标准化题型

分析与研究

高中数学

北京景山学校 崔孟明 主编

BIAO ZHUN HUA TIXING

天津科学技术出版社

标准化题型分析与研究

高 中 数 学

北京景山学校 崔孟明 主编

李勃櫟 徐望根 周去难
于仲云 张卡宁 石绍珺 编

天津科学技术出版社

标准化题型分析与研究

高 中 数 学

北京景山学校 崔孟明 主编

李勃樑 徐望根 周去难 编
于仲云 张卡宁 石绍珺

*

天津科学技术出版社出版

天津市赤峰道130号

天津新华印刷一厂印刷

新华书店天津发行所发行

*

开本787×1092毫米 1/32 印张7.5 字数158,000

一九八六年十一月第一版

一九八六年十一月第一次印刷

印数：1－294,000

书号：7212·17 定价：1.10元

前　　言

《标准化题型分析与研究》是为教育改革编写的关于考试科学的丛书。

众所周知，目前的考试存在着严重的缺点，如命题守不住“双基”，可靠性、有效性指标较差，评分不客观、不科学，考试结果横向、纵向的可比性都很差等。这种形式的考试作为教学的“指挥棒”，使教育偏离了正确目标，使教学不能按科学规律运转，使学生的学习上不了轨道。结果多数学生学得死，学得伪，负担很重，质量却很低。特别由于当前片面追求升学率风气的影响，使广大学生陷入浩瀚题海之中，弄得疲惫不堪，“双基”却不扎实，能力则更差。因此，在当前教育改革中怎样改革考试，已成为十分突出的问题。

实行标准化考试能较好地解决上述问题。

标准化考试使考试和教学科学地结合在一起，自然地成为教学的一个环节——检查总结，它和教学的其它环节一起都按计划进行。于是，学生不再感到考试是额外负担，更不是突然袭击。标准化考试能从其准确、迅速的反馈，及时为教学提供必要的信息，指导教学按科学规律运转，不仅保证教学效率，而且保证教学向正确目标前进。标准化考试还能帮助教师用最少量的作业使学生获得“双基”和各层次能力上的最完善的训练。

由上述可见，标准化考试不单是教学检测手段，更是保证教学有高效率和正确方向的重要措施。

本丛书并不想也不可能解决当前教育中的全部问题，而只是想在当前教育改革中先迈出一步，以期引起大家对这些问题的重视，促进对这些问题的探讨研究。

本书的着眼点是标准化考试最基础的部分——命题。丛书的每一册，都是先分析有关题型结构上的特点，研究它们的使用范围和使用方法。为使读者能尽快地掌握乃至运用这些题型，每种题型后面都给出了能够说明该题型各方面特点、使用范围和使用方法的例题。为给读者提供一定的练习机会，书中还提供了若干组研究题。

书中的例题和研究题，是在按结构教学观点对教材进行充分分析的基础上编写的，几乎每个题都包含知识和能力两个方面，它们的数量虽少，但能够充分地覆盖高中课程的全部知识和各层次的能力。因此，将它们用于课堂训练、教学检查、学生预习或复习后的自我测试都是很合适的。

由于作者水平的限制，本书可能有不妥之处，恳请读者批评指正。

编　者

1986.8

目　录

第一部分　标准化题型研究

第二部分　研究题

附 研究题答案与提示

第一部分　标准化题型研究

一、最佳选择题

此种题目的基本模式是：在每个问题下有四、五个可供选择的答案，其中有且只有一个是正确的，即符合题意的答案．这类题型所见较多．

【例1】设$a=0$，那么下面结论正确的一个是（　　）．

（A）$+a$是正数；（B）$-a$是负数；

（C）a是一个非正非负的中性数；

（D）$+a$比a大，$-a$比a小．

分析：从小到大的顺序来考虑实数，“零”实际上是从负数转化到正数的唯一的一个中性数．

解法：因$a=0$，故a既非正数，也非负数．a是一个非正非负的中性数．故应选（C）．

【例2】设$n=1$，那么下面结论正确的一个是（　　）．

（A）n是质数；（B）n是合数；

（C）n是非质数非合数的中性数；

（D）以上结论都不对．

分析：应根据质数和合数的定义来进行判断．

解法：除了被自身和1整除以外，再也不能被其他正整数整除的大于1的自然数叫做质数．

除了被自身和1整除以外，还能被其他正整数整除的自

然数叫做合数。

根据上述定义，n既非质数，也非合数，n是非质数非合数的中性数，故应选（C）。

【例3】关于质数，下面结论中错误的一个是（　　）。

（A）所有的质数不一定都是奇数；

（B）最小的质数是3；

（C）有唯一的一个偶质数；

（D）以上结论，有且只有一个是错误的。

分析：按质数的定义，最小的质数是2，而不是3。

解法："3"是最小的奇质数，而"2"是最小的质数，且是唯一的一个偶质数，故应选（B）。

【例4】关于数的单位，下面结论中错误的一个是（　　）。

（A）实数的单位是1；（B）虚数的单位是i；

（C）复数的单位是1和i；

（D）以上结论，有且只有一个是错误的。

分析：要注意，虚数包括纯虚数和非纯虚数两类。

解法：纯虚数的单位是i，非纯虚数的单位是1和i，故应选（B）。

【例5】下面是圆周率π与其他数之间的大小比较，其中正确的一个是（　　）。

（A）$\pi>\sqrt{10}$；　　（B）$\pi>3.1416$；

（C）$\pi>\dfrac{22}{7}$；　　（D）$\pi<\dfrac{355}{113}$；

（E）以上结论都不对。

分析：π是一个无理数，写出来就是

$$\pi = 3.1415926\cdots.$$

将其他的数与它比较即可。

解法：由于 $\pi = 3.1415926\cdots$,

$$\sqrt{10} = 3.16\cdots\cdots,$$

$$\frac{22}{7} = 3.142\cdots,$$

$$\frac{355}{133} = 3.1415929\cdots.$$

比较结果，有

$$\pi < \frac{355}{113}.$$

故应选 (D) 。

【例 6】设$M = \{x \mid x > 3\}$，$N = \{x \mid 2 < x < 10\}$，则$M \cup N$是（　　）。

(A) $\{x \mid x > 2\}$； (B) $\{x \mid x > 3\}$；

(C) $\{x \mid 3 < x < 10\}$； (D) $\{x \mid 2 < x < 3\}$.

分析：此题是从集合的“并”这一角度进行最佳选择的，宜把集合表示在数轴上再考虑。

解法：
$$M \cup N = \{x \mid x > 3\} \cup \{x \mid 2 < x < 10\} = \{x \mid x > 2\}.$$

故选 (A) 。

【例 7】设$a \in R$，下面说法正确的一个是（　　）。

(A) $2a < 3a$； (B) $a^3 > a^2$；

(C) $-ai < ai$； (D) $2 - a > 1 - a$。

分析：从“虚数不能比较大小而实数能比较大小”这一角度来考虑。

解法：因为$2-a=1+(1-a)>1-a$，故应选（D）。

【例8】对$x\in R$，下列各式正确的一个是（　　）。

（A）$\lg x^2=2\lg x$；　（B）$\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}x)=x$，

（C）$a^{\log_a x}=x$（$a>0,a\neq1$）；

（D）$\sec x=\sqrt{1+\mathrm{tg}^2x}$。

分析：要注意的是：所选恒等式要对$x\in R$成立。

解法：（A），只对$x>0$成立。（C），只对$x>0$成立。（D），只对第一、四象限的角及终边与x轴的正方向重合的角成立。（B），根据反正切函数的定义，对$x\in R$，有$\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}x)=x$。故应选（$B$）。

【例9】实数$m\neq-1$时，复数$(m^2-3m-4)+(m^2-5m-b)\mathrm{i}$是（　　）。

（A）实数；（B）虚数；（C）纯虚数；

（D）不能确定；（E）非纯虚数。

分析：先把实部和虚部因式分解，再进行判断选择。

解法：把原复数化为下面的形式：

$$(m-4)(m+1)+(m+1)(m-6)\mathrm{i}.$$

当$m=4$时，原复数为纯虚数。

当$m=6$时，原复数为实数。

故当$m\neq-1$时，原复数有可能为虚数，也有可能为实数，应选择（D）。

【例10】求一个数，使该数与其平方互为共轭复数，则这个复数为（　　）。

（A）$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$与$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$；（$B$）0；

（C）1；

(D) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 与 $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，

(E) 0 或 1 或 $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$。

分析：依题，所选择的复数不能遗漏。

解法：容易验证，(E) 中的四个复数都符合要求，故应选择 (E)。

本题也可以用推理计算来进行选择：

设所求复数为 Z，依题有

$$\overline{Z}=Z^2.$$

再设 $Z=x+y\mathrm{i}$ $(x,\ y\in R)$，有

$$x-y\mathrm{i}=(x+y\mathrm{i})^2,$$

$$x-y\mathrm{i}=x^2-y^2+2xy\mathrm{i}.$$

根据复数相等条件，有

$$\begin{cases} x^2-y^2=x, \\ 2xy=-y. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} y^2=x^2-x, \\ x=-\frac{1}{2}\text{或}y=0. \end{cases}$$

解方程组

$$\begin{cases} y^2=x^2-x, \\ x=-\frac{1}{2}, \end{cases}$$

得 $x=-\frac{1}{2}$, $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad z=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

解方程组

$$\begin{cases} y^2 = x^2 - x, \\ y = 0, \end{cases}$$

得　　　$x = 0$ 或 1，$y = 0$。$z = 0$，1。

故所求复数为 0，1，$-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$。应选择（$E$）。

这种直接从题设的条件出发、通过合理的运算、严密的推理、得出正确结果来作出判断的方法，叫做直接法。当其他方法较难作出判断时，常用这种方法进行选择。

【例11】下面结论正确的一个是（　　）。

（A）$\log_4 3 > \log_{64} 28$；　（B）$\log_4 3 < \log_{64} 28$；

（C）$\log_4 3 = \log_{64} 28$；　（D）$\log_4 3 > \log_{62} 27$。

分析：利用对数公式 $\log_a b = \log_{a^n} b^n$，使 $\log_4 3$ 与 $\log_{64} 27$ 挂上钩。

解法：∵　$\log_4 3 = \log_{4^3} 3^3 = \log_{64} 27$，

又当 $a > 1$ 时，对数函数 $y = \log_a x$ 是增函数，

∴　$\log_{64} 27 < \log_{64} 28$，

∴　$\log_4 3 < \log_{64} 28$。

故应选（B）。

【例12】$\sqrt{2\sqrt{ab} - a - b}$（$a \leqslant 0$，$b \leqslant 0$）的化简结果是（　　）。

（A）$\sqrt{a} - \sqrt{b}$；　　（B）$\sqrt{b} - \sqrt{a}$；

（C）$\sqrt{-a} + \sqrt{-b}$；（D）$\sqrt{-b} - \sqrt{-a}$。

分析：应考虑到“被开方数是一个非负数”和“算术根是一个非负数”。

解法：依题有

$$\sqrt{2\sqrt{ab}-a-b}=\sqrt{(\sqrt{-a}+\sqrt{-b})^2}$$
$$=\sqrt{-a}+\sqrt{-b}.$$

故应选（C）。

【例13】在复数范围内，若$a^2=-(a+1)$，则$a^{1986}+\left(\frac{1}{a}\right)^{1986}$等于（　）。

（A）2；（B）-2；（C）1；（D）-1。

分析：由$a^2=-(a+1)$得

$$a^2+a+1=0.$$

$$\therefore\ (a-1)(a^2+a+1)=0,$$

$$a^3-1=0,$$

$$a^3=1.$$

通过$a^3=1$把原式化简。

解法：由$a^2=-(a+1)$得$a^3=1$.故得

$$a^{1986}+\left(\frac{1}{a}\right)^{1986}=(a^3)^{662}+\frac{1}{(a^3)^{662}}=1+1=2.$$

故应选（A）。

【例14】如果$xy=a$，$xz=b$，$yz=c$，且$a\neq 0$，$b\neq 0$，$c\neq 0$，那么$x^2+y^2+z^2=$（　）。

（A）$\dfrac{ab+ac+bc}{abc}$；　（B）$\dfrac{a^2+b^2+c^2}{abc}$；

（C）$\dfrac{(ab+ac+bc)^2}{abc}$；　（$D$）$\dfrac{(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2}{abc}$。

分析：依题，可以求出x^2，y^2，z^2来。

解法：$\because\ xy=a$，$xz=b$，$yz=c$，

$\therefore\quad x^2y^2z^2=abc,\ \ y^2z^2=c^2,$

$$\therefore\quad x^2=\frac{ab}{c}.$$

同理 $y^2=\dfrac{ac}{b},\quad z^2=\dfrac{bc}{a}.$

$$\therefore\quad x^2+y^2+z^2=\frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}$$

$$=\frac{(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2}{abc}.$$

故应选（D）。

也可以用下法进行判断：

依题，xy，xz，yz分别是a，b，c的一次式，因此$x^2+y^2+z^2$也是关于a，b，c的一次式．在（D）中，分子是关于a，b，c的四次式，分母是三次式，因此分式是关于a，b，c的一次式，而（A）、（B）、（C）都不是关于a，b，c的一次式．故应选（D）。

【例15】如果$\log_a\dfrac{2}{3}<1$，那么a的取值范围是（　　）。

（A）$0<a<\dfrac{2}{3}$；（B）$a>\dfrac{2}{3}$；

（C）$\dfrac{2}{3}<a<1$；（D）$0<a<\dfrac{2}{3}$或$a>1$。

分析：从对数函数$y=\log_a x$的增减性来进行最佳选择，宜从$a>1$或$0<a<1$两种情况考虑。

解法：$\log_a\dfrac{2}{3}<1$可化为$\log_a\dfrac{2}{3}<\log_a a$。

从 $\begin{cases} 0<a<1 \\ \log_a \dfrac{2}{3}<\log_a a \end{cases}$ 得

$\begin{cases} 0<a<1, \\ \dfrac{2}{3}>a, \end{cases}$ 即 $0<a<\dfrac{2}{3}$.

从 $\begin{cases} a>1 \\ \log_a \dfrac{2}{3}<\log_a a \end{cases}$ 得

$\begin{cases} a>1, \\ \dfrac{2}{3}<a, \end{cases}$ 即 $a>1$.

故应选（D）.

【例16】设 $M=\{x \mid x\leqslant 0\}$，则下列关系式中正确的一个是（　　）.

（A）$0\subset M$；　　（B）$\{0\}\in M$；

（C）$\{0\}\subset M$；　　（D）$\phi\in M$.

分析：从集合和集合、元素与集合的关系符号的正确表示来进行最佳选择.

解法："0"是元素，M是集合，其关系不能用包含符号，故筛掉（A）.同样，集合与集合的关系不能用属于符号，应筛掉（B）、（D）.故应选（C）.

这种最佳题型选择题，应充分利用题型中给出的"有且只有一个结论是正确的"条件，在提供的四、五个答案或结

论中，排除错误的答案或结论，留下的一个一定是正确的。这种判断的方法叫做筛选法，也叫做排它法。

【例17】已知$abcd>0$，$a<0$，$b<d$，$d>0$，那么下面结论正确的一个是（　　）。

(A) $a<0$，$b>0$，$c>0$，$d>0$；

(B) $a>0$，$b<0$，$c>0$，$d<0$；

(C) $a<0$，$b<0$，$c<0$，$d>0$；

(D) $a<0$，$b>0$，$c<0$，$d<0$；

(E) 以上结论都不对。

分析：本题应寻找已知与结论之间的矛盾。

解法：若（A）正确，则$abcd<0$，与已知矛盾。

若（B）正确，则$a>0$，与已知矛盾。

若（C）正确，则$abcd<0$，与已知矛盾。

若（D）正确，则$b>c$，与已知矛盾。

应排除（A）、（B）、（C）、（D），故选（E）。

【例18】如果$\log_2[\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x)]=\log_3[\log_{\frac{1}{3}}(\log_3 y)]=\log_5[\log_{\frac{1}{5}}(\log_5 z)]=0$，则有（　　）。

(A) $z<x<y$；　　(B) $x<y<z$；

(C) $y<z<x$；　　(D) $z<y<x$。

分析：把x，y，z分别求出来再比较。

解法：$\because\ \log_2[\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x)]=0$，

$$\therefore\ \log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x)=1,\ \log_2 x=\frac{1}{2},\ x=\sqrt{2}。$$

同理有

$$y=\sqrt[3]{3},\ z=\sqrt[5]{5}。$$