高等数学学习手册

袁俊伟　刘先觉　主编

GAO DENG
SHU XUE
XUE XI SHOU CE

武汉测绘科技

高等数学学习手册

主　编　袁俊伟　刘先觉

副主编　李宗传　周光华　马厚陵

　　　　郭启英　熊发涯　徐春照

编　委　廖学余　高雁群　侯加利

武汉测绘科技大学出版社

(鄂)新登字 14 号

高等数学学习手册
袁俊伟　刘先觉　主编

武汉测绘科技大学出版社出版发行
湖北省丹江口市印刷厂印刷
*
787×1092　1/32 开本　12.25 印张　273 千字
1993 年 8 月第一版　1993 年 8 月第一次印刷
ISBN 7－81030－282－5/O・30

印数：1－5000 册　　定价：5.70 元

前　言

高等数学不仅是自然科学和工程技术的基础，在现代社会科学的许多领域里也有广泛的应用。为了满足各类读者学习和应用高等数学的需要，我们编写了《高等数学学习手册》这本书。

本《手册》内容全面、系统，共十一章，每节分别由概念、结论、方法、应用四类条目组成。条目详尽、简明，既具有独立性，又具有系统性，十分便于读者查阅。

本《手册》可供理工、生化、农林、财会经济类学校的学生、自学者、工程技术人员、自然科学工作者和社会科学工作者查阅、参考。

编写本《手册》的有袁俊伟、刘先觉等十一位同志。袁俊伟同志提出了全书的编写计划，编写了一章样稿，负责部分章节的改稿和全书的统稿工作；刘先觉同志编写了三章并承担了部分章节的改稿工作；其他同志承担了一至两章的编写工作。在编写本《手册》的过程中，受到了各有关方面的领导同志的支持和帮助，在此谨表谢意。

由于我们水平有限，难免有疏漏之处，甚至可能有某些谬误，热诚欢迎广大读者批评指正。

编　者

1992年7月

目 录

第一章 函数、极限、连续

§1 函 数

一、概念类

［集合］ 集合是数学中的一个原始概念。所谓集合（简称集），是指具有某种特定性质的事物的总体。组成这个集合的事物称为该集合的元素。

元素与集合之间的基本关系是“属于”或“不属于”。a 是集合 M 的元素记作 $a\in M$ ；a 不是集合 M 的元素记作 $a\notin M$。

若 M 是具有性质 P 的元素 x 的全体组成的集合，记作

$$M=\{x|P(x)\}$$

有时，集合也可用列举出它的全体元素的方法来表示，如数集 $A=\{1,2,3,4,5\}$。

不含任何元素的集合称为空集，记作$\varnothing$。

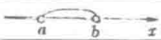
集合与集合之间的基本关系如下表所示：

关　系	记　号	定　义
A 包含于 B（或 A 是 B 的子集）	$A\subseteq B$	$\forall x\in A\Rightarrow x\in B$
A 等于 B	$A=B$	$A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$

关　　系	记　　号	定　　义
A与B的交集	$A\cap B$	$\{x \mid x\in A$ 且 $x\in B\}$
A与B的并集	$A\cup B$	$\{x \mid x\in A$ 或 $x\in B\}$
A与B的差集	$A-B$ (或 $A\backslash B$)	$\{x \mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$
A是关于全集I的补集	$\overline{A}$	$\{x \mid x\in I$ 且 $x\notin A\}$

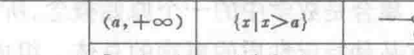
注：记号“$\forall$ ”表示“对于任意”。

［区间］　设a和b都是实数，且$a<b$，各类区间如下表所示：

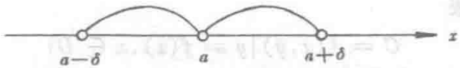
分类	名称	记号	集合表示法	数轴表示法
有限区间	开区间	(a,b)	$\{x \mid a<x<b\}$	
	闭区间	$[a,b]$	$\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$	
	半开区间	$[a,b)$	$\{x \mid a\leqslant x<b\}$	
		$(a,b]$	$\{x \mid a<x\leqslant b\}$	
无限区间		$(a,+\infty)$	$\{x \mid x>a\}$	
		$[a,+\infty)$	$\{x \mid x\geqslant a\}$	
		$(-\infty,a)$	$\{x \mid x<a\}$	
		$(-\infty,a]$	$\{x \mid x\leqslant a\}$	
		$(-\infty,+\infty)$	$\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$	

注：数轴表示法中，实心点表示区间包括该点；空心点表示不包括。

［邻域］　设a与δ是两个实数，且$\delta>0$，数集$\{x \mid |x-a|<\delta\}$，即开区间$(a-\delta,a+\delta)$，称为点a的δ邻域，记作$U(a,\delta)$，a叫做该邻域的中心，δ叫做该邻域的半径。



［去心邻域］　设a与δ是两个实数，且$\delta>0$，数集$\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$即两个开区间的并$(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$，称为点$a$的去心$\delta$邻域，记作$U(\hat{a},\delta)$。



[**常量与变量**]　在所考察的变化过程中，保持一定数值的量称为常量，可以取不同数值的量称为变量。

[**函数**]　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集。如果对于每一个数 $x\in D$，变量 y 按照一定的法则 f 总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$，数集 D 叫作这个函数的定义域，f 称为 D 上的一个函数关系，x 称为自变量，y 称为因变量。

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$。当 x 遍取 D 的各个数值时，对应的函数值全体组成的数集 $W=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的值域。

[**单值函数与多值函数**]　在上述函数定义中，对于 x 的每一个值，有唯一的 y 值与之对应，这种函数称为单值函数；若对于 x 的每个值，有不止一个 y 值与之对应，则称为多值函数。

注：本书只讨论单值函数，对于多值函数则分成几个单值函数来讨论。

[**函数的两要素**]　定义域和自变量与因变量之间的函数关系是确定函数的两个要素，缺一不可。例如，$f(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{x-2}$，其定义域是空集，它不构成函数。

[**函数相等**]　如果两个函数的定义域和函数关系分别相同，则称这两个函数是相等的。例如，函数 $y=\sin^2x+\cos^2x$ 与 $y=1$ 是相等的；函数 $y=x-1$ 与 $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ 不是相等的。

[**函数的图形**]　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，则坐标平

面上的点集

$$C = \{(x,y) \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的图形(图 1-1)。

[函数的表示法] 函数常用的表示法有三种

1. 解析法：函数关系由数学表达式给出；

2. 图象法：函数关系由坐标系中的图形给出；

3. 列表法：函数关系由表格给出。

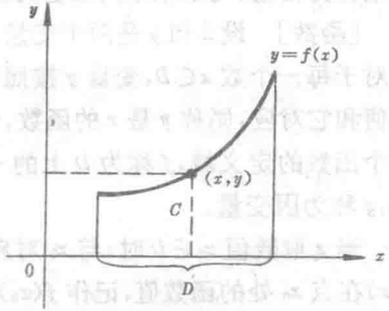


图 1-1

[函数的有界性] 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X \subseteq D$，如果存在正数 M，使得

$$|f(x)| \leqslant M, \quad x \in X$$

恒成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界；如果这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 X 上无界。

[函数的单调性] 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subseteq D$，如果对于区间 I 上任意两点 x_1、x_2，当 $x_1 < x_2$ 时恒有

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \qquad (\text{或 } f(x_1) \geqslant f(x_2))$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上递增(或递减)，函数 $f(x)$ 也称为区间 I 上的递增(或递减)函数。

若恒有

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad \text{或 } f(x_1) > f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上严格递增(或严格递减)，函数 $f(x)$ 也称为区间 I 上的严格递增(或严格递减)函数。

递增(或递减)函数的图形是由左至右不降(或不升)的曲

线；严格递增（或严格递减）函数的图形是由左至右上升（或下降）的曲线。

递增、递减函数统称为单调函数；严格递增、严格递减函数统称为严格单调函数。

［函数的奇偶性］ 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称（即若 $x\in D$，则必 $-x\in D$），如果对于任意 $x\in D$ 都有

$$f(-x)=f(x)\qquad (\text{或 } f(-x)=-f(x))$$

则称 $f(x)$ 为偶函数（或奇函数）。偶函数的图形关于 y 轴对称；奇函数的图形关于原点对称。

［函数的周期性］ 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个不为零的数 l，使得对于任一 $x\in D$ 有 $(x\pm l)\in D$，且

$$f(x+l)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的周期。若周期函数 $f(x)$ 的所有周期中有一个最小的正数，则称这个正数为函数 $f(x)$ 的最小正周期。通常所说的函数的周期就是指它的最小正周期。

［反函数］ 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W，如果对于 W 中的每一个值 y，由函数关系 $y=f(x)$ 在 D 上有确定的 x 值与之对应，则 y 可看作自变量，x 看作因变量，x 就成为 y 的函数，这个函数称为原来函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，它的定义域为 W。

由于习惯上自变量用 x 表示，因变量用 y 表示，因此常将函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 改记为 $y=f^{-1}(x)$。

注：函数 $y=f(x)$ 与反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图形相同；函数 $y=f(x)$ 与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称。

［复合函数］ 设函数 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$，且 D 为 $u=g(x)$ 的定义域，数集 $X\subseteq D$。如果对于 X 中的每一个值 x，由函数 u

$=g(x)$所确定的 u 值都在函数 $y=f(x)$的定义域中，则由函数 $y=f(u)$相应地得到确定的 y 值，这时把 x 看作自变量，y 看作因变量，y 就成为 x 的函数，称这个函数为由 $y=f(u)$和 $u=g(x)$构成的复合函数，记作

$$y = f[g(x)]$$

它的定义域是 X，其中 $y=f(u)$称为外函数，$u=g(x)$称为内函数，u 称为中间变量。

［**显函数与隐函数**］ 变量 y 与 x 之间的函数关系可以用不同的方式表达。

如果一个等式的左边是因变量 y，而右边是含有自变量 x 的式子，当自变量取定义域内任一值时，由这个式子能确定对应的函数值。用这种方式表达的函数叫做显函数。如 $y=\sin x$、$y=\ln x+\sqrt{1-x^2}$等都是显函数。

如果在方程 $F(x,y)=0$ 中，当 x 取某区间内的任一值时，相应地总有满足这个方程的唯一的 y 值存在，那么就说方程 $F(x,y)=0$ 在该区间内确定了一个隐函数。如方程 $x+y^3-1=0$ 确定了一个因变量 y 关于自变量 x 的函数，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$

［**隐函数的显化**］ 把一个隐函数化成显函数，叫做隐函数的显化。

注：隐函数的显化有时是困难的，甚至是不可能的。例如方程 $y^3+2y-x-3x^7=0$ 可以确定一个隐函数，但无法将之显化。

［**参数函数**］ 若参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$能确定 y 与 x 间的函数关系，则称此函数关系所表达的函数为由参数方程

$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 所确定的参数函数。

［取整函数］ 设 x 为任一实数，将不超过 x 的最大整数记作 $[x]$，则函数

$$y=[x]$$

称为取整函数，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 Z(图 1-2)。

［符号函数］ 函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1, 当\ x>0 \\ 0, 当\ x=0 \\ -1, 当\ x<0 \end{cases}$$

称为符号函数，其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=\{-1,0,1\}$。

对于任何实数 x，恒有 $x=|x|\cdot\operatorname{sgn}x$。

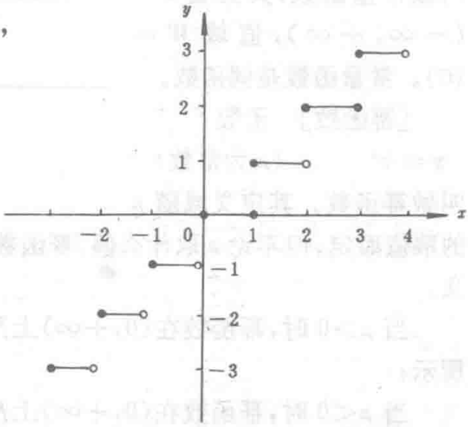


图 1-2

［分段函数］ 在自变量的不同变化范围中，对应关系用不同式子来表示的函数，通常称为分段函数。例如函数

$$y=f(x)=\begin{cases} x, 当\ x\geqslant 0 \\ x^2, 当\ x<0 \end{cases}$$

就是一个分段函数。

［基本初等函数］ 常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数。

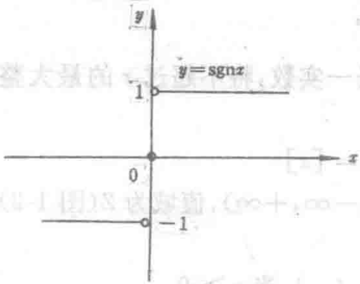


图1-3

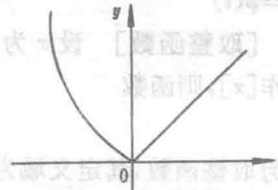


图 1-4

［常量函数］ 函数

$y=C$, （C 为某一常数）

叫做常量函数，其义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=\{C\}$。常量函数是偶函数。

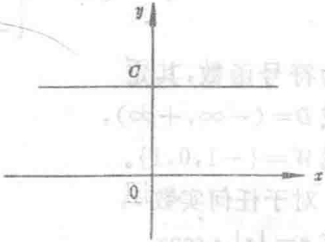


图 1-5

［幂函数］ 函数

$y=x^{\mu}$ （μ 为常数）

叫做幂函数。其定义域随 μ 的取值而定。但不论 μ 取什么值，幂函数在 $(0,+\infty)$ 内总有定义。

当 $\mu>0$ 时，幂函数在 $(0,+\infty)$ 上严格递增，如图 1-6(a) 所示；

当 $\mu<0$ 时，幂函数在 $(0,+\infty)$ 上严格递减，如图 1-6(b) 所示。

注：$y=x^{\mu}(x>0)$ 与 $y=x^{\frac{1}{\mu}}(x>0)$ 互为反函数。

［指数函数］ 函数

$$y=a^{x} \qquad (a \text{ 是常数且 } a>0, a\neq 1)$$

叫做指数函数。其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=(0,+\infty)$。

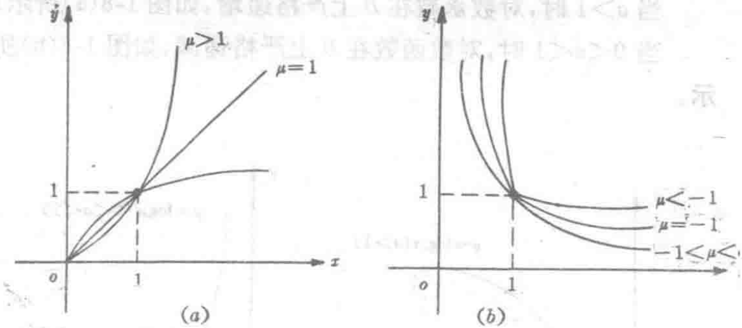


图 1-6

当 $a>1$ 时，指数函数在 D 上严格递增，如图 1-7(a)所示；

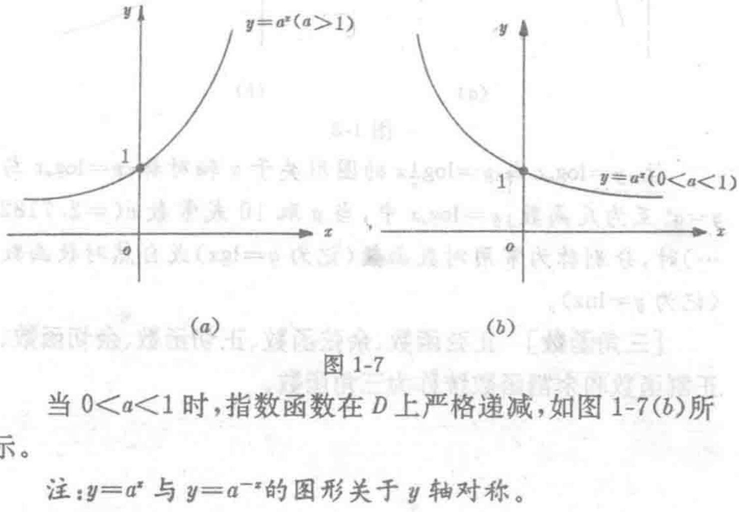


图 1-7

当 $0<a<1$ 时，指数函数在 D 上严格递减，如图 1-7(b)所示。

注：$y=a^x$ 与 $y=a^{-x}$ 的图形关于 y 轴对称。

［对数函数］　函数

$$y=\log_a x \qquad (a\text{ 是常数且 } a>0, a\neq 1)$$

叫做对数函数。其定义域 $D=(0,+\infty)$，值域 $W=(-\infty,$

$+\infty$)。

当 $a>1$ 时，对数函数在 D 上严格递增，如图 1-8(a)所示；

当 $0<a<1$ 时，对数函数在 D 上严格递减，如图 1-8(b)所示。

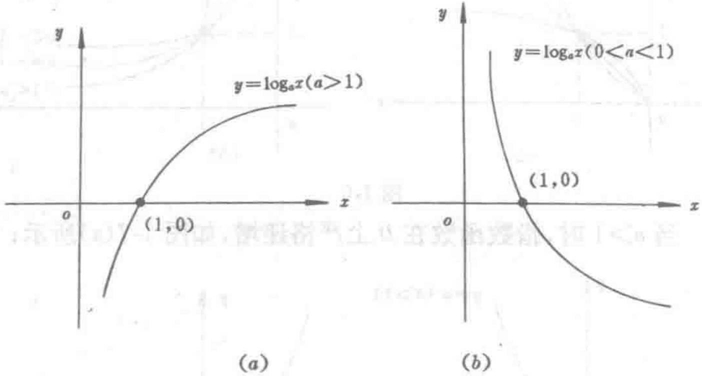
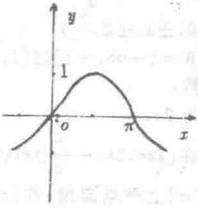
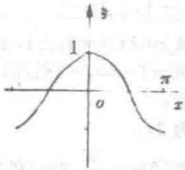
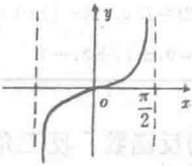
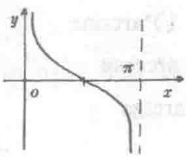


图 1-8

注：$y=\log_a x$ 与 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ 的图形关于 x 轴对称；$y=\log_a x$ 与 $y=a^x$ 互为反函数；$y=\log_a x$ 中，当 a 取 10 或常数 $e(=2.7182\cdots)$ 时，分别称为常用对数函数（记为 $y=\lg x$）或自然对数函数（记为 $y=\ln x$）。

［三角函数］ 正弦函数、余弦函数、正切函数、余切函数、正割函数和余割函数统称为三角函数。

函数	图形	简单性质
正弦函数 $y=\sin x$		1. 定义域 $D=(-\infty,+\infty)$ 值域 $W=[-1,1]$； 2. 奇函数； 3. 周期为 2π； 4. 函数在 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ 上严格递增，在 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$ 上严格递减 $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$
余弦函数 $y=\cos x$		1. 定义域 $D=(-\infty,+\infty)$ 值域 $W=[-1,1]$； 2. 周期为 2π； 3. 函数在 $[(2k-1)\pi,2k\pi]$ 上严格递增；在 $[2k\pi,(2k+1)\pi]$ 上严格递减 $(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$
正切函数 $y=\mathrm{tg}x$		1. 定义域 $x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$； 值域 $W=(-\infty,+\infty)$； 2. 奇函数； 3. 周期为 π； 4. 函数在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内严格递增 $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$
余切函数 $y=\mathrm{ctg}x$		1. 定义域 $x\neq k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2\cdots)$ 值域 $W=(-\infty,+\infty)$； 2. 奇函数； 3. 周期为 π； 4. 函数在 $(k\pi,(k+1)\pi)$ 内严格递减 $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$