高等学校面向二十一世纪规划教学丛书

Advanced Mathematics

高等数学

【第三版】

邱淦俤 / 编著

厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS
国家一级出版社
全国百佳图书出版单位

高等学校面向二十一世纪规划教学丛书

Advanced Mathematics

高等数学

【第三版】

邱淦俤 / 编著

厦门大学出版社 XIAMEN UNIVERSITY PRESS | 国家一级出版社 全国百佳图书出版单位

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/邱淦俤编著．—3版．—厦门：厦门大学出版社，2015.7
ISBN 978-7-5615-5628-3

Ⅰ．①高… Ⅱ．①邱… Ⅲ．①高等数学 Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 156726 号

厦门大学出版社出版发行
(地址：厦门市软件园二期望海路 39 号 邮编：361008)
总编办电话：0592-2182177 传真：0592-2181406
营销中心电话：0592-2184458 传真：0592-2181365
网址：http://www.xmupress.com
邮箱：xmup@xmupress.com
三明市华光印务有限公司印刷
2015 年 7 月第 3 版 2015 年 7 月第 1 次印刷
开本：720×970 1/16 印张：26.25
字数：458 千字 印数：1～3 000 册
定价：43.00 元
本书如有印装质量问题请直接寄承印厂调换

第三版前言

本书第二版在内容组织上创新性地将多元函数的知识有机地整合到一元函数的相关知识之中，既突出了高等数学知识的系统性和科学性，又最大限度地避免了简单的重复，节省了篇幅，显得更为精炼. 以该书为主要支撑的教学改革成果“高等数学知识体系改革”荣获 2014 年福建省教学优秀成果二等奖. 因此，本次再版，较为完整地保持原有的知识体系不变，但对课内外的例题、习题和总复习题重新经过精心筛选，进一步补充完善使之与教材更为紧密配套，同时根据知识的难易程度，有针对性地合理安排循序渐进、有梯次的相关内容和拓展内容，统筹兼顾知识的基础和延伸，以更好地利于教学和不同层次学生学习的需求. 此外，此次再版还对全书进行一次认真细致的全面校勘，尽可能地避免打字和排版错误，减少学生不必要的麻烦.

此次再版中，宁德师院数学系林秀清、张敏、周仙耕、赵小珍、平征、陈省江、许丽莉、许萍虹、许爱珠、刘芳诸位教师在全书的勘误、例题、习题和总复习题的配备及解答方面付出大量的心血，在此对他们一并表示衷心感谢. 同时诚挚感谢厦门大学出版社在本书的再版工作中给予大力支持和帮助.

但鉴于编者水平所限，书中内容组织和知识分析方面仍有不尽如人意之处，希望读者不吝赐教指正，以期再版时予以修订采纳，使教材在原有基础上更上一个层次.

编　者

2015 年 5 月

目　录

第 1 章　函数 …… 1

1.1　预备知识 …… 1

1.2　函数 …… 3

1.2.1　函数的概念 …… 3

1.2.2　函数的表示法 …… 6

1.2.3　函数的性质 …… 7

1.2.4　复合函数和反函数 …… 9

1.2.5　基本初等函数 …… 10

习题 1-2 …… 15

1.3　经济活动中的几个常用函数 …… 17

1.3.1　需求函数 …… 17

1.3.2　供给函数 …… 18

1.3.3　成本函数 …… 19

1.3.4　收益函数与利润函数 …… 20

习题 1-3 …… 20

第 1 章　总复习题 …… 21

第 2 章　向量代数与空间解析几何 …… 23

2.1　向量代数 …… 23

2.1.1　空间直角坐标系与点的坐标 …… 23

2.1.2　向量的概念 …… 24

2.1.3　向量的运算 …… 25

习题 2-1 …… 30

2.2　空间中的平面和直线 …… 31

2.2.1　平面及其方程 …… 31

2.2.2　直线及其方程 …… 34

习题 2-2 …… 38

2.3　空间的曲面 …… 39

2.3.1 球面、柱面、锥面、旋转曲面 …… 40
2.3.2 标准二次曲面 …… 44
习题 2-3 …… 45
第 2 章 总复习题 …… 46
第 3 章 极限与连续 …… 48
3.1 极限 …… 48
3.1.1 数列极限 …… 48
3.1.2 函数极限 …… 50
3.1.3 极限的运算法则 …… 52
3.1.4 极限存在准则及两个重要极限 …… 54
3.1.5 无穷小与无穷大 …… 57
习题 3-1 …… 60
3.2 函数的连续性 …… 62
3.2.1 函数连续的定义 …… 62
3.2.2 函数的间断点 …… 63
3.2.3 函数连续的性质 …… 65
3.2.4 闭区间上连续函数的性质 …… 66
习题 3-2 …… 68
第 3 章 总复习题 …… 68
第 4 章 导数与微分 …… 70
4.1 切线、速度及其变化率 …… 70
4.1.1 切线 …… 70
4.1.2 瞬时速度 …… 71
4.1.3 函数的变化率 …… 72
4.2 导数概念 …… 73
习题 4-2 …… 75
4.3 求导法则及基本初等函数导数公式 …… 76
4.3.1 导数的四则运算 …… 76
4.3.2 反函数求导法则 …… 76
4.3.3 复合函数求导法则 …… 77
4.3.4 基本初等函数的导数 …… 77
4.3.5 隐函数求导法则 …… 79
4.3.6 参数方程求导法则 …… 80

4.3.7　偏导数的概念 …… 80
4.3.8　偏导数的几何意义 …… 81
4.3.9　多元复合函数的求导法则 …… 82
4.3.10　二元函数的隐函数求导法则 …… 83
4.3.11　偏导数在几何上的应用 …… 83
习题 4-3 …… 87
4.4　高阶导数 …… 90
4.4.1　一元函数的高阶导数 …… 90
4.4.2　二元函数的高阶偏导数 …… 91
习题 4-4 …… 92
4.5　微分 …… 93
4.5.1　一元函数的微分 …… 93
4.5.2　二元函数的全微分 …… 94
4.5.3　求导数与微分的主要公式与法则 …… 96
习题 4-5 …… 98
第 4 章　总复习题 …… 99
第 5 章　微分中值定理及导数的应用 …… 102
5.1　中值定理 …… 102
习题 5-1 …… 106
5.2　洛必塔(L′Hosptial)法则 …… 107
5.2.1　$\frac{0}{0}$和$\frac{\infty}{\infty}$未定式的极限 …… 108
5.2.2　其他未定式的极限 …… 110
习题 5-2 …… 112
5.3　导数在研究函数性态上的应用 …… 113
5.3.1　函数的单调性判定法 …… 113
5.3.2　函数的极值 …… 115
5.3.3　函数的最大值和最小值 …… 119
5.3.4　函数的凹凸性与函数图像的描绘 …… 126
习题 5-3 …… 133
5.4　导数在经济分析中的应用 …… 134
5.4.1　边际分析 …… 134
5.4.2　弹性分析 …… 136

5.4.3　最大利润问题 …… 139
5.4.4　最低成本的生产量问题 …… 140
5.4.5　最优批量问题 …… 141
习题 5-4 …… 142
5.5　二元函数的极值与最值 …… 143
5.5.1　二元函数的极值 …… 143
5.5.2　二元函数的最值 …… 145
习题 5-5 …… 147
5.6　条件极值与拉格朗日乘数法 …… 147
习题 5-6 …… 150
第 5 章　总复习题 …… 151
第 6 章　不定积分 …… 153
6.1　不定积分的概念 …… 153
习题 6-1 …… 155
6.2　不定积分的性质 …… 156
习题 6-2 …… 157
6.3　换元积分法 …… 158
6.3.1　第一类换元法 …… 158
6.3.2　第二类换元法 …… 162
习题 6-3 …… 166
6.4　分部积分法 …… 167
习题 6-4 …… 170
6.5　几种特殊类型函数的积分 …… 171
6.5.1　有理函数的积分 …… 171
6.5.2　三角函数有理式的积分 …… 173
6.5.3　简单无理函数的积分 …… 175
习题 6-5 …… 176
6.6　积分表的使用 …… 177
第 6 章　总复习题 …… 180
第 7 章　定积分及其应用 …… 181
7.1　定积分的概念 …… 181
7.1.1　定积分问题举例 …… 181
7.1.2　定积分的定义 …… 183

习题 7-1 …… 186
7.2　定积分的性质 …… 186
习题 7-2 …… 189
7.3　微积分基本公式 …… 189
7.3.1　积分上限函数 …… 190
7.3.2　微积分基本公式 …… 191
习题 7-3 …… 193
7.4　定积分的换元法 …… 194
习题 7-4 …… 196
7.5　定积分的分部积分法 …… 197
习题 7-5 …… 199
7.6　广义积分 …… 199
7.6.1　无限区间上的广义积分 …… 200
7.6.2　无界函数的广义积分 …… 201
习题 7-6 …… 204
7.7　定积分的应用 …… 205
7.7.1　定积分的元素法 …… 205
7.7.2　平面图形的面积 …… 206
7.7.3　平行截面积为已知的立体的体积 …… 210
7.7.4　旋转体的体积 …… 211
7.7.5　平面曲线弧长 …… 213
7.7.6　物理上的应用 …… 216
7.7.7　经济上的应用 …… 219
习题 7-7 …… 220
第 7 章　总复习题 …… 221
第 8 章　多元函数的积分学 …… 224
8.1　二重积分 …… 224
8.1.1　曲顶柱体的体积 …… 224
8.1.2　平面薄片的质量 …… 225
8.1.3　二重积分的定义 …… 226
8.1.4　二重积分的性质 …… 227
8.1.5　二重积分的直角坐标计算法 …… 228
8.1.6　二重积分的极坐标计算法 …… 234

习题 8-1 …… 238
8.2 三重积分 …… 240
8.2.1 三重积分的定义与计算公式 …… 240
8.2.2 柱面坐标与球面坐标的三重积分计算公式 …… 242
习题 8-2 …… 248
8.3 二、三重积分的应用 …… 250
8.3.1 物理中的应用 …… 250
8.3.2 几何上的应用 …… 253
习题 8-3 …… 257
8.4 曲线积分 …… 258
8.4.1 对弧长的曲线积分 …… 258
8.4.2 对坐标的曲线积分 …… 261
8.4.3 格林(Green)公式 …… 265
8.4.4 平面上第二型曲线积分与路径无关的条件 …… 269
习题 8-4 …… 272
8.5 曲面积分 …… 274
8.5.1 第一型曲面积分 …… 274
8.5.2 第二型曲面积分 …… 276
8.5.3 奥一高公式 …… 278
8.5.4 斯托克斯公式 …… 280
习题 8-5 …… 282
第 8 章 总复习题 …… 283
第 9 章 无穷级数 …… 286
9.1 常数项级数 …… 286
9.1.1 级数定义及敛散性 …… 286
9.1.2 收敛级数的基本性质 …… 288
习题 9-1 …… 289
9.2 常数项级数的收敛性判别法 …… 290
9.2.1 正项级数及其收敛性判别法 …… 290
9.2.2 交错级数及其判别法 …… 295
9.2.3 绝对收敛与条件收敛 …… 296
习题 9-2 …… 297
9.3 幂级数 …… 298

9.3.1　幂级数及其收敛区间 …… 298
9.3.2　幂级数的运算 …… 301
习题 9-3 …… 302
9.4　函数展开成幂级数 …… 303
习题 9-4 …… 307
9.5　傅立叶(Fourier)级数 …… 308
9.5.1　三角级数 …… 308
9.5.2　周期为 2π 的周期函数展开成傅立叶级数 …… 308
9.5.3　周期为 $2l$ 的周期函数展开成傅立叶级数 …… 314
习题 9-5 …… 316
第 9 章　总复习题 …… 316
第 10 章　微分方程 …… 318
10.1　基本概念 …… 318
习题 10-1 …… 319
10.2　一阶微分方程 …… 320
10.2.1　可分离变量方程 …… 320
10.2.2　齐次方程 …… 322
10.2.3　线性方程 …… 322
10.2.4　全微分方程 …… 327
习题 10-2 …… 328
10.3　几类特殊的高阶方程 …… 330
习题 10-3 …… 332
10.4　二阶常系数线性微分方程 …… 332
10.4.1　二阶常系数齐次线性方程 …… 333
10.4.2　二阶常系数非齐次线性微分方程 …… 337
习题 10-4 …… 341
第 10 章　总复习题 …… 341
附录一:积分表 …… 343
附录二:数学建模 …… 354
附录三:Mathematica 入门 …… 362
习题答案与提示 …… 367
参考文献 …… 406

第 1 章　函数

函数是高等数学研究的主要对象，本章将介绍函数的概念、基本初等函数及经济生活中常见的一些函数，这些内容是学习本课程必须掌握好的基本知识.

1.1　预备知识

1. 集合

一般地说，所谓集合（或简称集）是指具有特定性质的一些事物的总体. 组成这个集合的事物称为该集合的元素.

例 1　全体实数.

例 2　全体自然数.

例 3　某校全体学生.

通常以大写字母 A、B、$C\cdots$ 表示集合，以小写字母 a、b、$c\cdots$ 表示集合的元素. a 是集合 A 的元素，记作 $a \in A$（读作 a 属于 A）；a 不是集合 A 的元素，记作 $a \notin A$（读作 a 不属于 A）.

由有限多个元素组成的集合称为有限集. 例如，由元素 a_1、a_2、a_3 $\cdots$ a_n 组成的集合 A，可记作 $A = \{a_1, a_2, a_3 \cdots a_n\}$.

由无穷多个元素组成的集合称为无限集. 无限集通常用如下的记号表示：

$$M = \{x \mid x \text{ 所具有的特性}\}$$

高等数学中用到的集合主要是数集，即元素都是数的集合. 我们将全体自然数的集合记作 $\mathbf{N}$，全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$，全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$，全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$.

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，即若 $x \in A$，则必 $x \in B$，就称 A 是 B 的子集，记作 $A \subset B$（读作 A 包含于 B 或读作 B 包含 A）.

例如　$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，就称集合 A 与 B 相等，记作 $A = B$.

不含任何元素的集合称为空集. 例如 $\{x \mid x \in R, x^2 + 1 = 0\}$ 是空集，因为满足条件 $x^2 + 1 = 0$ 的实数是不存在的. 空集记作 $\varnothing$，并规定空集为任何集合的子集.

2. 区间

设 a, b 为实数，且 $a < b$，数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 称为开区间，记作 (a, b)，即 $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$，见图 1-1.

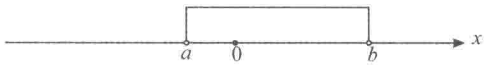

图 1-1

数集 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为闭区间，记作 $[a, b]$，即 $[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$，见图 1- 2.

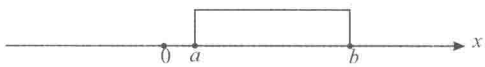

图 1-2

类似地 $[a, b)$，$(a, b]$ 称为半开区间，即 $[a, b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$，见图 1-3.

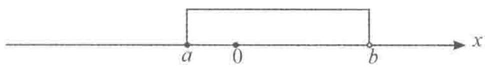

图 1-3

$(a, b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$，见图 1-4.

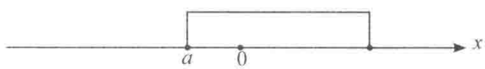

图 1-4

以上这些区间都称为有限区间，数 $b - a$ 称为这些区间的长度.

此外还有无限区间，引进 $+\infty$（读作正无穷大）及 $-\infty$（读作负无穷大），则可类似地表示 $[a, \infty) = \{x \mid a \leqslant x\}$，见图 1-5；$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$ 见图 1-6.

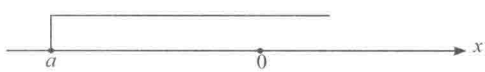

图 1-5

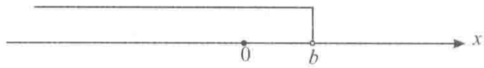

图 1-6

$\{-\infty, +\infty\} = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$，见图 1-7.

图 1-7

为了避免重复，今后用“区间 I”代表各种类型的区间.

3. 邻域

设 p_0 为 R^n 中的点，$\delta > 0$ 为一实数，集合$\{X \mid |p_0 - X| < \delta\}$ 称为 p_0 的 δ 邻域，记作 $U(p_0, \delta)$，其中 p_0 称为这个邻域的中心，δ 称为这邻域的半径.

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉. 在点 p_0 的邻域去掉中心后，称为点 p_0 的去心邻域，记作 $\overset{0}{U}(p_0, \delta)$. 特别地，当 $p_0 \in R$ 时，p_0 的 δ 邻域

$$U(p_0, \delta) = \{x \mid |p_0 - x| < \delta\} = (p_0 - \delta, p_0 + \delta)$$

为数轴上的一个开区间.

当 $p_0 \in R^2$ 时，$p_0(x_0, y_0)$ 的 δ 邻域

$$\begin{aligned} U(p_0, \delta) &= \{p(x, y) \mid |p_0 - p| < \delta\} \\ &= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \end{aligned}$$

为平面上的以 p_0 为心，以 δ 为半径的开圆内部.

1.2　函数

1.2.1　函数的概念

在研究某个自然现象或实际问题时，往往会发现问题中的变量并不是彼此独立地变化的，而是相互联系并遵循着一定的变化规律. 考虑以下几个例子：

例 1　在自由落体运动中，物体下落的距离 S 与下落时间 t 的关系为：

$$S = \frac{1}{2}gt^2 \quad (g \text{ 为加速度})$$

对于每一个时间 $t \in [0, T]$，由上式就可唯一确定 S 的一个值.

例 2　表 1-1 给出某市人均收入 P 与某些年份 t 之间的关系.

表 1-1

年份	人均收入,元 / 年
1970	420
1980	530
1990	3600
2000	6800
2009	8200

对于每一个年份 t,从表格中就可唯一地确定人均收入 P 的值.

例 3 图 1-8 是气温自动记录仪描出的某一天的气温变化曲线,它给出了时间 t 与气温 T 之间的关系.

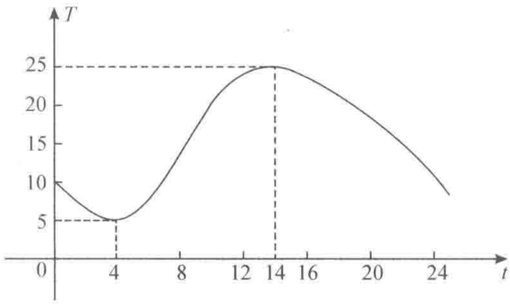

图 1-8

当时间 t 在区间$[0,24]$中任取一个值时,从图上可以唯一地确定 T 的值,如 $t=14$ 时,$T=25$ ℃.

从以上的例子看到,虽然它们所描述的问题各不相同,但却有共同的特征:

(1) 每个问题中都有两个变量,它们之间不是彼此独立的,而是相互联系,相互制约的;

(2) 当一个变量在某个变化范围内任意取定一值时,另一个变量按一定法则就有一个确定的值与之相对应.

具有这两个特征的变量之间的依存关系,称为函数关系.下面给出函数的一般性定义.

定义 1 设 A 是R^n 中的一个点集,如果存在一个对应关系 f,使得对 A 中

任一点 $p(\forall p \in A)$，通过 f 都对应唯一一个 $y \in R$，则称 f 是确定在 A 上的一个函数. 记作

$$f: A \to \mathbf{R}.$$

集合 A 称为函数的定义域，p 称为自变量，y 称为因变量，p 所对应的 y 称为 f 在 p 的函数值，记为 $y = f(p)$. 全体函数值的集合

$$f(A) = \{y \mid y = f(p), p \in A\}$$

称为函数的值域.

当 $A \subset R$ 时，就是我们所熟悉的一元函数 $y = f(x)$；当 $A \subset R^2$ 时，若 $p \in A$，则 p 为平面上的点 (x, y)，$z = f(x, y)$ 称为二元函数.

在数学中，对于抽象的函数表达式，我们约定：函数的定义域就是使函数表达式有意义的自变量的取值范围.

例 4　函数 $y = \sqrt{1 - x^2}$ 的定义域为 $[-1, 1]$.

例 5　函数 $y = \lg(5x - 4)$ 的定义域应满足 $5x - 4 > 0$，故定义域为 $\left(\frac{4}{5}, +\infty\right)$.

例 6　函数 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - x - 2}}$ 的定义域应满足 $x^2 - x - 2 > 0$，即 $(x-2)(x+1) > 0$，故定义域为 $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

例 7　函数 $y = \arcsin \dfrac{x-1}{5}$ 的定义域应满足 $\left|\dfrac{x-1}{5}\right| \leqslant 1$，即为 $-5 \leqslant x - 1 \leqslant 5$，故定义域为 $[-4, 6]$.

在函数关系中，定义域、对应规则和值域是确定函数关系的三个要素，如果两个函数的对应规则和定义域、值域相同，则认为这两个函数是相同的，至于自变量和因变量用什么字母表示则无关紧要.

例 8　下列各对函数是否相同？

(1) $f(x) = x + 1, g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$；　　(2) $f(x) = |x|, g(x) = \sqrt{x^2}$.

解：(1) 不相同. $f(x) = x + 1$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，$g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ 的定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$，因此 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域不相同，故不是相同的函数.

(2) 相同. 因 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域相同，均为 $(-\infty, +\infty)$，而且对应规则、值域也相同，所以是相同的函数.

例 9　求函数 $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 2) + \sqrt{3 - x^2 - y^2}$ 的定义域.

解:函数 $\ln(x^2+y^2-2)$ 的定义域是 $x^2+y^2-2>0$ 或 $2<x^2+y^2$,

函数 $\sqrt{3-x^2-y^2}$ 的定义域是 $3-x^2-y^2\geqslant 0$ 或 $x^2+y^2\leqslant 3$,

它们的公共部分是 $2<x^2+y^2\leqslant 3$. 因此函数 $f(x,y)$ 的定义域是以原点为心,半径分别是$\sqrt{2}$ 与$\sqrt{3}$ 的圆环区域 G. 圆周 $x^2+y^2=2\notin G$,圆周 $x^2+y^2=3\in G$.

例 10 求函数 $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$ 的定义域.

解:因为函数值是实数,且分母不能为 0,因此 $f(x,y,z)$ 的定义域为

$$1-x^2-y^2-z^2>0 \text{ 或 } x^2+y^2+z^2<1,$$

即函数的定义域是以原点为心的单位球内的所有点.

1.2.2 函数的表示法

由于函数的对应法则是多种多样的,所以表示一个函数要采取适当的方法. 从上面所举的三个例子可见,在例 1 中,函数的对应法则用一个公式或叫做解析式来表示,所以称为**解析法**;在例 2 中,函数的对应法则用一张表格来表示,称为**表格法**;在例 3 中,函数的对应法则用一条曲线来表示,称为**图示法**. 一般说来,函数的常用表示法就是上述三种. 这三种表示法各有优缺点:

解析法的优点是形式简明,便于作理论研究与数值计算;缺点是不如图示法来得直观.

表格法的优点是表中有对应数据,可以直接查用;缺点是不便于作理论研究,也不直观.

图示法的优点是直观,并可从图形看出函数的变化情况;缺点是不便于作理论研究. 尽管如此,今后在研究函数时仍常常借助于它的图形,从直观上去了解它的变化情况.

还有一些函数当它的自变量在某一个区间上取值时,用一个解析式表示,而在另一个区间上取值时,用另一个解析式表示. 这种在不同区间上用不同解析式来表示的函数称为**分段函数**. 例如符号函数:

$$\mathrm{Sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

它的定义域为$(-\infty,+\infty)$,图形如图 1-9 所示.