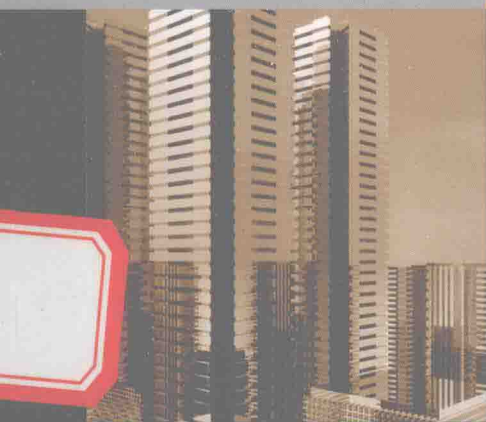


THE ECONOMICS  
OF INPUT-OUTPUT  
ANALYSIS

(第二版)

# 投入产出分析 经济学

【荷】泰斯·滕亚 (Thijs ten Raa) / 著  
胡金有 / 译

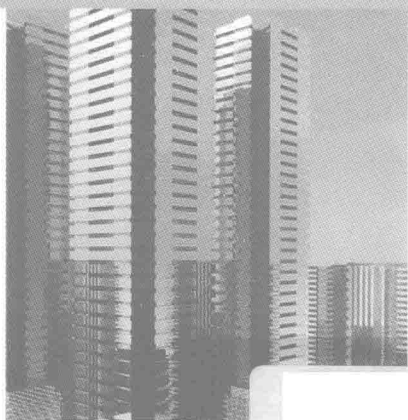


经济管理出版社

ECONOMIC & MANAGEMENT PRESS BEIJING CHINA

(第二版)

# 投入产出分析 经济学



【荷】泰斯·滕亚 (Thijs ten Raa) / 著  
胡金有 / 译



经济管理出版社  
ECONOMY & MANAGEMENT PUBLISHING HOUSE

图书在版编目 (CIP) 数据

投入产出分析经济学/(荷) 泰斯·滕亚著; 胡金友译. 2 版. —北京: 经济管理出版社, 2016.7  
ISBN 978-7-5096-4509-3

I. ①投… II. ①泰… ②胡… III. ①投入产出分析—经济学 IV. ①F223

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 157615 号

组稿编辑: 张 艳  
责任编辑: 张 艳 丁慧敏  
责任印制: 黄章平  
责任校对: 新 雨

出版发行: 经济管理出版社  
(北京市海淀区北蜂窝 8 号中雅大厦 A 座 11 层 100038)

网 址: [www.E-mp.com.cn](http://www.E-mp.com.cn)  
电 话: (010) 51915602  
印 刷: 三河市延风印装有限公司  
经 销: 新华书店  
开 本: 720mm×1000mm/16  
印 张: 14  
字 数: 244 千字  
版 次: 2016 年 7 月第 1 版 2016 年 7 月第 1 次印刷  
书 号: ISBN 978-7-5096-4509-3  
定 价: 55.00 元

·版权所有 翻印必究·

凡购本社图书, 如有印装错误, 由本社读者服务部负责调换。

联系地址: 北京阜外月坛北小街 2 号

电话: (010) 68022974 邮编: 100836

# 前 言

投入产出分析是研究整体经济问题的一种基本工具。一个经济体在效率和生产率增长方面的表现如何？对于世界其他经济体而言它具有哪些比较优势？如果环境约束被考虑进来，这些评价将会怎样变化？当然，投入产出分析还适用于研究其他许多有趣的问题。

尽管投入产出分析对于经济整体的关注显得有些宏观经济的味道，但它的基础和技术却是比较微观经济的，这包括生产和消费的严谨理论。有人认为投入产出分析介于宏观和微观经济分析的接口，将其定义为产业经济研究范畴，冠以一种中观经济学。也有人认为投入产出分析是一种很机械式的工具，不适用于竞争性定价的自由市场经济。很多专门的或普通的教科书都强调这种观点，但我的目标是动摇它。

本书从主流经济学视野讲述投入产出分析，将数量和价值系统同时统一起来。本书的基本框架基于联合国的国民账户体系，该体系能巧妙地通过一个条理清楚的设计表达出一个经济体中所有的产业部门。本书的基本工具是线性规划。本书内容全面，从零开始介绍投入产出分析的基本原理、线性规划以及国民经济核算，再自然过渡到诸如效率分析和应用均衡分析等派生出的具体应用。本书是线性经济模型和新古典经济理论的完全综合，并构成线性规划和投入产出分析的全面基础。

将经济结构缩减回经济的基本初始原貌需要进行严格的操作，并可以得出清晰而深刻的结果。譬如，确保列昂惕夫逆矩阵存在的条件并不复杂，既必要也充分。关于不等式的一个直观结果有助于迅速证明线性规划的主要结果。而这种证明又可用来建立所谓的替代定理的最一般形式。柯布—道格拉斯生产函数作为宏观经济学中一个主要的新古典工具源于对具有不同投入产出系数的生产单元的微观经济分析。不管理论上如何，这些基本元素可以被纳入国民账户体系并产生具体的结果。也就是说，可以回答前面提出的关于国民经济的问题。

为了很好地理解这本书的来龙去脉，有必要先做一个简短的历史说明。起

初我是被邀请去写一个现代版的 Gale 的绝版但仍旧有很大需求的《线性经济模型理论》一书。于是，在 1995 年我的《竞争经济的线性分析》一书出现在由 Harvester Wheatsheaf 出版的伦敦政治经济学院经济学手册系列中。在此书再版脱销后，该出版商被更大的出版商（皮尔森、派拉蒙、时代华纳）所并购。长话短说，娱乐业让我退回原点，但是剑桥大学出版社找到我并成功说服我完全重写这本书。《投入产出分析经济学》是一本关于投入产出经济学的教科书，同时包含诸如全球化和溢出等的一些新应用实例的详细介绍。

严格来讲，阅读本书并不需要具备任何先决条件。换句话说，如果你是一个由于长期内战而不是缺乏能力而完全没有受过教育的聪明的利比亚人，那么经过深入研究你应该能够理解本书内容。话说回来，具备一些预备知识还是有助于学习本书的。其中一项是熟悉任何微观经济学课程都讲述的约束条件下最大化行为的分析。另一项是微积分。除此以外，对于向量和矩阵知识的一定了解也很有用。

最后一章的内容也预先假定具备随机变量的基本知识（均值和方差的概念），但是这章可以被跳过。总之，本书的目标人群是那些对于微积分已经不再畏惧的经济系高年级本科生或者新入学的研究生。

投入产出分析也许是做经济分析的一个最实用工具。然而在这本书中，我作为一个理论家的背景是显而易见的：结果具有很强的一般性，这个特点有助于将本书作为相关领域中的参考资料来使用，特别适用于应用均衡经济学家和运用投入产出的国民账户核算专家。

我曾经在蒂尔堡、纽约、加尔各答和乌特勒支等大学讲授过这本书的内容，也曾有一些专门的课程里做过介绍，其中一个是由位于维也纳的国际投入产出协会为三所蒙特利尔学校的博士生安排的课程，另一个是由芬兰统计局为六所芬兰学校的博士生安排的课程。我将感谢任何反馈。如想了解更多信息，欢迎与 tenRaa@UvT.nl 这个邮箱联系。

借用我的老师兼朋友威廉姆·鲍默尔（Will Baumol）的话，我将此书献给我的“三位女人”：安娜、罗莎和米娅姆（Anna, Rosa and Miryam）。

# 词汇表

c.i.f	成本，保险，运费
EC	效率变化
f.o.b	离岸价格
FP	边界生产力
GDI	国内收入总值
GNP	国民生产总值
IODB	投入产出数据库
ISDB	产业结构数据库
NAMEA	包括环境账户的国民核算矩阵
PPF	生产可能性边界
R&D	研究与开发
SAM	社会核算矩阵
SNA	国民经济核算体系
SR	索洛剩余
TFP	全要素生产率
VAT	增值税

# 目 录

1 引言 .....	1
1.1 经济学的定义 .....	1
1.2 数学准备 .....	2
1.3 约束最大化 .....	5
1.4 线性分析 .....	8
1.5 投入产出分析 .....	11
习题 .....	13
参考文献 .....	13
2 投入产出分析基础 .....	15
2.1 引言 .....	15
2.2 价格变动 .....	18
2.3 价值关系 .....	20
2.4 数量关系 .....	23
习题 .....	25
参考文献 .....	25
3 乘数效应 .....	27
3.1 引言 .....	27
3.2 成本推动分析 .....	27
3.3 需求拉动分析 .....	28
3.4 消费影响 .....	29
3.5 就业乘数 .....	33
3.6 宫泽喜一逆矩阵 .....	36
习题 .....	38

参考文献 .....	38
<b>4 线性规划 .....</b>	<b>41</b>
4.1 引言 .....	41
4.2 蕴涵不等式 .....	41
4.3 因变量和自变量约束条件 .....	43
4.4 基本定理 .....	46
4.5 互补松弛性 .....	48
4.6 非退化规划 .....	50
4.7 活动变量 .....	52
4.8 边际生产率和灵敏度 .....	55
习题 .....	57
参考文献 .....	58
<b>5 投入产出系数固定吗? .....</b>	<b>59</b>
5.1 引言 .....	59
5.2 技术和需求的作用 .....	60
5.3 技术选择 .....	63
5.4 替代定理 .....	65
5.5 附言 .....	68
5.6 应用 .....	69
习题 .....	70
参考文献 .....	70
<b>6 国民经济核算体系 .....</b>	<b>71</b>
6.1 引言 .....	71
6.2 鸟瞰图 .....	72
6.3 国民经济核算体系 .....	73
6.4 扩展部分 .....	77
6.5 贸易 .....	81
6.6 增值税 .....	82
6.7 国民生产总值 .....	84
6.8 增值税在产业中的分解 .....	86



6.9 社会核算矩阵 .....	87
习题 .....	89
参考文献 .....	90
<b>7 技术系数的构建 .....</b>	<b>91</b>
7.1 引言 .....	91
7.2 副产品 .....	92
7.3 产品与部门数目不同的情形 .....	97
7.4 其他投入 .....	100
习题 .....	101
参考文献 .....	101
<b>8 从投入产出系数到柯布—道格拉斯函数 .....</b>	<b>103</b>
8.1 引言 .....	103
8.2 宏观经济生产函数的导出 .....	105
8.3 替代 .....	107
8.4 规模报酬 .....	107
习题 .....	111
参考文献 .....	112
<b>9 低效诊断 .....</b>	<b>113</b>
9.1 引言 .....	113
9.2 低效 .....	114
9.3 分解 .....	117
9.4 加拿大经济体的诊断 .....	119
9.5 荷兰经济体的诊断 .....	128
9.6 效率衡量的稳健性 .....	129
习题 .....	130
参考文献 .....	130
<b>10 国际贸易的投入产出分析 .....</b>	<b>133</b>
10.1 引言 .....	133
10.2 局部均衡分析 .....	135

10.3	一般均衡分析法 .....	138
10.4	自由贸易收益 .....	143
10.5	扭曲 .....	145
10.6	应用 .....	147
	习题 .....	147
	参考文献 .....	147
<b>11</b>	<b>环境投入产出经济学 .....</b>	<b>149</b>
11.1	引言 .....	149
11.2	标准、税收或排污权 .....	149
11.3	环境核算 .....	152
11.4	能源政策 .....	153
11.5	污染 .....	156
11.6	全球化 .....	159
	习题 .....	160
	参考文献 .....	160
<b>12</b>	<b>生产率增长和外溢 .....</b>	<b>163</b>
12.1	引言 .....	163
12.2	全要素生产率增长 .....	164
12.3	测算和分解 .....	167
12.4	关于加拿大经济的应用 .....	172
12.5	国际间外溢 .....	174
12.6	部门间外溢 .....	175
12.7	结论 .....	178
	习题 .....	178
	参考文献 .....	178
<b>13</b>	<b>动态逆矩阵 .....</b>	<b>181</b>
13.1	引言 .....	181
13.2	单一部门经济 .....	182
13.3	物质平衡 .....	184
13.4	单一部门经济的动态投入产出分析 .....	185

13.5	多部门经济 .....	187
13.6	结论 .....	190
	习题 .....	191
	参考文献 .....	191
14	随机投入产出分析 .....	193
14.1	引言 .....	193
14.2	随机过程 .....	193
14.3	应用 .....	195
14.4	结论 .....	198
	参考文献 .....	199
	习题答案 .....	201

# 1 引言

## 1.1 经济学的定义

莱昂内尔·罗宾斯（1898~1984）在《论经济科学的性质与意义》（1984）的一篇文章中，将经济学定义为“一门把人类行为作为目的与具有不同用途的稀缺资源之间的关系来研究的科学”。根据《简明经济学百科全书》（<http://www.econlib.org/library/CEE.html>）可以看出，我们直到今天仍采用这一著名的“面面俱到”的经济学定义来定义这一科目。该定义的基本理论为没有稀缺资源，一切需求都可以得到满足，不需要作出任何选择，因此也就不存在经济学问题。但是哪些资源稀缺呢？空气稀缺吗？如果不是，清新空气稀缺吗？如果我们坚持传统的经济学定义，那么，在进行经济分析之前，我们就必须回答这些问题。所有的稀缺资源可以通过某种通常不被了解的方式一一列出。但是，在我看来，稀缺资源的列举应包含在经济学的定义之中。因此，我修正了罗宾斯的定义，省略了形容词“稀缺”。简言之，我将经济学定义为“对资源在不同目的间的配置的研究”，或者更简明些，经济学是一门对资源在商品生产单位间配置和随后在公众间的分配进行研究的科学。有些资源是稀缺的，有些则不然。我们用价格来表示稀缺资源，而非稀缺资源价格则为零。

在该阶段，我们没必要明确“生产单位”、“商品”、“销售”及“居民”的概念。经济学的精髓仅在于使某些事物最大化：生产单位或公司将利润最大化，居民将其收入或福利最大化。由于资源的约束，目标只能限制性地被满足。也许空气不稀缺，但是无论它的存量有多大，这个存量毕竟有限。在进一步实现目标的过程中，利用某些有限的资源是一个“瓶颈”。这样，经济学问题可归结为某些受约束目标的最大化。理解约束最大化问题的基本原理并将其

与价格的基本经济学概念相联系非常重要，但是我们首先必须快速回顾一些基本的数学原理。

## 1.2 数学准备

初等数学的两大分支是微积分和矩阵代数。微积分主要涉及函数，特别是定义于实数集上的函数，以及利用函数进行的运算。矩阵代数将加法和乘法等运算延拓至多维。我们很容易将微积分延拓成多变量函数。

定义一个函数  $f$ ，并将一个集合（定义域）中的每个元素  $x$  与另一个集合（值域）的元素  $f(x)$  准确对应。一般情况下，定义域与值域都是实数集，如：(1) 至 (3)；(4) 和 (5) 则为反例。

(1)  $f(x) = x$  恒等函数

(2)  $f(x) = cx + d$  线性函数

(3)  $f(x) = x^n$  幂函数

(4)  $f(x) = \sqrt{x}$  平方根

(5)  $f(x) = \pm\sqrt{x}$   $y^2 = x$  的解

反例 (4) 不是定义于实数集上一一对应的函数，因为它不能计算出每一个元素的对应元素。但是，当定义域为非负数时，它是函数。反例 (5) 不是定义于实数集上一一对应的函数，因为它不能准确地计算出每一个元素的对应元素。若将定义域限制在非负数或非正数上时，反例 (5) 就可以成为函数。通过  $f(x) = y$  可算出函数  $f$  的反函数是  $f^{-1}(y) = x$ 。函数 (1) 的反函数为  $f^{-1}(y) = y$ ，函数 (2) 的反函数为  $f^{-1}(y) = (y - d)/c$ ，函数 (3) 的反函数为  $f^{-1}(y) = x^{1/n}$  ( $n$  为奇数)。若  $n$  为偶数，如  $n$  为 2，反例 (4) 将为补解，此时就不是函数。

假定  $x$  为投入， $f(x)$  为产出。那么，平均产量为  $f(x)/x$ 。边际产量就是产出增加的比率：

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \Delta x \rightarrow 0 \quad (1.1)$$

我们将式 (1.1) 称为  $x$  的导函数，用  $f'(x)$  表示。符号  $\rightarrow$  表示“趋向于”。 $x^n$  的导函数为  $nx^{n-1}$ ：

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad (1.2)$$

如  $n = 2$  时，根据式 (1.1)， $x^2$  的导数为：

$$\frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

当  $\Delta x \rightarrow 0$  时, 结果为  $2x$ 。若  $\Delta x$  不趋向于零, 但是趋向于的数值很小时, 商为:

$$\frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

则商约等于导数, 因为我们忽略了余项  $\Delta x$ 。一般来说:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \approx f'(x), \Delta x \text{ 取非常小的值} \quad (1.3)$$

约等式 (1.3) 被称为一级近似。还有几种可用的微分性质, 即可加性、可积性和链式法则:

$$(f + g)' = f' + g' \quad (1.4)$$

$$(fg)' = f'g + fg' \quad (1.5)$$

$$f[g(x)] \text{ 有导函数 } f'[g(x)]g'(x) \quad (1.6)$$

证明可加性 (1.4) 用途较小, 但只需很少步骤即可证明。根据定义,

$$\begin{aligned} (fg)'(x) &= \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\ &= g(x + \Delta x) \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + f(x) \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \end{aligned} \quad (1.7)$$

当  $\Delta x \rightarrow 0$ , 式 (1.7) 则可证明式 (1.5)。最后, 链式法则 (1.6) 的证明就很简单。f [g(x)] 的导函数为:

$$\frac{f[g(x + \Delta x)] - f[g(x)]}{\Delta x} = \frac{f[g(x + \Delta x)] - f[g(x)]}{g(x + \Delta x) - g(x)} \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \quad (1.8)$$

当  $\Delta x \rightarrow 0$ , 将  $y = g(x)$  和  $\Delta y = g(x + \Delta x) - g(x)$  代入式 (1.8) 的右边的项, 则变为:

$$\frac{f(y + \Delta y) - f(y)}{\Delta y}$$

因为  $\Delta y$  同  $\Delta x$  都趋于零, 链式法则得证。

计算产量函数的导函数, 你就可以得到边际产量函数。现在用与微分法相反的方法来计算积分, 或者简单地说, 积分法。因此, 通过求边际产量的积分, 你可以得到最基本的产量函数。积分的符号为  $\int$ 。比如说, 根据式 (1.2),

$\int nx^{n-1} dx = x^n$ 。因为一个常数的导数是零, 你可以将该常数加入积分中。所以,

严格地说, 在  $\int nx^{n-1}dx = x^n + c$  中,  $c$  是任意常数。

计算  $a$  与  $b$  之间边际产量的积分, 你可以得到  $a$  与  $b$  之间增加投入而得到的总产出:  $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$ 。例如,  $\int_0^1 nx^{n-1}dx = (1^n + c) - (0^n + c) = 1$ , 因此  $\int_0^1 x^{n-1}dx = 1/n$ 。

让我们模拟一下需要两种投入的单一产出的生产过程。那么,  $f(x)$  中的  $x$  是由  $x_1$  和  $x_2$  组成, 是由 2 个数字或向量组成的一组 (数)。第一种投入的边际产量  $f(x_1, x_2)$  是关于  $x_1$  的偏导数。根据定义, 当  $x_2$  不变时,  $x_1$  函数的导数用  $f_1$  表示。偏导数的行向量用  $f' = (f_1 \quad f_2)$  表示。例如, 如果说某一生产函数为  $f(x_1, x_2) = \alpha x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$ , 那么通过  $(\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha} \quad (1-\alpha)x_1^\alpha x_2^{-\alpha})$  就能够计算出边际产量。如果根据它们的边际产量获得两种投入, 总成本为:

$$\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha} x_1 + (1-\alpha)x_1^\alpha x_2^{-\alpha} x_2 \text{ ①}$$

还有可能模拟多种产出。两种投入可以得到两种产出, 每一种投入都有自己的产出函数, 两种产出的向量表示为:

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

现在我们可能为每一产出列出边际产量的行向量:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

该表为  $2 \times 2$  维矩阵。第一个下标数字表示行 (该情况下的产出), 第二个下标数字表示列 (该情况下的投入)。矩阵中的位置  $(i, j)$  对应的元素代表投入  $j$  的边际  $i$  产量。

投入和产出的数目不必相同。事实上, 我们已经处理了一种产出两种投入的情况, 在此情况下, 我们得出了边际产量的行向量  $f' = (f_1 \quad f_2)$ 。这是  $1 \times 2$  维矩阵。一般来说, 一个  $m \times k$  矩阵  $B$  有  $m$  行和  $k$  列。第  $i$  行和第  $j$  列的元素可以表示为  $b_{ij}$ 。  $b_{i \cdot}$  表示行  $i$ ,  $b_{\cdot j}$  表示列  $j$ 。矩阵  $B$  的任何一行和任何一列的维数都是  $k$ 。类似地, 任何一列的维度都是  $m$ , 也即行的总数。

① 该表达正好等于  $f(x_1, x_2)$ , 这一发现反映  $f$  的尺度属性的常数收益。

### 1.3 约束最大化

一个目标函数将一个经济体中所有变量的不同规模水平以价值形式表示出来。如果变量为  $x_1, \dots, x_n$  (例如, 它们代表生产单位的活动水平), 那么结果 (例如, 国民收入) 将会是一些实数  $f(x_1, \dots, x_n)$ , 或简化为  $f(x)$ , 其中  $f$  是目标函数。规范地讲, 目标函数  $f$  是  $n$  维变量空间到一维实数空间的映射。也就是  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 。将目标函数  $f$  和它可能的值  $f(x)$  进行区分, 这点是非常重要的。后者仅就所有基本变量的给定幅度对经济体的性能进行评估, 而前者表示性能与基本变量的关系。换句话说, 函数  $f$  总结经济体的结构。其中, 有许多约束因素。我们可以用每一水平的经济体的变量  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , 将劳动力需求—— $g_1(x)$  和其他资源需求—— $g_i(x)$  进行联立。其中, 资源  $i$  是生产发生前已经存在的任何投入, 比如说矿物资源、设备等。设资源数目为  $m$ , 那么需求为  $g_1(x), \dots, g_m(x)$ , 资源需求可以表达为  $g_1(x) \leq b_1, \dots, g_m(x) \leq b_m$ , 其中, 右边是资源的可用量。不等式可总结为:

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = b \quad (1.9)$$

在约束条件 (1.9) 中,  $g$  是约束函数,  $b$  是边界。函数  $g$  与每个  $n$  维度的变量  $x$ ,  $m$  需求相联系。 $m$  需求是  $m$  维度空间的点。最后, 我们推出  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 。约束最大化的问题是:

$$\max_x f(x) : g(x) \leq b \quad (1.10)$$

式 (1.10) 中的冒号代表着词组“受……约束”。在变量空间中, 特别是表达式中有两个变量 ( $n=2$ ), 并且只有一个约束条件 ( $m=1$ ) 时, 我们可以用图表的形式来描绘表达式。符合约束条件的点集 (1.9) 是可行性区域。目标函数可以用所谓的等值曲线来表示。该等值曲线连接  $x$  对应等值的点, 即  $f(x)$ 。通过偏导数可得这些等值曲线的垂线是上升速度最快的向量:

$$f'(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) \quad (1.11)$$

例如, 若等值双曲线为  $3x_1 + x_2 = 6$ , 则其水平截距为  $x_1 = 2$ , 垂直截距为  $x_2 = 6$ , 并且此直线的斜率较大, 那么等值曲线的垂直向量为  $(3 \ 1)$ 。非线性



例子请参照图 1.1。

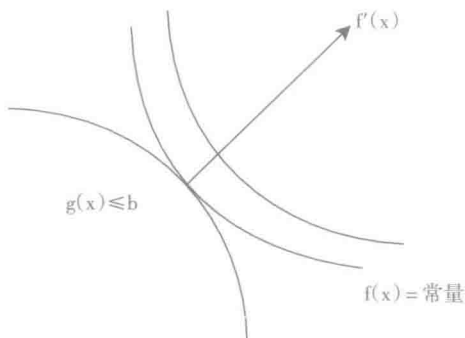


图 1.1 约束函数  $g$  的可行性域、两个等值曲线以及目标函数  $f$  的导数

在等值双曲线与边界相切的可行性域中，目标函数  $f$  能取最大值。因为边界是有界函数  $g$  的双曲线，一个等价条件是同一方向的上升较快的向量：

$$f'(x) = \lambda g'(x), \lambda \geq 0 \quad (1.12)$$

在式 (1.12) 中，比例常数  $\lambda$  不能为负数。如果比例常数  $\lambda$  为负数，那么在  $f'(x)$  顺着某一方向将进入可行性区域，并且数量有所增加，与我们假定的最大值矛盾。另外请注意：上述条件包含了约束条件没有约束力的情况。如果比例常数  $\lambda$  为非负数，最大值仅要求目标函数斜率为零，即  $f'(x) = 0$ 。该目标函数被式 (1.12) 中的数值为零的  $\lambda$  所覆盖。

约束条件的一级条件式 (1.12) 为一般条件， $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 。总之，目标函数的导函数与有界函数的导函数成一定比例，且该比值为非负数。以下矩阵确定  $g^{(1)}$  的导函数：

$$g' = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

每一比例常数代表一个常数，依次排列在行向量  $\lambda = (\lambda_1 \cdots \lambda_m)$ ，(与  $f'$  相同维度的) 行向量以一般的方式确定  $\lambda$  的产量和矩阵  $g'$ ：<sup>②</sup>

① 这种标记在  $m=1$  的情况下，与实数函数（如  $f$ ）的部分总函数标记一致。

② 在式 (1.14) 中，第一元素是  $\lambda$  的产量，矩阵的第一列为  $g'$ 。矩阵的精确处理在第 2 章中进行讲解。