普通高等教育“十三五”规划精品教材

基础物理学讲义

邢秀文 胡 毅 邓建杰 主编

武汉大学出版社
WUHAN UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十三五”规划精品教材

基础物理学讲义

邢秀文　胡　毅　邓建杰　主编

武汉大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

基础物理学讲义/邢秀文主编．—武汉：武汉大学出版社，2015.1
普通高等教育“十三五”规划精品教材
ISBN 978-7-307-14931-1

Ⅰ.①基…　Ⅱ.①邢…　Ⅲ.①物理学－高等学校－教材　Ⅳ.①O4

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第279338号

策划编辑：袁　凯　　责任编辑：刘　外　　责任校对：杨爱民

出版发行：**武汉大学出版社**　（430072　武昌　珞珈山）
（电子邮件：cbs22@whu.edu.cn 网址：www.wdp.com.cn）
印刷：广州市怡升印刷有限公司
开本：787mm×1092mm　1/16　　印张：22.5　　字数：560千字
版次：2015年1月第1版　　2015年1月第1次印刷
ISBN 978-7-307-14931-1　　定价：40.00元

目 录

第一章

质点力学

古希腊人把所有关于自然界的学问称为“自然哲学”. 随着历史的发展，自然哲学逐渐分化为天文、物理、生物、地质等科目. 物理学(physics)是关于我们世界的最基础性的科学. 物理学是非常实用的学科，是其他工程技术——机械学、建筑学、电气工程、宇宙学、化学等——的基础. 物理学也是美丽的，它的美丽体现在它的简单性上——只需要用很少几个方程和很少的参数，就能够刻画宇宙的一切. 那究竟什么是物理学？比较简单的说法是：物理学是研究物质的基本运动以及物质的基本结构和相互转化的学科.

物质世界中存在着形形色色的运动与变化. 在各种运动形式中，最简单的一种就是物体位置的变化. 位置的变化既包括宏观物体的位置随着时间移动，也包括物体内部各个部分之间的相对变形，这种最简单的运动形式称为“机械运动”或者“力学运动”(mechanical motion). 各种交通工具的行驶、江水与大气的流动、天体的运行、地壳的振动等都是机械运动.

牛顿于公元17世纪出版的《自然哲学的数学原理》是物理学史中第一部划时代的著作，它揭示了有质量有形状的普通物质的运动规律. 以牛顿定律为基础的力学理论，称为牛顿力学或古典力学. 古典力学是物理学最早发展起来的成熟的分支，并且能够为物理学其他分支提供最基础的概念和分析方法.

古典力学(mechanics)的研究对象是在弱引力场中低速运动的宏观物体. 通常说来，力学可以分为运动学(kinematics)、动力学(kinetics)、静力学(statics)三个分支. 运动学仅关心物体的运动，而不涉及引起运动以及改变运动的原因；动力学则研究运动发展变化的原因，研究物体之间的相互作用；静力学关注的是物体在相互作用之下的平衡. 静力学通常是工程力学所关注的内容，本书只关注前两个分支.

第1讲 直角坐标中的运动

质点是一个有质量、有位置，但是没有体积的点，它是对物体实际运动情况的简化，是理想的物理模型. 能否将一个物体视为质点，取决于所研究问题的近似程度. 质点的重要性，体现在下列三种情形中：

①所研究的系统距离观察者非常遥远，其内部运动可以忽略时．例如，研究地球绕太阳公转时，地球离太阳的距离($r \simeq 1.5 \times 10^8$ km)比地球的半径($R \simeq 6.4 \times 10^3$ km)大得多，于是可以把地球当作质点．但在地面上研究地球自转时，就不能把地球视为质点．

②物体距离观察者很近，其体积不可忽略．但是物体只有平动而没有转动，此时物体上所有部位移动的距离始终相同，因此物体上任意一个点都可以代表物体的运动，从而整个物体可简化为质点．例如一个大木箱在地面上平行滑动就可以简化为质点．

③当一个大的物体不能当作质点时，可以把整个物体看作是由许多质点组成的质点系统，只要将每个质点的运动情况都研究清楚，就可知道整个物体的运动情况．例如转动的轮子、流动的空气等都可以看做是由许多质点组成的连续质量系统．因此质点是古典力学中最重要的概念之一．

而在运动学中，物体的质量亦可以忽略，从而进一步简化为一个几何“点”．

1.1 点的直线运动

直线运动是一种最简单的机械运动．研究物体的直线运动时，我们最好将运动的路径指定为直角坐标系中的某一个轴，例如x轴．

1. 位置与位移

我们必须要记住，物理学是建立在观察与实验基础之上的科学．如果我们观察运动的物体，直观感觉最明显的就是它的位置随着时间不断变化．所以研究运动学问题都是从位置开始的．点的位置对时间的函数关系式称为点的**运动学方程**．有了运动学方程，就可以掌握质点全部的运动情况．沿着x轴运动的质点，其运动学方程可表示为

$$x = x(t) \tag{1-1}$$

很明显，质点的位置是不断变化的．假设从t_1时刻到t_2时刻，质点从x_1位置运动至x_2，则

$$\Delta x \triangleq x_2 - x_1$$

定义为这段时间内的**位移**．本书中符号$\triangleq$代表某个新物理量的定义．

注意：位移总是定义为末态位置减初始位置；位移仅仅由始、末位置决定，与中间过程无关；位移的数值可正可负．

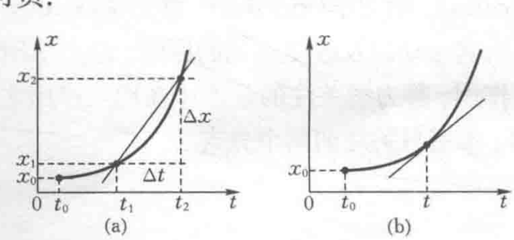

图 1.1 直线运动．割线斜率代表平均速度；切线斜率代表瞬时速度．

2. 由位置计算速度

为了描述物体运动的快慢，我们定义一段时间内的平均速度

$$\overline{v}_x \triangleq \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

显然(图1.1),在x-t函数图像上,$\overline{v}_x$表示割线的斜率. 当我们用各种仪器测量速度时,本质上都是在测量平均速度.

平均速度仅提供一段时间内位置的平均变化快慢,却不能描述质点在这段时间内各个瞬间的运动快慢. 为了更细致的描述物体的运动快慢,我们希望速度测量所用的时间越短越好. 我们发现,无论时间多短,总能找到比它更短的时间,于是引入极限的概念. 质点的**瞬时速度**(简称速度)定义为

$$v_x(t) \triangleq \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1-2}$$

可以看出,速度函数$v_x(t)$就是位置函数$x(t)$的"导函数". 在不引起混淆的前提下,一般将下脚标$_x$略去,直接写为$v(t)$. 其绝对值$|v|$表示质点在瞬时运动的快慢,其正负号分别对应于质点沿x轴的正向和负向运动.

在x-t函数图像上,$v(t)$表示t时刻切线的斜率. 当速度是正值时,斜率为正;反之斜率为负.

3. 由速度计算位置

假设已知质点沿x轴做变速直线运动,初始时刻$t=t_0$时,质点位于$x=x_0$处;并且已知任意时刻的运动速度$v(t)$,如何求任意时刻的坐标$x(t)$呢? 这里有两种思路,下面分别阐述.

思路一: 既然速度函数是位置函数的"导函数": $v(t)=\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$,那么位置就是速度的"原函数",或者说位置是速度的"不定积分". 从"微积分学"中我们知道,原函数不是唯一的. 令$v(x)$的一个原函数是$X(t)$,则有

$$x(t)=\int v(t)\mathrm{d}t=X(t)+C$$

其中C是一个任意常数. 那如何确定这个任意常数呢? 很简单,我们将初始条件$t=t_0$时刻的坐标$x=x_0$代入上式,可以得到常数C的取值

$$x_0=X(t_0)+C \quad \Rightarrow C=x_0-X(t_0)$$

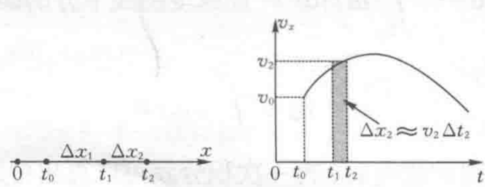

图1.2 直线运动的速度

思路二: 在学习"定积分"时,通常是从计算曲线下方的面积开始的. 为了计算曲线下方的总面积,我们首先将它切割为无限多个高度不等的小矩形,每个矩形的面积都无限小. 然后将无限多个面积无限小的矩形相加,就是曲线下方的总面积. 而所谓的定积分,就是这个相加的结果. 因此,**定积分就是求和运算,就是加法**. 如图1.2所示,为了计算位置,我们将时间$[t_0,t]$分成n个很小的时间段,即$[t_0,t_1]$、$[t_1,t_2]$、$\cdots$、$[t_{n-1},t]$,由于它们都足够的小,质点在任意一段时间$\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$内近似做匀速运动,其位移$\Delta x_i\simeq v(t_i)\cdot\Delta t_i$. 因

此，质点在$[t_0, t]$内的总位移

$$\Delta x \triangleq x(t) - x_0 = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \simeq \sum_{i=1}^{n} v(t_i)\Delta t_i$$

当$n \to \infty$时，$\Delta t_i \to 0$，上式中的近似等号就变为等号，求和运算$\sum$就成为定积分运算了．因此质点任意t时刻的位移

$$x(t) - x_0 = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(t_i)\Delta t_i \triangleq \int_{t_0}^{t} v(t)\mathrm{d}t = \text{速度图线下方的面积}$$

明白了上述思路后，上述的过程可以简化处理：从速度定义式$v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$可得到微分关系$\mathrm{d}x = v\mathrm{d}t$，两边同时进行定积分

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x = \int_{t_0}^{t} v(t)\mathrm{d}t$$

注意积分的上下限：初始时刻t_0对应初始位置x_0，任意时刻t对应该时刻的坐标x．积分之后可以得到

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\mathrm{d}t \tag{1-3}$$

这就是质点直线运动的运动学方程．**注意**：只有当$v(t)$是已知函数时，上述积分才能进行计算．

4. 加速度

质点速度的大小（甚至方向）都可能发生变化．速度的变化率叫做**瞬时加速度**（简称加速度），可定义为

$$a(t) \triangleq \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-4}$$

加速度a是有正负号的．若加速度与速度的符号相同，质点运动越来越快；若加速度与速度的符号相反，则质点运动变慢．

在v-t函数图像上，加速度表示图像切线的斜率．

类似的，如果知道质点运动的加速度$a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$，有$\mathrm{d}v = a\mathrm{d}t$，两边同时积分

$$\int_{v_0}^{v} \mathrm{d}v = \int_{t_0}^{t} a(t)\mathrm{d}t = \text{加速度图线下方的面积}$$

质点在任意t时刻的速度为

$$v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\mathrm{d}t \tag{1-5}$$

其中v_0为t_0时刻的速度．得到速度后，再一次积分就可以算出位置．

一般情况下，如果没有特别说明，上述各式中的$t_0 = 0$，即规定运动开始的时刻为时间计量的起点．

5. 匀加速直线运动

若物体的加速度为常量（大小与方向皆不变），就是匀加速运动．若匀加速运动物体的初始速度为零，或者初始速度与加速度的方向在同一条直线上，则其运动轨迹就是直线．设运动沿x轴进行．令初始位置是x_0，初始速度是v_0，加速度a是常量．则任意时刻的速度

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a\mathrm{d}t = v_0 + a\int_0^t \mathrm{d}t = v_0 + at$$

任意时刻的位置为

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t)\mathrm{d}t = x_0 + \int_0^t (v_0 + at)\mathrm{d}t = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

例1-1 已知物体的运动方程为$x(t) = 6t - t^2$(SI)，计算(1)物体的速度$v(t)$；(2)加速度$a(t)$；(3)在$0 \sim 4$ s时间内的位移；(4)在$0 \sim 4$ s时间内走过的路程.

解 (1)速度

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 6 - 2t$$

(2)加速度

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -2\ \mathrm{m/s^2}$$

(3)位移

$$\Delta x = x(4) - x(0) = 8 - 0 = 8\ \mathrm{m}$$

(4)根据速度$v = 6 - 2t$可以发现，当时间t较小时，速度v为正值，物体首先向正方向运动；当时间逐渐增大，速度v变为负值，即折返向负方向运动. 在折返处，其速度为零

$$v = 6 - 2t = 0 \ \Rightarrow\ t = 3\ \mathrm{s}$$

当$t = 3$ s时，坐标达到最大值$x(3) = 9$. 因此路程分为两段

$$\begin{aligned} l &= |x(3) - x(0)| + |x(4) - x(3)| \\ &= (|9 - 0| + |8 - 9|) = 10\ \mathrm{m} \end{aligned}$$

例1-2 质点沿直线运动，加速度$a = 2 + 2t$ (SI)，且$t = 0$时，$x_0 = 2$, $v_0 = 1$，求质点的运动方程.

解法一：用定积分求解

因$t = 0$时，$v_0 = 1$，任意时刻的速度

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + \int_0^t a(t)\mathrm{d}t = 1 + \int_0^t (2 + 2t)\mathrm{d}t \\ &= 1 + (2t + t^2)\Big|_0^t = 1 + 2t + t^2 \end{aligned}$$

$t = 0$时，$x_0 = 2$，任意时刻的位置

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_0^t v(t)\mathrm{d}t = 2 + \int_0^t (1 + 2t + t^2)\mathrm{d}t \\ &= 2 + t + t^2 + \frac{1}{3}t^3 \end{aligned}$$

解法二：用不定积分求解

速度是加速度的原函数

$$v(t) = \int a(t)\mathrm{d}t = 2t + t^2 + C_1$$

将$v(0) = 1$代入上式可得$C_1 = 1$，因此得：$v(t) = 1 + 2t + t^2$

位置是速度的原函数

$$x(t) = \int v(t)\mathrm{d}t = t + t^2 + \frac{1}{3}t^3 + C_2$$

将$x(0)=2$代入上式可知$C_2=2$，所以有

$$x(t)=2+t+t^2+\frac{1}{3}t^3$$

例1-3 已知某质点沿直线运动，速度$v(t)=2\,\mathrm{e}^{-t}$ (SI)，求质点在$0<t<1\,\mathrm{s}$内的位移.

解 位移是位置的增量，因此不需要知道初始位置. 利用定积分计算位移

$$\Delta x=x(1)-x(0)=\int_0^1 v(t)\mathrm{d}t=-2\,\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^1=2(1-\mathrm{e}^{-1})$$

1.2 高维空间中的运动

质点的一般运动通常是在三维空间或者二维平面上进行的. 高维空间中的运动虽然很复杂，但是按照笛卡尔的解析几何观点，任意的复杂运动都可以向三个直角坐标轴投影，分解为三个直线运动.

但是，高维空间中的运动也有许多特征是直线运动所不具备的，它具有更普遍的代表性. 下面以二维平面运动为例进行分析探讨.

1. 位置矢量

如图1.3所示，设质点P沿着轨道运动，为了定量地描述质点的位置及其随时间的变化情况，我们建立一个直角坐标系. 质点在任意时刻的位置可以由两个坐标(x,y)唯一确定. 我们将这个二元数组叫做质点的**位置矢量**，简称**位矢**. 位置矢量也可以用坐标原点O指向质点P的有向线段表示，$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$就是位矢.

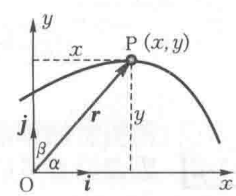

图1.3 位置矢量

在t时刻，质点P的位置矢量可表示为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j} \tag{1-6}$$

其中$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$分别为x,y轴方向的单位矢量，x和y为质点的位置坐标，位置矢量的大小为

$$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2} \tag{1-7}$$

位置矢量的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{x}{r},\quad \cos\beta=\frac{y}{r}$$

这两个方位角存在着约束关系

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$$

式中α,β分别为$\boldsymbol{r}$与x, y轴之间的夹角.

2. 运动方程

当质点运动时，它在坐标轴上的投影$(x,\,y)$是随着时间变化的，

$$x=x(t),\quad y=y(t) \tag{1-8}$$

质点的位置随时间变化的函数称为**运动学方程**，它给出了质点任意时刻的位置. 位置矢量$\boldsymbol{r}$也是随时间而变化的，因此位置矢量$\boldsymbol{r}$也是时间t的函数，

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}$$

这就是运动学方程的矢量形式.

3. 轨迹方程

质点运动时，位置矢量的矢端画出的曲线即为质点的轨迹(轨道). 将分量形式的运动学方程消去时间t便可得到质点运动的轨迹方程. 例如，平抛运动的运动方程为

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

消去时间t，得到质点轨迹方程为

$$y = \frac{g}{2v_0^2} x^2$$

物体运动的轨道是直观的、可视的. 但是用轨道描述物体的运动是不全面的. 例如长跑比赛中，每个参赛者都沿着相同的轨道运动，但是却快慢不一. 因此运动方程才是运动的最全面描述.

4. 位移矢量

二维空间中的位移是矢量，它描述了质点在一定时间间隔内的位置变化量，即位置矢量的增量，用初位置指向末位置的矢量来表示.

在图1.4中，某质点沿轨迹运动，t时刻位于P点，其位置矢量为$\boldsymbol{r}(t)$，$t+\Delta t$时刻位于Q点，其位置矢量为$\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$，在这段时间质点的位移为

$$\Delta \boldsymbol{r} \triangleq \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t) \tag{1-9a}$$

在直角坐标系中，位移矢量$\Delta \boldsymbol{r}$的正交分解式为

$$\Delta \boldsymbol{r} = \Delta x \boldsymbol{i} + \Delta y \boldsymbol{j} \tag{1-9b}$$

在上式中，

$$\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t), \quad \Delta y = y(t+\Delta t) - y(t)$$

位移的大小为

$$|\Delta \boldsymbol{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

有两点需要注意：

①位移矢量描述质点在一段时间内位置变动的总效果，并不表示质点在其轨迹上所走路径的长度. 因此，我们引入路程来描述质点沿轨迹的运动. **路程**是在一段时间内，质点在其轨迹上经过的弧线的总长度. 例如图1.4中$\overset{\frown}{\mathrm{PQ}}$弧的长度为路程$\Delta l$，$\overline{\mathrm{PQ}}$线段的长度为位移的大小$|\Delta \boldsymbol{r}|$. 一般情况下$\Delta l$与$|\Delta \boldsymbol{r}|$不相等，但是当$\Delta t \to 0$，$\Delta l$与$|\Delta \boldsymbol{r}|$一定相等

$$\Delta l \neq |\Delta \boldsymbol{r}|, \quad \mathrm{d}l = |\mathrm{d}\boldsymbol{r}| \tag{1-10}$$

②位置矢量的增量(位移)的模$|\Delta \boldsymbol{r}|$，不等于位置矢量模的增量Δr，

$$|\Delta \boldsymbol{r}| \neq \Delta r = r(t+\Delta t) - r(t)$$

5. 速度矢量

速度是描述物体运动快慢和运动方向的物理量. 设质点沿图1.4所示的轨迹运动，质点位移$\Delta \boldsymbol{r}$与发生这一位移的时间间隔Δt之比，称作质点在这段时间内的平均速度，用$\overline{\boldsymbol{v}}$作为其符号，

$$\overline{\boldsymbol{v}} \triangleq \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}$$

平均速度也是矢量，其方向与位移方向相同.

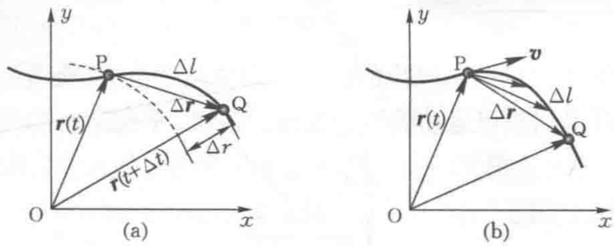

图1.4 位移与速度

当时间$\Delta t \to 0$时，平均速度的极限值称为质点在t时刻的**速度**，用$\boldsymbol{v}$来表示，

$$\boldsymbol{v} \triangleq \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1-11}$$

从图1.4(b)可以看出，瞬时速度的方向就是当$\Delta t \to 0$时位移$\Delta\boldsymbol{r}$的方向即沿着质点所在位置的切线，并指向质点前进的一侧.

瞬时速度在直角坐标系中的表示为

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} \tag{1-12a}$$

又有

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} \tag{1-12b}$$

将上述二式对比，可得到

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{1-12c}$$

即速度在直角坐标系中的两个分量分别等于相应坐标分量对时间的一阶导数.

瞬时速度的大小也称为**速率**，它等于路程对时间的导数

$$v = |\boldsymbol{v}| = \frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} \tag{1-13}$$

在直角坐标系中速率为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

6. 加速度矢量

如图1.5所示，质点沿轨迹运动，t时刻位于点P，其速度为$\boldsymbol{v}_1$，经Δt之后位于点Q，其速度变为$\boldsymbol{v}_2$，质点的速度增量$\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1$与发生这一增量所用时间$\Delta t$的商称为这段时间内的平均加速度

$$\overline{\boldsymbol{a}} \triangleq \frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{v}_2(t+\Delta t) - \boldsymbol{v}_1(t)}{\Delta t}$$

它反映了在时间间隔Δt内速度改变的快慢.

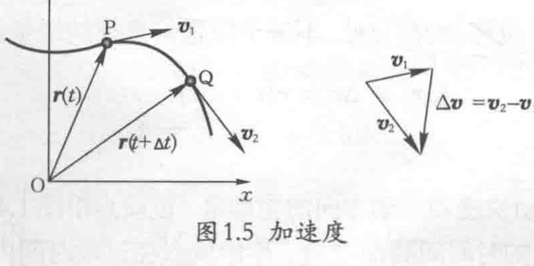

图1.5 加速度

当$\Delta t \to 0$时，平均加速度的极限值称为t时刻的**瞬时加速度**，简称**加速度**

$$\boldsymbol{a} \triangleq \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-14}$$

加速度在直角坐标系中表示为

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} \tag{1-15a}$$

其中a_x, a_y分别为加速度在坐标轴上的投影,

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}, \quad a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-15b}$$

加速度的大小

$$a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

例1-4 已知质点的运动学方程

$$\boldsymbol{r} = 3\boldsymbol{i}\cos(\pi t) + 4\boldsymbol{j}\sin(\pi t) \quad \text{(SI)}$$

求: (1)质点的轨迹方程; (2)$t = 1$ s时质点的位置矢量、速度、加速度;

解 (1)由运动学方程可知

$$x = 3\cos(\pi t), \quad y = 4\sin(\pi t)$$

消去时间t得到轨迹方程

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$

这是一个椭圆的轨迹方程.

(2)位置矢量

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y = 3\boldsymbol{i}\cos(\pi t) + 4\boldsymbol{j}\sin(\pi t)$$

将位置矢量对时间t求导数,

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} = -3\pi\boldsymbol{i}\sin(\pi t) + 4\pi\boldsymbol{j}\cos(\pi t)$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -3\pi^2\boldsymbol{i}\cos(\pi t) - 4\pi^2\boldsymbol{j}\sin(\pi t) = -\pi^2\boldsymbol{r}$$

将时间$t = 1$ s代入上述各式得: 位置$\boldsymbol{r}_1 = -3\boldsymbol{i}$, 速度$\boldsymbol{v}_1 = -4\pi\boldsymbol{j}$, 加速度$\boldsymbol{a}_1 = -3\pi^2\boldsymbol{i}$.

1.3 抛体运动

从地面上某点向空中抛出一物体, 它在空中的运动就称为抛体运动, 它是一种平面曲线运动. 如图1.6(a)所示, 以抛射点为xy平面的坐标原点, 用x, y表示抛体质点的坐标. 从抛出时刻开始计时, 速度为$\boldsymbol{v}_0$, 抛射角为θ, 忽略空气阻力的影响, 将抛体运动分解成水平和竖直方向的运动.

在水平方向上没有加速度, 抛体以速度$v_x = v_0\cos\theta$匀速运动, 此方向的位移为

$$x = x_0 + \int_0^t v_x\mathrm{d}t = v_0t\cos\theta$$

在竖直方向上, 抛体以$v_{0y} = v_0\sin\theta$为初速度, $a = -g$为加速度, 其运动的速度为

$$v_y = v_{0y} + \int_0^t a\mathrm{d}t = v_0\sin\theta - gt$$

抛体的速度

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{i}v_x + \boldsymbol{j}v_y = \boldsymbol{i}v_0\cos\theta + \boldsymbol{j}v_0\sin\theta - gt\boldsymbol{j} = \boldsymbol{v}_0 - gt\boldsymbol{j}$$

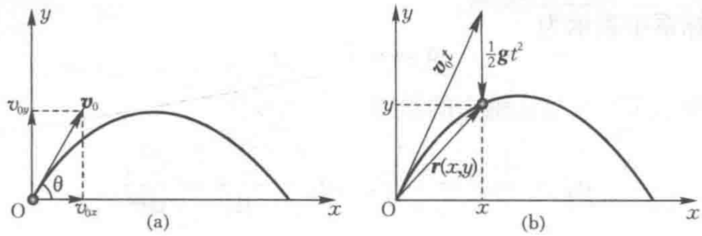

图 1.6　抛体运动

垂直方向的运动学方程为

$$y = y_0 + \int_0^t v_y \mathrm{d}t = v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$$

因此，抛体的运动学方程为

$$\boldsymbol{r} = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}$$

其中

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos\theta \\ y = v_0 t \sin\theta - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

即抛体运动可分解为沿水平方向的匀速直线运动和沿竖直方向的匀变速直线运动.

运动学方程还可以改写为

$$\boldsymbol{r} = \left(v_0 t \cos\theta \boldsymbol{i} + v_0 t \sin\theta \boldsymbol{j}\right) - \frac{1}{2}gt^2\boldsymbol{j} = \boldsymbol{v}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2$$

由此可以看出，抛体运动也可分解为沿初速度方向的匀速直线运动和沿竖直方向的自由落体运动，如图 1.6(b) 所示.

1.4 两点之间的关联运动

前面介绍的都是一个点的运动. 在各种各样的机械装置中，参与运动的轮子、杠杆、斜面等构件之间相互制约，大多不能视为一个点，但是可以用受到约束的两个点来代表. 如果知道了其中一个点的运动规律，就可以通过约束关系，得到另外一个点的运动规律.

例 1-5　曲柄连杆滑块机构常用来实现平动与转动的转换. 锯床、牛头刨等利用它将主动部件的旋转运动变为从动部件的直线往复运动. 柴油机、蒸汽机等则利用它将直线往复运动转化为旋转运动. 如图 1.7 所示，已知：轮子的半径 r、连杆的长度 l 固定不变，$(r/l) = \lambda < 1$；

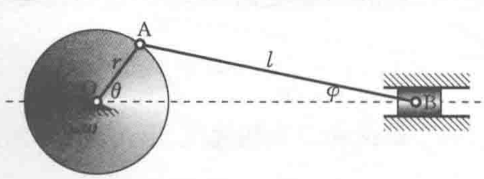

图 1.7　曲柄连杆

轮子以角速度 ω 均匀转动，角度 $\theta = \omega t$. 问滑块 B 的速度如何？

解　设 OB 的长度为 x. 显然，x 是变化的，且 x 变化的快慢就是滑块 B 的速度. 我们必须找到运动方程 $x(t)$.