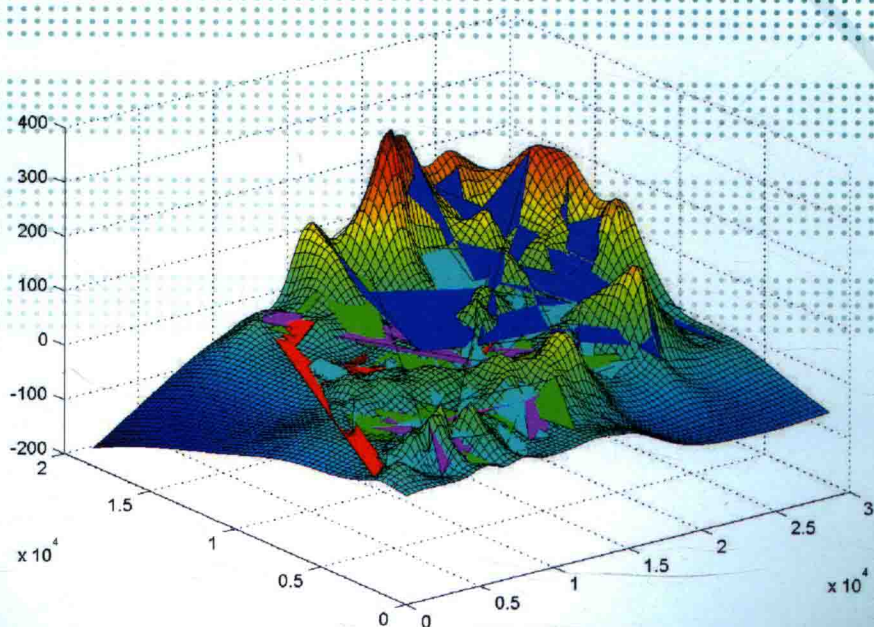




潘 斌 于晶贤 衣 娜 主编 陈明明 主审

数学建模教程

资深建模指导教师编写

大学生数学建模竞赛全方位备战指导：

基本数学原理讲解 / / / 常用建模方法构建

实际问题分析 / / / 常用建模软件介绍 / / / 案例算法实现



化学工业出版社

数学建模教程

潘 斌 于晶贤 衣 娜 主 编
陈明明 主 审



化学工业出版社

· 北 京 ·

本书分 7 章, 介绍数学建模基本方法、理论。具体内容包括: 数学建模概述、基本方法建模、数值计算基础、微分方程方法建模、优化问题及其求解、统计分析方法、现代优化方法。另外, 本书还介绍数学建模竞赛中常用的软件, 包括 LINGO 软件、Matlab 软件、SPSS 软件在数学建模中的应用。每章配有习题。

本书可作为本科生、研究生的数学建模教材, 也可以作为数学建模指导教师及参赛者的参考书。

图书在版编目 (CIP) 数据

数学建模教程/潘斌, 于晶贤, 衣娜主编. —北京: 化学工业出版社, 2016. 10

ISBN 978-7-122-28099-2

I. ①数… II. ①潘…②于…③衣… III. ①数学模型-高等学校-教材 IV. ①O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 221764 号

责任编辑: 郝英华 唐旭华

装帧设计: 张 辉

责任校对: 王 静

出版发行: 化学工业出版社 (北京市东城区青年湖南街 13 号 邮政编码 100011)

印 装: 三河市航远印刷有限公司

787mm×1092mm 1/16 印张 20 字数 528 千字 2017 年 1 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询: 010-64518888 (传真: 010-64519686) 售后服务: 010-64518899

网 址: <http://www.cip.com.cn>

凡购买本书, 如有缺损质量问题, 本社销售中心负责调换。

定 价: 43.00 元

版权所有 违者必究

前 言

数学教育对提高普通高校毕业生的创新创业素质有着举足轻重的意义。数学建模是一门将数学与科技社会融合的桥梁性课程，集知识、能力和素质的培养与考察三位于一体。依托数学建模可以在很大程度上提高学生的创新能力，是实现培养学生思维能力和创造能力的一种有效途径。

辽宁石油化工大学自 1995 年开始参加全国大学生数学建模竞赛，经过 20 余年的努力，数学建模指导教师组已发展成为一支业务精干、充满创新探索精神的教师团队，积累了丰富的指导经验。近 3 年来，辽宁石油化工大学在各项数学建模竞赛中取得了优异成绩，共取得国家级一等奖 1 项，国家级二等奖 23 项。

辽宁石油化工大学数学建模教师团队结合多年数学建模竞赛辅导的经验，面向本科生、研究生学习和备战数学建模竞赛编写了本书。本书既涵盖了基本的数学原理，也通过对常用数学建模方法的讲解和实际问题的分析，培训学生思考、归纳、分析、创新的能力和技艺，旨在帮助学生在大学生数学建模比赛中获得好成绩。本书列举并分析比赛相关的案例，并给出算法实现的程序代码，让参赛者真正做到学以致用，而不是纸上谈兵。本书结构清晰，内容全面，适合作为普通高等学校的本科生和研究生的赛前培训教材，也可作为竞赛指导教师的参考书。

本书由潘斌、于晶贤、衣娜担任主编。辽宁省教学名师陈明明教授担任主审，全书共分 7 章：第 1 章由赵晓颖编写；第 2 章由潘斌编写；第 3 章由陈德艳编写；第 4 章由衣娜编写；第 5 章由于晶贤编写；第 6 章由么彩莲编写；第 7 章由王立敏编写。

鉴于编者水平有限，书中疏漏之处在所难免，欢迎大家批评指正，衷心希望广大读者提出宝贵的意见和建议，以便今后加以修正，使本书能不断丰富完善。

编者

2016 年 8 月

目 录

第 1 章 数学建模概述

1.1 数学模型与数学建模	1	1.2 数学建模的一般步骤	2
1.1.1 数学模型	1	1.3 数学建模示例	4
1.1.2 数学模型的分类	1	1.4 数学建模能力培养	9
1.1.3 数学建模	2	习题 1	10

第 2 章 基本方法建模

2.1 初等模型	11	2.3 概率方法建模	33
2.1.1 桌子能放平吗	11	2.3.1 传送带的效率	33
2.1.2 双层玻璃窗的功效	13	2.3.2 报童问题	35
2.1.3 动物的身长与体重	14	2.3.3 零件的预防性更换	36
2.1.4 公平的席位分配	16	2.3.4 零件的参数设计	38
2.1.5 效益的合理分配	20	2.3.5 足球门的危险区域	41
2.2 简单的优化方法建模	23	2.3.6 随机人口模型	44
2.2.1 步长的选择	24	2.4 马尔可夫链法建模	46
2.2.2 实物交换与消费者的 选择	25	2.4.1 马尔可夫链的基本知识	46
2.2.3 库存模型	28	2.4.2 有利润的马尔可夫链	51
2.2.4 森林救火模型	30	2.4.3 案例分析	53
		习题 2	58

第 3 章 数值计算基础

3.1 误差分析	60	3.3.3 Matlab 求解数值积分和数值 微分	86
3.1.1 误差的来源	60	3.4 非线性方程求解	89
3.1.2 误差类型	61	3.4.1 引言	90
3.1.3 向量和矩阵的范数	64	3.4.2 二分法	90
3.1.4 误差的传递	67	3.4.3 迭代法求根	91
3.2 插值与拟合	68	3.4.4 牛顿迭代法	92
3.2.1 引例	68	3.4.5 Matlab 求解非线性方程	93
3.2.2 理论基础: 数据插值 与拟合	69	3.5 线性方程组的数值解法	96
3.2.3 用 Matlab 软件求解插值 与拟合问题	71	3.5.1 解线性方程组的迭代法	97
3.2.4 案例分析	73	3.5.2 迭代法的收敛条件	99
3.3 数值微分和数值积分	76	3.5.3 Matlab 求解线性方程组	101
3.3.1 数值微分	76	3.6 常微分方程的数值解法	108
3.3.2 数值积分	79	3.6.1 简单的数值方法与基本概念	109
		3.6.2 龙格-库塔方法	113

3.6.3	线性多步法	115			
3.6.4	Matlab 求解常微分方程			初值问题	117
				习题 3	118
第 4 章 微分方程方法建模					
4.1	常微分方程建模	120	4.3	稳定性方法	144
4.1.1	几个简单实例	120	4.3.1	微分方程的平衡点 与稳定性	145
4.1.2	传染病模型	122	4.3.2	差分方程的不动点 与稳定性	146
4.1.3	药物在体内的分布 与排除	126	4.3.3	捕鱼业的持续收获	148
4.1.4	广告问题	129	4.3.4	种群的生存	149
4.1.5	经济增长模型	131	4.4	偏微分方程建模	157
4.1.6	人口的预测	133	4.4.1	扩散问题的偏微分 方程模型	157
4.1.7	减肥计划安排问题	135	4.4.2	期权定价模型	163
4.2	差分方程建模	139	习题 4		165
4.2.1	抵押贷款买房问题	140			
4.2.2	连续模型的差分方法	140			
4.2.3	差分形式阻滞增长模型 ..	141			
第 5 章 优化问题及其求解					
5.1	优化模型简介	167	5.6.4	模型求解	184
5.1.1	优化问题的一般形式	167	5.7	最大流问题	186
5.1.2	可行解和最优解	167	5.7.1	问题描述	186
5.1.3	模型的基本类型	168	5.7.2	问题分析	186
5.1.4	近年国赛中的优化模型 ..	169	5.7.3	模型建立	187
5.2	运输问题	169	5.7.4	模型求解	187
5.2.1	问题描述	169	5.8	最小费用最大流问题	188
5.2.2	问题分析	169	5.8.1	问题描述	189
5.2.3	模型建立	170	5.8.2	问题分析	189
5.2.4	模型求解	170	5.8.3	模型建立	189
5.3	转运问题	172	5.8.4	模型求解	189
5.3.1	问题描述	172	5.9	最小生成树问题	191
5.3.2	问题分析	173	5.9.1	问题描述	191
5.3.3	模型建立	174	5.9.2	问题分析	192
5.3.4	模型求解	174	5.9.3	模型建立	193
5.4	选址问题	176	5.9.4	模型求解	193
5.4.1	问题描述	176	5.10	旅行商问题	194
5.4.2	问题分析	176	5.10.1	问题描述	195
5.4.3	模型建立	177	5.10.2	问题分析	196
5.4.4	模型求解	178	5.10.3	模型建立	196
5.5	指派问题	181	5.10.4	模型求解	197
5.5.1	问题描述	181	5.11	交巡警服务平台的合理调度 研究	199
5.5.2	问题分析	181	5.11.1	问题描述	200
5.5.3	模型建立	181	5.11.2	问题分析	200
5.5.4	模型求解	182	5.11.3	符号说明	201
5.6	最短路问题	183	5.11.4	模型一的建立与求解	201
5.6.1	问题描述	183	5.11.5	模型二的建立及求解	203
5.6.2	问题分析	183	习题 5		204
5.6.3	模型建立	184			

第6章 统计分析方法

6.1 一元线性回归分析	206	6.3.2 案例分析	226
6.1.1 一元线性回归模型的一般形式	206	6.3.3 非线性曲线估计回归的基本原理	230
6.1.2 回归参数 β_0, β_1 的最小二乘估计	207	6.3.4 案例分析	230
6.1.3 回归模型的检验	208	6.4 聚类分析	234
6.1.4 回归模型的预测	210	6.4.1 聚类分析的原理及分析步骤	234
6.1.5 案例分析	211	6.4.2 相似性度量	235
6.2 多元线性回归分析	214	6.4.3 系统聚类法	238
6.2.1 多元线性回归模型的一般形式	214	6.4.4 快速聚类法	239
6.2.2 多元线性回归模型的参数估计	215	6.4.5 案例分析	240
6.2.3 多元线性回归模型的检验	216	6.5 判别分析	250
6.2.4 多元线性回归模型的预测	220	6.5.1 判别分析基本理论	250
6.2.5 案例分析	220	6.5.2 案例分析	252
6.3 常用曲线估计与一般非线性曲线回归	225	6.6 因子分析	259
6.3.1 常用曲线估计类型及线性化方法	225	6.6.1 因子分析模型	260
		6.6.2 因子载荷的求解、因子旋转、因子得分	261
		6.6.3 案例分析	263
		习题6	269

第7章 现代优化方法

7.1 遗传算法简介	275	7.3.3 应用领域	292
7.1.1 基本概念	276	7.3.4 工作过程	292
7.1.2 算法定义	276	7.3.5 模拟计算	292
7.1.3 算法特点	276	7.3.6 发展运用	292
7.1.4 术语说明	277	7.3.7 一般步骤	293
7.1.5 发展现状介绍	277	7.3.8 实例研究	293
7.1.6 一般算法	278	7.4 神经网络	295
7.1.7 运算过程	279	7.4.1 基本介绍	295
7.1.8 终止条件	281	7.4.2 基本特征	295
7.1.9 应用领域	281	7.4.3 特点和优越性	296
7.1.10 基本框架	281	7.4.4 发展历史	296
7.1.11 实例研究	282	7.4.5 基本结构	297
7.2 粒子群算法	284	7.4.6 应用实例——BP神经网络模型	297
7.2.1 基本粒子群算法	284	7.4.7 分析方法	304
7.2.2 带惯性权重的粒子群算法	285	7.5 模拟退火算法	304
7.2.3 带收缩因子的粒子群算法	286	7.5.1 算法的发展过程和应用及发展前景	305
7.2.4 改进的粒子群算法	286	7.5.2 模拟退火模型	306
7.2.5 粒子群算法的应用	289	7.5.3 案例分析	307
7.3 蒙特卡罗算法	291	7.5.4 模拟退火算法及过程	308
7.3.1 基本概述	291	习题7	311
7.3.2 基本思想	291		

参考文献

本章作为全书的引言和数学建模的概述，主要介绍数学模型的概念，建立数学模型的意义，并对数学建模的基本方法和一般步骤等作简要的介绍。

1.1 数学模型与数学建模

近几十年来，随着科学技术的发展和社会的进步，数学在自然科学、社会科学、工程技术与现代化管理等方面获得了越来越广泛而深入的应用，使人们逐渐认识到建立数学模型的重要性。

1.1.1 数学模型

数学模型 (Mathematical Model) 是对一类实际问题或实际系统发生的现象运用数学符号体系表示的一种 (近似的) 描述。然而现实世界的问题往往比较复杂，在从实际中抽象出数学问题的过程中，我们必须抓住主要因素，忽略次要因素，进行必要的简化，使抽象所得到的数学问题能够运用适当的方法进行求解。

一般地说，数学模型是对于现实世界的一个特定的对象，为了某个特定的目的，根据其特有的内在规律，作出一些必要的简化和假设，运用适当的数学工具，得到的一个数学结构。设立的特定对象，是指我们所要研究解决的某个具体问题；这里的特定的目的是指当研究一个特定对象时所要达到的目的，如分析、预测、控制、决策等；这里的数学工具是指数学各分支的理论和方法及数学的某些软件系统；这里的数学结构包括数学关系式、数学命题、图形图表等。

1.1.2 数学模型的分类

数学模型的分类方法有很多种，下面介绍常用的几种分类。

① 按照数学模型的应用领域不同，可分为人口模型、交通模型、经济预测模型、金融模型、环境模型、生态模型、企业管理模型、城镇规划模型等。

② 按照建立数学模型所用的数学方法不同，可分为初等模型、几何模型、运筹学模型、微分方程模型、概率统计模型，层次分析法模型、控制论模型、灰色系统模型等。

③ 按照建立数学模型的目的不同，可分为分析模型、预测模型、优化模型、决策模型、控制模型等。

④ 按照模型的表现特性，可分为确定性模型与随机性模型 (前者不考虑随机因素的影响，后者考虑了随机因素的影响)；离散模型与连续模型 (两者的区别在于：描述系统状态的变量是离散的还是连续的)；静态模型与动态模型 (两者的区别在于：是否考虑时间因素

引起的变化)。

1.1.3 数学建模

数学模型是认识外部世界与预测和控制的一个有力工具,数学模型的分析能够深入了解被研究对象的本质。而数学建模则是获得该模型、求解该模型并得到结论以及验证结论是否正确的全过程。数学建模不仅是借助于数学模型对实际问题进行研究的有力工具,而且从应用的观点来看,它也是预测和控制所建立模型系统行为的强有力工具。

尤其是随着现代计算技术以及其他技术的飞速发展,极大地扩大了数学建模的应用领域,使得人们越来越认识到数学和数学建模的重要性。学习和初步掌握数学建模的思想和方法已经成为当代大学生,甚至是生活在现代社会的每一个人,都应该学习的重要内容。

1.2 数学建模的一般步骤

建立实际问题的数学模型,尤其是建立抽象程度较高的模型是一种创造性的劳动。现实世界中的实际问题是多种多样的,所以数学建模的方法也是多种多样的,我们不能按照一种固定的模式来建立各种实际问题的数学模型。但是,建立数学模型的方法和过程还是存在一些共性的东西,掌握这些规律将有助于数学建模任务的完成。下面就按照一般采用的建模基本过程给出数学建模的一般步骤。

(1) 模型准备

要建立实际问题的数学模型,首先要对需要解决问题的实际背景和内在机理进行深刻的了解,通过适当的调查和研究明确所解决的问题是什么?所要达到的主要目的是什么?在此过程中,需要深入实际进行调查和研究,收集和掌握与研究问题相关的信息、资料,查阅有关的文献资料,与熟悉情况的有关人员进行讨论,弄清实际问题的特征,按解决问题的目的更合理地收集数据,初步确定建立模型的类型等。

(2) 模型假设

一般来说,现实世界里的实际问题往往错综复杂,涉及面极广。这样的问题,如果不经过抽象和简化,人们就无法准确地把握它的本质属性、就很难将其转化为数学问题;即便可以转化为数学问题,也会很难求解。因此要建立一个数学模型,就要对所研究的问题和收集到的相关信息进行分析,将那些反映问题本质属性的形态量及其关系抽象出来,而简化掉那些非本质的因素,使之摆脱实际问题的集体复杂形态,形成对建立模型有用的信息资源和前提条件。作假设时既要运用与问题相关的物理、化学、生物、经济等方面的知识,又要充分发挥想象力、洞察力和判断力。但是,对实际问题的抽象和简化也不是无条件的(不合理的假设或过于简单的假设会导致模型的失败),必须按照一定的合理性原则进行。假设的合理性原则有以下几点。

① 目的性原则:根据研究问题的特征抽象出与建模目的有关的因素,简化掉那些与建立模型无关或关系不大的因素。

② 简明性原则:所给出的假设条件要简单、准确,有利于构造模型。

③ 真实性原则:假设条件要符合情理,简化带来的误差应满足实际问题所能允许的误差范围。

④ 全面性原则:在对问题作出假设的同时,还要给出实际问题所处的环境条件等。

总之,模型假设就是根据实际对象的特征和建模的目的,在掌握必要资料的基础上,对

问题进行合理的抽象和必要的简化,并用精确的语言提出一些恰当的假设。应该说这是一个比较困难的过程,也是建模过程中十分关键的一步,往往不能一次完成,而需要经过多次反复才能完成。

(3) 模型建立

在模型假设的基础上,首先区分哪些是常量、哪些是变量、哪些是已知量、哪些是未知量;然后查明各种量所处的地位、作用和它们之间的关系,利用适当的数学工具刻画各变量之间的关系(等式或不等式),建立相应的数学结构(命题、表格、图形等),从而构造出所研究问题的数学模型。

在构造模型时究竟采用什么数学工具要根据问题的特征、建模的目的要求以及建模人的数学特长而定。可以这样讲,数学的任一分支在构造模型是都可能用到,而同一实际问题也可采用不同的数学方法构造出不同的数学模型。但在能够达到预期目的的前提下,尽量采用简单的数学工具,以便得到的模型能够具有更广泛的应用。另外,在建立模型时究竟采用什么方法也要根据问题的性质和模型假设所提供的信息而定。随着现代技术的不断发展,建模的方法层出不穷,它们各有所长、各有所短。在建立模型时,可以同时采用,以取长补短,最终达到建模的目的。

在初步建立数学模型之后,一般还要进行必要的分析和简化,使其达到便于求解的形式,并根据研究问题的目的和要求,对其进行检查,主要看它是否能代表所研究的实际问题。

(4) 模型求解

构造数学模型之后,再根据已知条件和数据、分析模型的特征和结构特点,设计或采用求解模型的数学方法和算法,主要包括解方程、画图形、逻辑运算、数值计算等各种传统的和现代的数学方法,特别是现代计算机技术和数学软件的使用,可以快速、准确地进行模型的求解。

(5) 模型的分析与检验

根据建模的目的和要求,对模型求解的数值结果进行数学上的分析,主要采用的方法有:进行变量之间依赖关系的分析,进行稳定性分析,进行系统参数的灵敏度分析,进行误差分析等。通过分析,如果不符合要求,就修改或增减模型假设条件,重新建立模型,直至符合要求;如果符合要求,还可以对模型进行评价、预测、优化等。

在模型分析符合要求之后,还必须回到实际问题中对模型进行检验,利用实际现象、数据等检验模型的合理性和适用性,即检验模型的正确性。如果由模型计算出来的理论数值与实际数值比较吻合,则模型是成功的;如果理论数值与实际数值差别太大或部分不符,则模型是失败的。

若能肯定建模和求解过程准确无误的话,一般来讲,问题往往出在模型假设上。此时,应该对实际问题中的主次因素再次进行分析,如果某些因素因被忽略而使模型失败,则再建立模型时将其重新考虑进去。修改时可能去掉或增加一些变量,也可能改变一些变量的性质;或者调整参数,或者改换数学方法,通常一个模型需要经过反复修改才能成功。因此,模型的检验对于模型的成败至关重要,必不可少。

(6) 模型应用

目前,数学模型的应用已经非常广泛,越来越渗透到社会学科、生命学科、环境学科等各个领域。而模型的应用才是数学建模的宗旨,也是对模型的最客观、最公正的检验。因此,一个成功的数学模型,必须根据建模的目的,将其用于分析、研究和解决实际问题,充分发挥数学模型在生产和科研中的重要作用和意义。

归纳起来，数学建模的过程和主要步骤可用图 1.1 所示的流程图来表示。

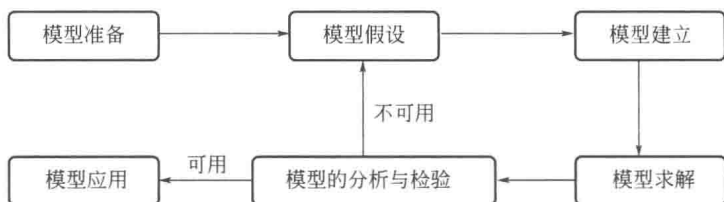


图 1.1 建立数学模型的主要步骤

应当强调的是：并不是所有的数学建模过程都必须按照上述步骤进行。上述步骤只是对数学建模过程的一个大致描述，实际建模时可以灵活应用。

1.3 数学建模示例

【例 1.1】 宾馆定价问题 某宾馆有 150 间客房，经过一段时间的经营实践，该宾馆经理得到一些数据：如果每间客房定价为 200 元，入住率为 55%；定价为 180 元，入住率为 65%；定价为 160 元，入住率为 75%；定价为 140 元，入住率为 85%。欲使每天的收入最高，问每间客房的定价应为多少？

(1) 模型假设

假设 1：每间客房的最高定价为 200 元。

假设 2：根据题目提供的数据，可设随着房价的下降，入住率呈线性增长。

假设 3：宾馆的每间客房的定价相等。

(2) 模型建立

设 y 表示宾馆一天的总收入，与 200 元相比每间客房降低的房价为 x 元。由假设 2 可得，每降低 1 元房价，入住率就增加 $\frac{10\%}{20} = 0.005$ 。因此

$$y = 150 \times (200 - x) \times (0.55 + 0.005x)$$

由 $0.55 + 0.005x \leq 1$ ，可知 $0 \leq x \leq 90$ 。于是问题转化为求当 $0 \leq x \leq 90$ 时，总收入 y 的最大值是多少？

(3) 模型求解

利用一元函数微分学的知识，令 $y' = 150 \times (0.45 - 0.01x) = 0$ ，得当 $x = 45$ ，即房价定为 155 元时，可获得最高收入 18018.75 元。此时，相应的入住率为 77.5%。

【例 1.2】 城市人口问题 人口统计学家已经发现：每个城市的市中心人口密度最大，离市中心越远人口越稀少、密度越小。最为常见的人口密度模型为 $f = ce^{-ar^2}$ （每平方千米人口数），其中 a, c 为大于 0 的常数， r 是距市中心的距离。如何求某城市的总人口数？

(1) 问题分析

为了确定区间，设市中心位于坐标原点，于是 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ，从而人口密度函数为 $f = ce^{-a(x^2 + y^2)}$ 。

根据相关数据可知：某城市市中心的人口密度为： $f = 10^5$ 。

在距离市中心 10km 时的人口密度为： $f = \frac{10^5}{e^2}$ 。

并且该城市为半径 30km 的圆形区域。

(2) 模型求解

先确定人口密度中的常数 a, c 。

由 $r=0, f=10^5$; $r=10, f=\frac{10^5}{e^2}$, 可得 $a=\frac{1}{50}, c=10^5$,

因此人口密度函数为: $f=10^5 \cdot e^{-\frac{r^2+y^2}{50}}$ 。

从而该城市的总人口数就是人口密度函数的积分, 其中积分区域 D 为 $0 \leq r \leq 30, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, 即

$$\begin{aligned}\text{该城市的总人口数} &= \iint_D 10^5 \cdot e^{-\frac{r^2+y^2}{50}} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{30} 10^5 \cdot e^{-\frac{r^2}{50}} r dr \\ &\approx 15767963 (\text{人})\end{aligned}$$

【例 1.3】 名画伪造案的侦破问题 《Emmaus 的信徒们》是 17 世纪荷兰大画家 Jan Vermeer 的名画。第二次世界大战后, 荷兰安全机关开始追捕纳粹党徒。1945 年 5 月 29 日, 法国三流画家 H. A. van Meegeren 因通敌罪被捕。Meegeren 供认卖给德国人的《Emmaus 的信徒们》是他制作的赝品, 当时荷兰当局认为他的供词是假的, 目的是想逃脱通敌的罪名。著名艺术史专家 A. Bredius 也证明说, 那件《Emmaus 的信徒们》是 Vermeer 的原作, 该画当时已被 Renbradt 协会以 17 万美元买去。可是, 仍有一部分人坚持认为《Emmaus 的信徒们》是 Meegeren 制作的赝品。他们认为 Meegeren 因为自己在艺术界名气太小而极为不满, 于是带着狂热的情绪临摹了这幅名画, 以显示他比三流画家强。此事在当时轰动了全世界。

这样, 对 Meegeren 卖给德国人的《Emmaus 的信徒们》究竟是赝品还是 Vermeer 的原作, 就不得而知, 该案一直悬而未决。直到 1967 年, Carnegie-Mellon (卡内基-梅隆) 大学的科学家们通过建立数学模型, 并利用测得的一些数据, 证实了上述所谓的名画确实是赝品, 从而使这一悬案得以告破。那么, 科学家们是怎样利用数学建模的方法来证实的呢?

众所周知, 所有的绘画颜料中都含有放射性元素铅-210(^{210}Pb) 和镭-226(^{226}Ra), 而这两种重金属元素都会发生衰变, 科学家们就是从这一点上找到了突破口。

(1) 模型假设

为了使问题明确具体, 设 $y(t)$ 是颜料中铅-210(^{210}Pb) 的含量, $r(t)$ 是 t 时刻每分钟每克颜料中镭-226(^{226}Ra) 的衰变数量。

(2) 模型建立

利用著名物理学家卢瑟福的原子物理理论, 可以建立下列微分方程模型:

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = -\lambda y + r(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

由于镭-226 的半衰期约为 1600 年, 而现在仅对 300 年左右的时间感兴趣, 因此可设镭-226 保持常数 r 。

(3) 模型求解

求解上述微分方程的初值问题, 得方程的特解为:

$$y(t) = \frac{r}{\lambda} [1 - e^{-\lambda(t-t_0)}] + y_0 e^{-\lambda(t-t_0)}$$

其中 $y(t)$ 和 r 可以用仪器直接测量出来, 要求出 $t-t_0$, 只要求出 y_0 和 λ 即可。

下面先计算 λ , 令 $N(t)$ 表示放射性元素铅的原子数, 则有

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N \\ N(t_0) = N_0 \end{cases}$$

解得

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda(t-t_0)}$$

即

$$\frac{N(t)}{N_0} = e^{-\lambda(t-t_0)}$$

又已知铅的半衰期为 22 年, 故得: $\lambda = \frac{\ln 2}{22}$ 。

再来计算 y_0 , 由式 $y(t) = \frac{r}{\lambda} [1 - e^{-\lambda(t-t_0)}] + y_0 e^{-\lambda(t-t_0)}$, 得

$$\lambda y_0 = \lambda y(t) e^{\lambda(t-t_0)} - r [e^{\lambda(t-t_0)} - 1]$$

如果这幅画是真品, 应该有 300 年的历史, 可以取 $t - t_0 = 300$, 于是得

$$\lambda y_0 = \lambda y(t) e^{300\lambda} - r (e^{300\lambda} - 1)$$

由于镭-226 的衰变率 $r = 0.8$, 铅-210 的衰变率 $y\lambda = 8.5$, 故 (借助数学软件可求)

$$\lambda y_0 = 8.5 e^{300\lambda} - 0.8 (e^{300\lambda} - 1) = 98050$$

(4) 模型应用

$\lambda y_0 = 98050$ 这个数太大了, 与真实情况不符, 因此可以证明 Meegeren 卖给德国人的《Emmaus 的信徒们》是赝品。不仅这样, Carnegie-Mellon 大学的科学家们利用上述方法, 对其他有质疑的油画都作了鉴定, 判断了真伪。

成功利用数学模型进行案件侦破的例子有很多, 充分显示了数学模型强大的应用价值。

【例 1.4】循环比赛名次问题 若 5 个队进行单循环比赛, 其结果是: 1 队胜 3 队、4 队; 2 队胜 1 队、3 队、5 队; 3 队胜 4 队, 4 队胜 2 队; 5 队胜 1 队、3 队、4 队。按直接胜与间接胜次数之和排名次。

(1) 模型的分析与建立

用邻接矩阵 A 来表示各个队直接胜的情况: $A = (a_{ij})_{5 \times 5}$, 若第 i 队胜第 j 队, 则 $a_{ij} = 1$, 否则 $a_{ij} = 0 (i, j = 1, 2, 3, 4, 5)$ 。由此可得:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) 模型求解

A 中各行元素之和分别为各队直接胜的次数, 分别为 2, 3, 1, 1, 3。可见按直接胜次数排名有 2 队与 5 队并列, 3 队与 4 队并列。

间接胜的邻接矩阵为:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

A^2 中各行元素之和分别为各队间接胜的次数, 分别为 2, 6, 1, 3, 4。于是 $A + A^2$ 中各行元素之和分别为各队直接胜与间接胜的次数, 分别为 4, 9, 2, 4, 7。可见按直接胜与间接胜的次数之和排名仍有 1 队与 4 队并列。那么继续求出

$$\mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

于是 $\mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3$ 中各行元素之和分别 8, 16, 5, 10, 13。可见按直接胜与间接胜的次数之和和排名结果为 2 队、5 队、4 队、1 队、3 队。

【例 1.5】工资问题 现有一个木工、一个电工、一个瓦工和一个粉饰工，四人相互统一彼此装修他们自己的房子。在装修之前，他们约定每人工作 13 天（包括在自己家干活），每人的日工资根据一般的市价在 100~130 元，每人的日工资数应使得每人的总收入和总支出相等。表 1.1 是他们协商后制订出的工作天数的分配方案。如何计算出他们每人应得的日工资以及每人房子的装修费用（只计算工钱，不包括材料费）？

表 1.1 工时分配方案

天数 \ 工种	木工	电工	瓦工	粉饰工
在木工家工作的天数	4	3	2	3
在电工家工作的天数	5	4	2	3
在瓦工家工作的天数	2	5	3	3
在粉饰工家工作的天数	2	1	6	4

(1) 模型的分析与建立

这是一个“收入-支出”平衡的闭合模型。设木工、电工、瓦工和粉饰工的日工资分别为 x_1, x_2, x_3, x_4 (元)，为满足“平衡”条件，每人的收支相等，即要求每人在这 14 天内的“总收入=总支出”，则可建立线性方程组：

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 13x_1 \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 13x_2 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 13x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 13x_4 \end{cases}$$

整理得齐次线性方程组

$$\begin{cases} -9x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 5x_1 - 9x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 10x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 - 9x_4 = 0 \end{cases}$$

(2) 模型求解

可以利用初等行变换求解上述方程组：

$$\left(\begin{array}{cccc} -9 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & -9 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & -10 & 3 \\ 2 & 1 & 6 & -9 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{54}{59} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{63}{59} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{60}{59} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

即 $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = k(54, 63, 60, 59)^T$, 为了使 x_1, x_2, x_3, x_4 取值为 $100 \sim 130$, 可令 $k=2$, 得 $x_1=108, x_2=126, x_3=120, x_4=118$ 。

所以, 木工、电工、瓦工和粉饰工的日工资分别为 108 元、126 元、120 元和 118 元。于是, 每人房子的装修费用相当于本人 13 天的工资, 因此分别为 1404 元、1638 元、1560 元和 1534 元。

【例 1.6】有趣的蒙特莫特问题 新年即将来临, 班里准备举办一次联欢活动。小明提议每人带上一件小礼物, 放在一起; 然后再用抽签的方式各取回一件作为纪念品。这一提议立即引起了大家的兴趣, 多数同学都认为这个办法有新意。可也有人提出疑问: 这样抽取纪念品是否会有多数人将自己带去的礼物又抽回去了呢?

(1) 模型分析

上述问题实际上是一个有名的数学问题, 早在 1708 年就由法国数学家蒙特莫特提出了, 因此又称为“蒙特莫特问题”或称为“配对问题”。用概率论的知识可以计算: 如果有 n 个人参加这项活动, 至少有一人取回自己所带礼物的概率以及平均有多少人会取回自己所带的礼物?

(2) 模型假设与符号说明

假设 1: 整个班级共有 n 个同学。

假设 2: 每位同学都随机的挑选一个礼物作为纪念品。

记 $A_i =$ “第 i 个人取回自己所带礼物” ($i=1, 2, \dots, n$), 则

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \text{“} n \text{ 个人中至少有一人取回自己所带的礼物”}。$$

(3) 模型的建立与求解

由概率的加法公式与乘法公式可得:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n) \\ &= C_n^1 \frac{1}{n} - C_n^2 \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} C_n^n \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \times \dots \times \frac{1}{1} \\ &= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

当 n 较大时, 至少有一人取回自己所带礼物的概率约为

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \approx 1 - e^{-1} \approx 0.63212$$

再引入随机变量 $X_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 个人取回自己所带礼物} \\ 0, & \text{第 } i \text{ 个人未取回自己所带礼物} \end{cases} \quad (i=1, 2, \dots, n),$ 而

$$E(X) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = 1$$

(4) 模型分析与检验

利用概率的加法公式和乘法公式进行配对问题的概率计算。其结果表明: 采用这种抽取纪念品的方式虽然可能有人会取回自己所带的礼物, 但这 n 个人中 (无论 n 多么大!), 平均来说只有一人能取回自己所带的礼物。因此, 作为一项娱乐活动, 小明的提议是可以得到采纳的。

(5) 模型应用

配对问题是非常普遍的概率问题, 不同的提法还有装信封问题、匹配问题、相遇问题等。配对问题的解决方法在经济管理中有着重要的应用。值得指出的是: 无论 n 等于多少, 配对个数的期望值和方差均等于 1。

1.4 数学建模能力培养

素质是指人的自身所存在的内在的、相对稳定的身心特征及其结构,是决定其主体活动功能、状况及质量的基本因素。数学素质是指一个人在数学方面的特点和基础,是指那些在数学教育的影响下所发展起来的创造、归纳、演绎和数学建模能力的总成。

数学素质大致包含以下4种。①数学意识。即用数学的眼光去观察、分析和表示各种事物的数量关系、空间关系和数学信息,以形成量化意识和良好的数感,进而达到用数理逻辑的观点来科学地看待世界。②数学语言。数学语言是数学的载体,具有通用、简捷、准确的特点。数学是一种科学的语言。③数学技能。数学技能包括数学的作图、心算、口算、笔算、器算等最基本的技能,还包括把现实的生产、生活、流通以至科学研究中的实际问题转化为数学模型,解决问题,形成数学建模的技能。④数学思维。数学思维是指抽象、概括、归纳与推理等形式化的思维以及直觉、猜想、想象等非形式化的思维。

数学建模是一门综合了数学和其他学科知识的交叉性很强的课程,它将数学的基本知识和实际应用有机地结合起来。对大学生的数学素质的培养有很重要的作用。

(1) 培养数学意识

大学生学习大学数学多以纯理论知识为主,虽然也有理论知识的应用,但并不多。而且对知识的掌握程度多以理论考试进行衡量,很少考查大学生的数学意识,即用数学的语言和思想方法去分析和解决实际问题。于是,大学生有没有数学意识或者数学意识强不强显然是一个疑问。而数学建模则需要将用自然语言描述的实际问题用数学的语言及方法来解决,这恰好是数学意识的一种体现。

(2) 培养抽象思维能力、概括能力和归纳能力

数学建模课程和竞赛中的大量问题一开始是用自然语言来加以描述的,为了解决它们首先必须对这些问题进行分析,再合理地抽象和简化为数学问题,即建立“数学模型”,然后再进行求解。其中,最重要的步骤就是建立“数学模型”。如何建立模型,建立模型时应该怎样合理地抽象和简化,归纳及概括,大学生在数学建模时必须反复思考这个问题,这是极为锻炼人的思维能力的,也是数学建模课程和竞赛的重要内容。

(3) 培养创新能力

数学建模有别于一般的科学研究,它主要是搞应用,解决实际问题,采用的方法大多数都是已有的,那么这是创新吗?我们通过参加数学建模课程或竞赛就知道,实际问题千差万别,就算用的方法是现成的,但用哪一种方法以及怎么用,却不是现成的。而且,几乎没有哪一个方法原样照搬照套就能解决问题,都得针对具体问题具体分析,选择恰当的方法并加以改造(至少是要灵活运用)才能解决问题,而这正需要学生不断调动自己的思维和能力去进行创新。而且,实际问题常常没有标准答案或唯一答案,往往是多个答案各有千秋,这是我们经过多年理论学习的习惯于唯一答案的学生所不习惯的,也很少去尝试的。也就是说,不现成、不唯一,这是解决实际问题的重要特点,也是数学建模的重要特点,正因为这样数学建模能培养大学生的创新思维和能力。

(4) 培养应用数学的能力

随着现代数学的飞速发展,其应用范围从以往传统的、数学处理方法相对成熟的领域(如力学、物理、天文以及传统工业领域)扩展到非传统的、数学处理相对说来不算成熟的化学、生物及其他各门自然科学及高新技术领域,甚至进入到经济、金融、保险及很多社会

学领域，深入到各行各业。可以说，现代数学无所不在，并发挥着越来越重要的作用。因此大学生能否应用数学的知识方法来解决各种问题显得十分重要。

然而，对于大学生而言从学习书本知识到应用知识解决实际问题往往有一定距离，“读书好”与“应用好”不能画等号，能够应用数学的知识和方法解决实际问题是大学生的应当具备的一种重要能力，而这仅从书本上与课堂上是学不到的，必须通过实践。学生从实践中获得的经验与知识，更容易产生沉淀而内化为人的素质，这也是符合素质教育的目标的。而数学建模课程和竞赛集理论学习与实践于一体，通过建立数学模型的实践过程，有助于培养大学生的应用数学能力。

(5) 培养数值计算能力等数学技能

数学建模的很多问题都是先从实际生活中搜集资料，有时搜集到的数据可谓成千上万，然后再对它们进行分析和处理。处理时要对这样大量的数据进行各种运算，难免繁琐。如何才能快速、有效地进行计算，尤其是对规模大的问题进行计算，是一个很重要的问题。要想对大量数据进行快速、有效的计算，必得借助先进的计算工具即计算机来进行。这就对使用者提出了较高的要求，如对相关软件及算法的了解和掌握，以及编程上机计算等操作能力等。因此，实践性很强的数学建模能够培养大学生的计算能力尤其是数值计算能力。

当然，数学建模除了能够培养大学生的上述数学素质，还能够培养其他的一些素质和能力，如写作能力、与他人的合作能力等。

习 题 1

1. 将四角连线为正方形的椅子放在相对光滑但不平坦的地面上，通常只有三只脚着地，然而只需稍挪动几次，就可以使四脚同时着地（即椅子放稳了）。试将此问题用数学语言进行描述，并用数学工具给予证明。

2. 一个人带着猫、鸡和米过河，船除了需要人来划之外，至多能载猫、鸡和米三者之一。而当人不在场时，猫要吃鸡、鸡要吃米。请设计一个安全过河的方案，并使过河次数尽量少。

3. 现有 12 个外表相同的硬币，已知其中一个是假币（可能轻也可能重些）。如何用无砝码的天平以最少的次数找出假币，请设计方案。

4. 韩信点兵，有兵一队，人数在 500~1000 之间。三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二。问：这队兵有多少人？