 $D_f=(-\infty,+\infty)$，值域为 $R_f=\mathbf{Z}$，图形如图 1-6 所示．

2．函数的特性

（1）函数的有界性.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X \subset D$，如果存在正数 M，使对一切 $x \in X$，有

$$|f(x)| \leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$在 X 上**有界**；否则，称函数 $f(x)$ 在 X 上**无界**．若 $X=D$，则称 $f(x)$为**有界函数**.

函数 $f(x)$无界，就是说对任何正数 M，总存在 $x_0 \in X$，使 $|f(x_0)|>M$.

例如，① 函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，因为 $|\sin x| \leqslant 1$.

② 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 无界．因为对任意 $M>0$，要使

$$|f(x)|=\left|\frac{1}{x}\right|=\frac{1}{x}>M,$$

只要 $x<\dfrac{1}{M}$，取 $x_0=\dfrac{1}{1+M}$，则 $x_0 \in (0,1)$，且 $|f(x_0)|=1+M>M$，所以函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 无界．但函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(1,2)$ 内是有界的.

（2）函数的单调性.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subset D$．若对任意 $x_1, x_2 \in I$，且 $x_1<x_2$，有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**单调增加**（见图 1-7），区间 I 称为 $f(x)$ 的**单调增加区间**.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subset D$．若对任意 $x_1, x_2 \in I$，且 $x_1<x_2$，有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**单调减少**（见图 1-8），区间 I 称为 $f(x)$ 的**单调减少区间**.

单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

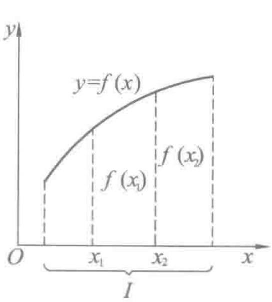

图 1–7

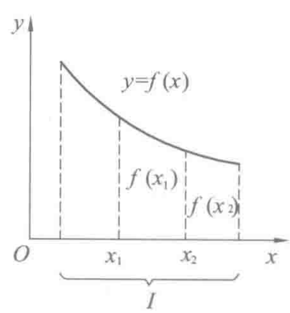

图 1–8

例如，函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的，在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的，在 $(-\infty,+\infty)$ 上不是单调函数（见图 1-9）．而函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调增加的（见图 1-10）.

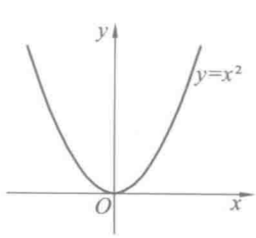

图 1–9

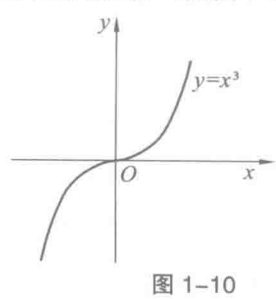

图 1–10

（3）函数的奇偶性.

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对于任一 $x\in D$，有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**奇函数**. 若对于任一 $x\in D$，有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

奇函数的图形关于原点对称（见图 1-11），偶函数的图形关于 y 轴对称（见图 1-12）.

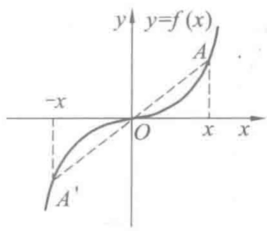

图 1–11

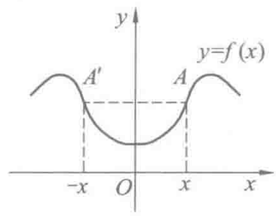

图 1–12

函数 $y=\sin x$，$y=x^3$ 都是奇函数，$y=\cos x$，$y=x^2$ 是偶函数，而 $y=\sin x+\cos x$ 是非奇非偶函数.

例 6　判断 $f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$ 的奇偶性.

解　因为 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且

$$f(-x)=\ln[\sqrt{1+(-x)^2}-(-x)]=\ln(\sqrt{1+x^2}+x)$$
$$=\ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}=-\ln(\sqrt{1+x^2}-x)=-f(x),$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

（4）函数的周期性.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在一个正数 T，使得对于任一 $x\in D$，有 $x+T\in D$，且

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**，T 称为 $f(x)$ 的一个**周期**.

显然，若 T 为函数 $f(x)$ 的一个周期，则 $nT\,(n\in\mathbf{Z}^+)$ 也为 $f(x)$ 的周期. 通常我们所说的周期是指最小正周期. 例如，$y=\sin x$，$y=\cos x$ 的周期为 2π，$y=\tan x$，$y=\cot x$ 的周期为 π.

周期函数的图形特点：在函数的定义域内，每个长度为 T 的区间上，函数的图形有相同的形状（见图 1-13）.

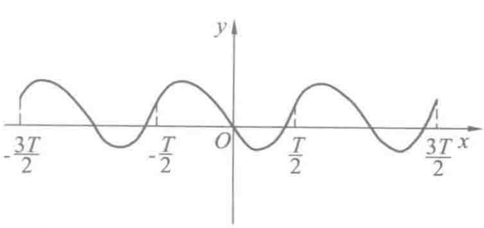

图 1–13

3．反函数与复合函数

（1）反函数.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，值域为 R_f，若对任一个 $y\in R_f$，存在确定的 $x\in D_f$ 与 y 对应，且满足关系式 $y=f(x)$，则在 R_f 上定义了一个函数，称之为 $y=f(x)$ 的**反函数**，记为

$$x=\varphi(y) \quad 或 \quad x=f^{-1}(y).$$

而原来的函数 $y=f(x)$ 称为**直接函数**.

函数 $y=f(x)$ 中，x 为自变量，y 为因变量，定义域为 D_f，值域为 R_f.

函数 $x=f^{-1}(y)$ 中，y 为自变量，x 为因变量，定义域为 R_f，值域为 D_f.

一般地，习惯用 x 表示自变量，y 表示因变量，于是我们把 $y=f(x)(x\in D_f)$ 的反函数记为

$$y=f^{-1}(x) \quad (x\in R_f).$$

函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称（见图 1-14）.

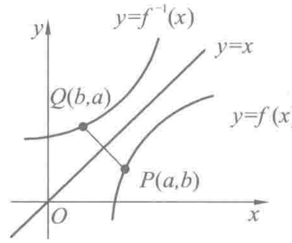

图 1–14

例 7　求函数 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的反函数.

解　由 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，得 $2y=e^x-e^{-x}$，即 $(e^x)^2-2ye^x-1=0$．从而

$$e^x=\frac{2y+\sqrt{4y^2+4}}{2}=y+\sqrt{1+y^2},$$

于是

$$x=\ln(y+\sqrt{1+y^2}),$$

故所求反函数为

$$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2}).$$

（2）复合函数.

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 R_φ，若 $D_f\cap R_\varphi\neq\varnothing$，则称函数

$$y=f[\varphi(x)]$$

为**复合函数**，其中 x 为自变量，y 为因变量，而 u 称为**中间变量**.

例如，函数 $y=\sin u$ 与 $u=x^2+1$ 的复合函数为 $y=\sin(x^2+1)$．不是任何两个函数都能复合成一个复合函数，如，$y=f(u)=\arcsin u$ 与 $u=\varphi(x)=x^2+2$ 就不能复合成一个复合函数，因为 $D_f=[-1,1]$，$R_\varphi=[2,+\infty)$，$D_f\cap R_\varphi=\varnothing$.

利用复合函数的概念，可以将一个复杂函数看成由几个简单函数复合而成，以便于对函数进行研究．例如，函数 $y=\sin e^{x+1}$ 可以看成 $y=\sin u$，$u=e^v$，$v=x+1$ 三个函数复合而成.

三、初等函数

1．基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数等 5 类函数统称为**基本初等函数**．下面分别进行介绍.

（1）幂函数：$y=x^\mu$（μ 为实数）.

定义域依 μ 的取值而定，但不论 μ 取何值，$y=x^\mu$ 在 $(0,+\infty)$ 都有定义，且图形都经过点 $(1,1)$.

例如，$y=x^2$，$y=x^{\frac{2}{3}}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，图形关于 y 轴对称（见图 1-15）.

$y=x^3$，$y=x^{\frac{1}{3}}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，图形关于原点对称（见图 1-16）.

$y=\dfrac{1}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，图形关于原点对称（见图 1-17）.

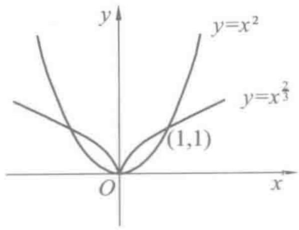

图 1–15

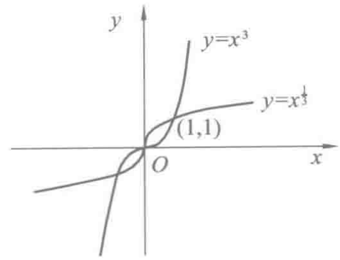

图 1–16

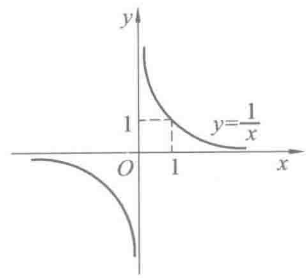

图 1–17

（2）指数函数：$y=a^x\ (a>0,a\neq 1)$.

特别地，有 $y=\mathrm{e}^x$，其中 $\mathrm{e}=2.718\,281\,828\,459\cdots$ 为无理数.

定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$，图形都通过点 $(0,1)$. 当 $a>1$ 时，函数 $y=a^x$ 单调增加；当 $0<a<1$ 时，函数 $y=a^x$ 单调减少（见图 1-18）.

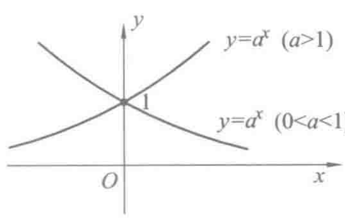

图 1–18

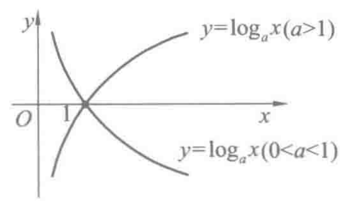

图 1–19

（3）对数函数：$y=\log_a x\ (a>0,a\neq 1)$.

特别地，当 $a=\mathrm{e}$ 时，对数函数记为 $y=\ln x$.

定义域为 $(0,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，图形都通过点 $(1,0)$. 当 $a>1$ 时，函数 $y=\log_a x$ 单调增加；当 $0<a<1$ 时，函数 $y=\log_a x$ 单调减少（见图 1-19）. 对数函数与指数函数互为反函数.

（4）三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$.

① 正弦函数 $y=\sin x$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,1]$，是奇函数且以 2π 为周期的周期函数（见图 1-20）.

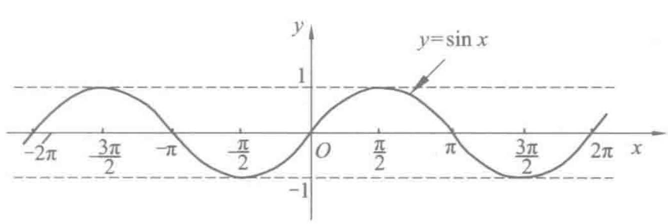

图 1–20

② 余弦函数 $y=\cos x$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,1]$，是偶函数且以 2π 为周期的周期函数（见图 1-21）.