高等数学精品课教材

高等数学 上册

第三版

ADVANCED MATHEMATICS

主编 薛利敏 赵小鹏

西北大学出版社

高等数学精品课教材

高等数学 上册

（第三版）

主　编　薛利敏　赵小鹏

副主编　朱天民　关文吉　唐　平　王荣波

西北大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学.上册 / 薛利敏，赵小鹏主编. —西安：
西北大学出版社，2014.6
ISBN 978-7-5604-3407-0

Ⅰ.①高… Ⅱ.①薛… ②赵… Ⅲ.①高等数学—高等学校—
教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字 (2014) 第128673号

高等数学（上册）

主　　编：薛利敏　赵小鹏
出版发行：西北大学出版社
地　　址：西安市太白北路229号
邮　　编：710069
电　　话：029-88303059
经　　销：全国新华书店
印　　装：陕西向阳印务有限公司
开　　本：710毫米×1000毫米　1/16
印　　张：18.5
字　　数：309千
版　　次：2004年8月第1版
　　　　　2014年6月第3版
印　　次：2015年7月第9次印刷
书　　号：ISBN　978-7-5604-3407-0
定　　价：29.00元

前　言

本书自2004年出版以来，被多所高等院校广泛采用. 经过十多年的教学实践，各兄弟院校根据实际情况，对理工类高等数学课程的教学内容、知识结构、教学方法、目的和要求进行了积极的探讨. 结合兄弟院校使用本教材的反馈信息和我国教育教学改革的需要以及我们的教学经验，借鉴和吸收国内外优秀教材的优点，我们对本书第二版进行了修订. 本次修订使教材表述更流畅，可读性更强，更便于教学，有利于提高学生的数学素养和综合能力.

本次修订我们具体做了以下工作：

1. 对知识结构作了适当调整：整合了部分小节的内容；更换了部分章节的名称.

2. 对知识内容的叙述介绍作了较大的修改.

3. 增加了极坐标的内容.

4. 调整了部分例题，充实了部分新的题型以及解题方法.

5. 对每章总习题作了较大的修改，每章总习题都增加了适当的选择题和填空题，使书中习题类型比较全面.

6. 规范了叙述格式和书写格式，使各章节内容叙述一致. 图表准确美观. 统一了数学符号、字母等.

7. 采用了最新的数学名词，规范了国外数学家人名的翻译等.

8. 适当调整了加 * 号的选学内容，使教学内容更具有弹性.

9. 增加了一个附录：常用数学公式.

10. 修改了第二版中的错误.

本教材具有如下特色：

1. 内容合理　根据理工类各专业对高等数学的需求和教学大纲而编写. 选材合理科学，内容安排层次分明、条理性强，难易程度适当.

2. 题型丰富　例题、习题的选配照顾到基本概念、基本理论、基本运算技能及数学思想方法的练习和实际应用的练习，题型适合当今各级各类考试考核的要求. 还适当选配了近几年考研数学题，以满足不同学生练习的需要.

3. 适用广泛　本教材适合于理工类各专业. 书中加 * 号内容可供对数学需求较高的专业学习使用. 对加 * 号内容的取舍，并不影响本书的理论体系和知识结构.

4. 有利教学　由于教材叙述格式规范、图表清晰美观，数学符号统一，教师易于操作；每个重要概念都是通过实例引入的，将原本抽象枯燥的数学知识变得学生容易理解接受；教材内容具有弹性，教师可根据不同专业、不同学生对数学知识的需要来处理教材，因材施教.

5. 便于自学　教材每章节前都对其内容、研究方法、作用地位等进行了较详细地介绍；概念引入自然，充分阐明了为什么要引入概念？以及如何引入概念？理论证明、例题讲解，分析透彻、条理清晰；语言叙述流畅，通俗易懂，深入浅出.

本次修订的主编是渭南师范学院的薛利敏和赵小鹏，副主编是渭南师范学院的朱天民和关文吉、西安理工大学的唐平、延安大学的王荣波. 具体编写分工如下：薛利敏编写第 1、2、3、12 章，赵小鹏编写第 4、5 章，朱天民编写第 6 章，关文吉编写第 7、8 章，唐平编写第 9、10 章，王荣波编写第 11 章. 由薛利敏教授担任策划、统稿、改写及校对工作.

我们感谢渭南师范学院教务处和数学与信息科学学院、西安理工大学理学院等院校的领导对本次修订工作的大力支持，感谢西北大学辛小龙教授，渭南师范学院舒尚奇教授、张同琦教授、李尧龙教授和查淑玲教授等对本次修订工作提出许多有益的建议. 感谢使用本书的广大师生对本书提出的宝贵意见和建议. 我们特别感谢西北大学出版社和李宝宁编辑的指导和帮助. 同时，本书还得到了渭南师范学院教育教学改革研究重点项目《高等数学精品教材建设的研究与实践》(JG201314)的资助，以及渭南师范学院省扶持学科数学学科基金资助项目(14SXZD001)的资助，在此表示感谢.

由于编者水平有限，书中不妥之处在所难免，恳请广大读者予以指正.

编　者

2014 年 6 月

本书所用数学符号及其含义

$\mathbf{N}$	自然数集合
$\mathbf{N}^{+}$ 或 $\mathbf{N}_{+}$	正整数集合
$\mathbf{Z}$	整数集合
$\mathbf{Q}$	有理数集合
$\mathbf{R}$	实数集合
$\mathbf{C}$	复数集合
$\varnothing$	空集
$\forall x$	对一切 x
$\exists x$	存在 x
$\in$	属于
$\overline{\in}$ 或 $\notin$	不属于
$\subset$	含于
$\supset$	包含
$\cap$	交集
$\cup$	并集
$\backslash$	差集
$\lvert a \rvert$	a 的绝对值
$n!$	n 的阶乘，即 $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$
$(2n)!!$	$2n$ 的双阶乘，即 $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)$
$(2n-1)!!$	$(2n-1)$ 的双阶乘，即 $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)$
$\binom{\alpha}{n}$	即 $\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$（$\alpha$ 为实数）
$\binom{n}{k}$ 或 C_n^k	二项系数（从 n 个元素中每次取出 k 个元素所有不同组合的总数）即 $\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot k}$

$\sum$	总和
$\prod$	连乘
%	百分比
∞	无穷大
[ ]	方括号,表示其中数的整数部分
{ }	花括号,表示其中数的分数部分
$^\circ$ $'$ $''$	度,分,秒(例 $21^\circ 23' 18''$)
$\overparen{AB}$	弧
π	圆周率
$\lg x$	以 10 为底的对数(称为常用对数)
$\ln x$	以 e 为底的对数(称为自然对数)
e^x 或 $\exp x$	指数函数(以 e 为底)
$\Gamma(\zeta)$	伽马函数($\Gamma-$ 函数)
$B(p,q)$	贝塔函数($B-$ 函数)
$\nearrow(\searrow)$	单调上升(单调下降)
$\to$	收敛于,趋于
max	最大
min	最小
Δx	x 的有限增量

目 录

第一章　函数与极限

高等数学研究的对象是函数，主要研究函数的微积分及函数的性态. 因此，高等数学也称为微积分学. 极限是研究函数微积分的基本工具，极限理论贯穿高等数学的始终. 作为讨论微积分的准备，本章我们将介绍函数的概念、极限理论以及函数连续性等有关内容.

第一节　函数

初等数学是研究常量的数学，高等数学是研究变量的数学，为了研究变量与变量之间的依赖关系，从而抽象出了函数的概念.

§1.1.1　区间与邻域

1. 区间

区间是常见的一类实数集，是研究函数的基础. 设 a,b 都是实数，且 $a<b$.

区间可分为有限区间和无限区间两类，有限区间又分为闭区间、开区间和半开区间.

闭区间是指集合 $A=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$，记作 $[a,b]$. 如图 1-1.

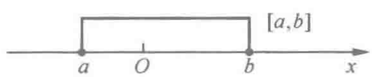

图 1-1

开区间是指集合 $A=\{x \mid a<x<b\}$，记作 (a,b). 如图 1-2.

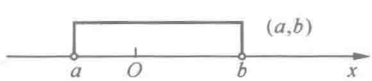

图 1-2

半开区间是指集合 $A=\{x \mid a \leqslant x<b$（或 $a<x \leqslant b$）$\}$，记作 $[a,b)$（或 $(a,b]$）. 如图 1-3.

图 1-3

以上区间的区间长度都是 $b-a$.

无限区间是指集合 $A=\{x \mid -\infty < x < +\infty\}$，通常记作 $(-\infty, +\infty)$，同理可定义无限区间 $(-\infty,b)$，$(-\infty,b]$，$(a,+\infty)$，$[a,+\infty)$ 等. 图 1-4 是无限区间 $(-\infty,b]$ 和 $(a,+\infty)$ 的图示.

图 1-4

2. 邻域

邻域是一种特殊的区间，它在极限概念中具有重要的作用.

点 a 的 δ 邻域是指以点 a 为中心，长度为 2δ 的开区间，记作

$$N(a,\delta)=U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta).$$

点 a 的 δ 空心邻域是指不包含中心点 a 的邻域，记作

$$\mathring{N}(a,\delta)=\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

§1.1.2 函数概念及其表示法

1. 函数的定义

定义 1 设 x,y 是两个变量，且变量 x 在某个非空数集 D 中取值. 如果当变量 x 在 D 中任意取定一个值时，变量 y 总按照一定的法则 f，有确定的取值与之对应，则称 y 为 x 的函数. 记作 $y=f(x)$.

我们称 x 为自变量，y 为因变量，x 的变化范围为函数 $y=f(x)$ 的定义域，通常记为 $X,D,\cdots$；y 的变化范围称为函数 $y=f(x)$ 的值域，记为 $Y,K,\cdots$

关于函数定义的几点说明：

函数定义的全部实质在于定义域和函数关系（确定的法则）. 判断两个函数是否相同的关键，就是看它们的定义域和函数关系是否一样.

(1) 定义域：即自变量的取值范围，它可由实际问题来决定，如圆的面积 S 是半径 r 的函数，即 $S=f(r)=\pi r^2$，其定义域为 $r>0$；亦可由数学表达式的数学意义来确定，如 $y=f(x)=\sqrt{1-x}$，则其定义域为 $x\leqslant 1$.

(2) 函数关系：即定义中的 f,φ,g 等等，但对同一问题中的不同函数最好区别写，每一函数一旦写定，在同一问题中就不要再改写.

如函数 $y=f(x)=2x^2+5$ 和 $S=\varphi(t)=2t^2+5$，两个函数的定义域均为 $(-\infty,+\infty)$，函数关系均为自变量平方的 2 倍加 5，所以 $f(x)$ 与 $\varphi(t)$ 表示同一个函数.

又如函数 $f(x)=\ln x^2$ 与 $g(x)=2\ln x$，$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，所以 $f(x)$ 和 $g(x)$ 不是同一个函数.

(3) $y=f(x)$ 表示两个意思：① x 与 y 的函数关系；② 函数在 x 点的值.

如 $y=f(x)=2x^2+5$ 亦可理解为函数 $f(x)$ 在 x 处的值. 当 $x=0$ 时，

$f(0)=5$；当 $x=2$ 时，$f(2)=2\times 2^2+5=13$；当 $x=x_0$ 时，$f(x_0)=2x_0^2+5$.

(4) 单值和多值函数：函数定义中说"有确定的数值和它对应"，如果这个"确定"是惟一确定的数值和它对应，则称其为单值函数；若至少在某一点有两个以上数值和它对应，则称其为多值函数，见图 1-5. 以后本书中研究的函数若无特别说明，均指单值函数.

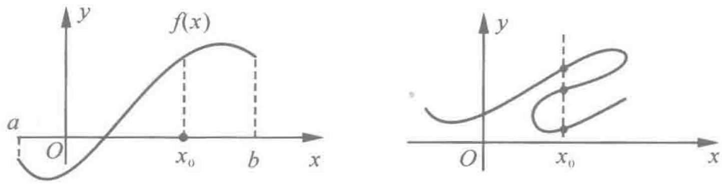

图 1-5

2. 函数的表示法

(1) 解析法(公式法、分析法)：即用具体的数学表达式表示函数关系的方法.

如下列表达式是用解析法表示的函数.

$$y=f(x)=\sin x;$$

$$y=f(x)=\ln x^2;$$

$$y=f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1+x, x>1;\end{cases}$$

$$y=f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

后两个函数是分段函数，它们在不同范围内表示一个函数.

(2) 表格法：把自变量和对应的函数值列成一个表格来表示函数关系的方法称为表格法.

函数的表格法的优点是不用计算，直接可查到函数值.

(3) 图示法：平面点集 $C=\{(x,y)\mid y=f(x), x\in D(f)\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图形. 用函数图形来表示函数关系的方法称为图示法.

如示波器、脑电图、心电图等都是利用函数的图示法来设计的. 图示法的优点是直观，但不便作理论上的分析.

§1.1.3 函数的特性

1. 奇偶性

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 在以原点为中心的对称区间 X 上有定义. 如果对任意的 $x\in X$ 都有 $f(-x)=f(x)$ 成立，我们则称 $y=f(x)$ 为偶函数. 偶函数

的图形对称于 y 轴.

如果对任意的 $x \in X$,都有 $f(-x) = -f(x)$,我们则称 $y = f(x)$ 为奇函数.奇函数的图形对称于原点.

如图 1-6 所示的函数 $y = x^2$ 和 $y = x$ 分别为区间$(-\infty, +\infty)$上的偶函数和奇函数.

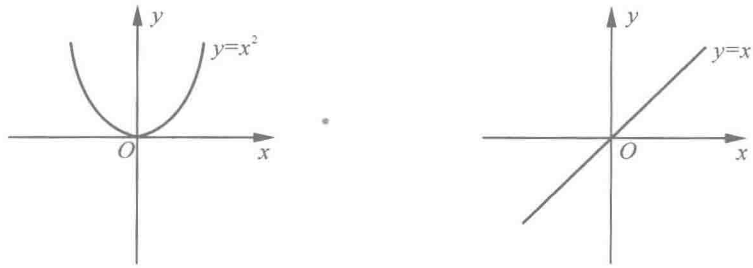

图 1-6

例 1　已知 $f(x), g(x)$ 均为偶函数,求证 $F(x) = f(x) + g(x)$ 亦为偶函数.

证明　注意到 $F(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = F(x)$,且 $F(x)$ 的定义域关于原点对称,由偶函数的定义可知 $F(x)$ 为偶函数.

2. 有界性

定义 3　设 $y = f(x)$ 在集合 X 上有定义,若存在 $M > 0$,使得对任意 $x \in X$,均有 $|f(x)| \leqslant M$,则称 $f(x)$ 在 X 上有界,并称之为 X 上的有界函数;否则称 $f(x)$ 为无界函数.

如 $f(x) = \sin x$ 在$(-\infty, +\infty)$内是有界函数.因为 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$,都有 $|\sin x| \leqslant 1$,所以 $f(x)$ 在$(-\infty, +\infty)$上有界.

又如函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在$(0,1)$内无界.因为当 $x \to 0$ 时,$\left|\dfrac{1}{x}\right|$可任意大.假如取 $M = 10^{100}$,则可取 $x = \dfrac{1}{M+1} = \dfrac{1}{10^{100}+1} \in (0,1)$,可是

$$\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x} = M + 1 = 10^{100} + 1 > M,$$

所以 $f(x)$ 在$(0,1)$内无界.但函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在$(1,2)$内有界,因为对任意的 $x \in (1,2)$,都有 $|f(x)| = \left|\dfrac{1}{x}\right| \leqslant 1$,所以 $f(x)$ 在$(1,2)$内有界.

3. 单调性

定义 4　设函数 $f(x)$ 在(a,b)内有定义.如果对任意的 $x_1, x_2 \in (a,b)$,由 $x_1 < x_2$ 均可推出 $f(x_1) < f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在(a,b)内单调递增.

如函数 $f(x) = x^2$ 在$[0, +\infty)$上单调递增;函数 $f(x) = x^3$ 在$(-\infty, +\infty)$