特殊函数论及其应用

赵教练　李海龙　编著

科学出版社

特殊函数论及其应用

赵教练　李海龙　编著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书介绍和总结了在数论和数学物理等学科中有重要应用的几类特殊函数，如 Zeta 函数、Gamma 函数、超几何函数、椭圆函数及常用超越函数等. 主要分析和阐述在研究特殊函数时新的思想、方法和技巧，论证特殊函数的解析性质、特殊函数之间的内在联系、特殊函数的完全单调、模恒等式、渐近逼近、对数凸性等性质及其应用，获得了一些有趣的结果和应用.

本书可以作为特殊函数论的入门读物，也可供数学系、物理系的师生及工程技术研究人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

特殊函数论及其应用/赵教练，李海龙编著. —北京：科学出版社，2016. 6

ISBN 978-7-03-048519-9

I. ①特… II. ①赵… ②李… III. ①特殊函数–研究 IV. ①O174.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016) 第 123209 号

责任编辑：祝 洁 李 萍 高慧元／责任校对：郑金红
责任印制：徐晓晨／封面设计：红叶图文

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京厚诚则铭印刷科技有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016 年 6 月第 一 版 开本：720 × 1000 B5
2016 年 8 月第二次印刷 印张：9 1/2
字数：192 000

POD定价： 70.00元
（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

特殊函数是指在数学和工程领域中非常重要的函数. 一般地, 作为数学研究的一个分支, 特殊函数论 (或称为超越函数论) 是指实与复分析、数学物理、数论等学科中具有基础理论和重要应用价值的函数. 特殊函数主要包括 Gamma 函数、Zeta 函数、超几何与合流超几何函数、Weierstrass 函数与 Jacobi 椭圆函数、Lame 函数、正交多项式等.

本书主要介绍 Gamma 函数、超几何函数、椭圆函数和 Zeta 函数等几类经典特殊函数及它们之间的内在联系, 特殊函数的完全单调、模恒等式、渐近逼近、对数凸性等性质及其应用. 主要利用解析函数论、微分方程、凸函数理论等思想、方法和技巧, 具体分析和研究了 Plana 求和公式、Kubert 函数、Gauss 超几何函数 ${}_2F_1(a,b;c;z)$、Polygamma 函数及其 q-模拟, Ramanujan Gamma 函数、Gini 均值及 Jacobi 椭圆函数等特殊函数的性质. 作为应用, 揭示了不同特殊函数之间的相互关系, 给出了 Hurwitz-Lerch Zeta 函数的积分表达, 改进了部分特殊函数渐近逼近的界, 建立了一些新的有趣的性质和不等式, 并且推广了已有的结果. 这些结果有利于在理论上更深入地理解特殊函数的性质, 并且便于在实践中更广泛地应用这些性质, 丰富了特殊函数论的研究.

本书核心部分主要是 Gamma 函数和 Zeta 函数的相关结论. 由于 Gamma 函数在特殊函数论中的基础重要性, 几乎所有的特殊函数论的专著和教材都从 Euler 积分定义的 Gamma 函数开始. 它具备丰富和优美的特性, 在数学的许多分支以及物理、工程等学科中都起着不可或缺的重要作用. 它的重要性和丰富性集聚了几个世纪以来最优秀的数学家的智慧, 如 Wallis(1616~1703)、Bernoulli(1700~1782)、Euler(1707~1783)、Goldbach(1690~1764)、Gauss(1777~1855)、Ramanujan(1887~1920) 等. 数学家的共同努力使得 Gamma 函数已经成为高度发展了的系统理论, 而 Riemann ζ 函数更是数论中的核心课题.

本书的核心内容是两位作者近年来在数论和特殊函数研究中所获得的一些结果. 全书力图体现朴素的思想、分析的技巧和新颖的角度这三者有机结合的思路. 对于复杂的问题, 从一些简单的情形出发, 寻找规律; 对于经典的研究对象, 力求从崭新的角度去审视和分析.

本书的出版得到了渭南师范学院学术专著出版基金、第 58 批中国博士后基金 (2015M582619)、陕西省教育厅专项基金项目 (15JK1264)、特色学科和人才项目

(14TSXK02, 15ZRRC05) 及国家自然科学基金项目 (61402335) 等的资助, 作者在此一并表示衷心的感谢.

由于作者水平有限, 书中难免存在不足之处, 恳请专家学者批评指正.

目录

第 1 章　绪　　论

1.1　理 论 背 景

特殊函数是指在数学和工程等领域中非常重要的函数. 一般地, 作为数学研究的一个分支, 特殊函数论 (或称为超越函数论) 是指实与复分析、数学物理、数论等学科中具有基础理论和重要应用价值的各类函数, 利用经典分析和代数等数学思想和理论工具研究这些函数的性质和应用的一套系统理论. 特殊函数作为一个独立的研究课题在数学主题分类 (MSC2010) 中被列为 33-xx. 根据特殊函数的不同来源, 本书把它所包含的内容总结归类, 大致分为三大部分.

(1) 第一部分来自于数学物理等工程应用学科中所研究的微分方程的解. 这类函数的特点是从它们所满足的方程的奇点性质考虑. 它们都是某类二阶线性微分方程的级数解, 主要以超几何微分方程 (其微分方程都有三个正则奇点)

$$z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d} z^2}+[c-(a+b+1)z]\frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} z}-aby=0 \tag{1.1.1}$$

或者合流超几何微分方程 (以 ∞ 为非正则奇点)

$$z\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d} z^2}+(c-z)\frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} z}-ay=0 \tag{1.1.2}$$

为原型. 这个大类的很多函数可以化为超几何函数或者合流超几何函数, 有些直接是它们的特例. 例如, Legendre 多项式、Jacobi 多项式、Chebyshev 多项式、超球多项式都是超几何函数的特例; Bessel 函数、Hermite 函数、Hermite 多项式、Laguerre 多项式等都是合流超几何函数的特例. 还有其微分方程有四个及以上正则奇点的拉梅函数和椭球面函数类、正交多项式等都属于此大类. 一阶微分方程的解也是一类基本的超越函数, 如经典的三角函数、指数函数、简单多项式函数及它们的反函数等.

(2) 第二部分来自椭圆积分及其反演得到的椭圆函数类. 这类函数主要是从周期性考虑的, 主要包含 Legendre 和 Weierstrass 给定的三类椭圆积分研究, 以及反演得到的 Weierstrass 椭圆函数和 Jacobi 椭圆函数、Abel 积分和 Abel 函数等.

椭圆积分是指形如

$$\int_a^x R(x,y)\,\mathrm{d}x$$

的函数. 其中, $R(x,y)$ 是 x,y 的有理函数, 且 $y^2(x)=P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$. 椭圆积分因在求椭圆弧长的问题中出现而得名. 实际上在求椭圆弧长、双纽线弧长、单摆的周期、弹性细杆的弯曲等问题中都会遇到, 但求解积分很难. 1833 年, 法国数学家 Louville 证明这类积分的原函数不能表示为初等函数. 椭圆积分的历史起点公认是 1718 年, 由意大利数学家 Fagnano 发现双纽线积分的倍弧长公式. 1751 年 12 月 23 日, Euler 得知上述结果后, 于 1761 年把倍弧长公式推广为双纽线的加法定理. 因此, Jacobi 把 1751 年 12 月 23 日称为"椭圆函数的生日". Legendre 从 1783 年起系统研究了椭圆积分并进行了分类. Gauss 从 1791 年研究算术几何均值迭代开始, 也对椭圆积分有贡献, 并声称"开辟了一个全新的分析领域".

椭圆函数来自于椭圆积分, 是通过椭圆积分反演得到的. 主要贡献者是 Abel 和 Jacobi. 他们引进 Jacobi 椭圆函数, 把椭圆函数由实值推广到复值并发现双周期性. 1829 年 Jacobi 出版的 *Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum*, 系统地建立了 θ 函数理论, 成为椭圆函数论的奠基性著作. 早在 1713 年, Bernoulli 就在 *Ars Conjectandi* 中引进

$$\sum_{n=0}^{\infty} m^{n^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} m^{\frac{n(n+1)}{2}}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} m^{\frac{n(n+3)}{2}}$$

等 θ 型函数. 1748 年, Euler 在他的《无穷分析引论》中研究分拆函数时引进 $\prod\limits_{n=0}^{\infty}(1-q^n\zeta)^{-1}$, 之后又出现在 Fourier 的《热的解析理论》中. 但只有 Jacobi 建立了 θ 函数和椭圆函数的联系, 用 θ 表示椭圆函数, 然后由椭圆函数得出 θ 函数的无穷乘积表示, 推出它的性质、变换和满足的微分方程, 并应用到数论等学科中.

(3) 第三部分来自分析学和数论中有基础理论和应用价值的 Gamma 函数和 Riemann ζ 函数, 及其与之存在广泛联系的 Bernoulli 多项式和 Euler 多项式等.

由于 Gamma 函数在特殊函数论中的基础重要性, 几乎所有的特殊函数论的专著和教材都从 Euler 积分定义的 Gamma 函数开始. 它具备了丰富和优美的特性, 在数学的许多分支以及物理、工程等学科中都起着不可或缺的重要作用. 它的重要性和丰富性集聚了几个世纪以来最优秀的数学家的智慧, 如 Wallis(1616~1703)、Bernoulli(1700~1782)、Euler(1707~1783)、Goldbach(1690~1764)、Gauss(1777~1855)、Ramanujan(1887~1920) 等. 数学家的共同努力使得 Gamma 函数已经成为高度发展了的系统理论, 而 Riemann ζ 函数更是数论中的核心课题.

研究特殊函数论的经典工具是解析函数论和微分方程理论等分析理论, 主要是由 Newton、Leibniz、Euler、Fourier、Gauss、Legendre、Kummer、Jacobi、Wererstrass、Abel、Ramanujan 等伟大数学家在理论和应用研究中所创立起来的. 近几十年来, 代数组合、半单李群、群表示论等代数工具也被用来研究特殊函数, 并且和量

子理论、积分系统等产生了密切关系.

19 世纪中叶, Heine 首次对超几何级数的 q-模拟-基本超几何级数 (q-超几何级数) 进行了系统的研究. 他得到了与 ${}_2F_1$ 平行的基本超几何级数 ${}_2\phi_1$ 的系统的理论, 推广了 Gauss 求和公式、二项式定理以及有关幂级数, Gamma 函数等经典特殊函数及其 q-模拟. q-特殊函数理论与量子代数表示论有着密切关系[1].

从 1952 年 Hardy、Littlewood 和 Polya 的著作*Inequalities* 由 Cambridge University Press 出版以来, 数学不等式理论及其应用研究正式成为主流数学方向之一, 成为一门新兴的数学学科, 发展成为一套系统的科学理论. 著名分析学家 Mitrinovic 在文献 [2] 的序言中说: "所有分析学家要花费一半的时间通过文献查找他们想要用而又不能证明的不等式". 分析学家 Mitrinovic 在文献 [3] 也讲到: "有时我有这样的感觉, 数学 (特别是分析学) 就是不等式." 不等式理论已在数学及应用学科中具有重要价值, 甚至一套数学理论往往最终归结为一个不同寻常的不等式. 例如, Minkowski 不等式是建立 L^p 空间理论的基本工具. 与不等式密切相关的均值理论在数学中也占有很重要的地位, 因为许多数学概念往往是某种平均值, 如微分方程、泛函分析中的范数, 模往往就是某种特殊的平均. 20 世纪 70 年代以来, 国际上每四年召开一次一般不等式 (general inequalities) 国际学术会议, 形成很大的影响, 促进了数学不等式学科的发展. 数学不等式理论及其应用是新的数学知识增长点, 它已在世界范围内引起高度重视和广泛兴趣, 得到突飞猛进的发展. 在国内已经形成一定影响的是匡继昌教授[4] 的专著《常用不等式》等.

总体来说, 从 20 世纪 20 年代起, 特殊函数的系统研究在美国和欧洲等国家兴起, 拥有广泛的研究群体, 其中不乏相当有影响的数学家, 并且取得了非常丰富的成果. 由 Whittaker 和 Watson 在 1902 年主编 (再版 4 次, 重印 7 次) 的著作*A Course of Modern Analysis* 系统总结了 20 世纪前出现的各类重要超越函数的研究方法、性质及应用[5]. 这部不朽的著作对特殊函数论的研究产生了相当深远的影响. Whittaker 的学生 Bateman 在地球物理、近代应用数学等方面作出的贡献赢得了国际学术界很高的声誉. 他曾计划写一本网罗当时所有特殊函数的巨著, 可惜没有完成就逝世了. 为了纪念这位卓越的学者并使他的著作能为广大学术界和技术界服务, 在加州工学院和美国海军研究实验室的支持下, 由 Erdelyi 教授为首的 Bateman 遗稿编辑部于 1953 年整理出版了*Higher Transcendental Functions* 三卷本, 对各类重要函数的理论和应用作了简明而系统的阐述, 是一部特殊函数论领域的"牛津大字典"[6]. 1999 年, 由 Andrews、Askey、Roy 等联合主编出版的 *Special Functions* 则侧重超几何函数及相关超几何级数的变换和计算等理论, 也是特殊函数论研究的蓝本[7]. 还有很多正交多项式和基本超几何函数方面的经典专著及成果. 国际上几乎每年都有关于渐近分析与特殊函数方面的专题学术会议. 在国内, 由北京大学王竹溪和郭敦仁教授[8] 撰写出版的《特殊函数概论》一书影响颇大, 也被翻译成英文

版并再版多次.

特殊函数论在渐近分析、数论、组合论、微分方程、数值计算、数学物理、电磁场等领域有广泛而重要的应用. 特别是在 19 世纪, 代数函数论处于数学的中心地位, 几乎成为了衡量数学家成就的试金石. Jacobi、Klein、Poincare 等伟大数学家都是因为在这个领域的突出成就而闻名. Riemann 和 Weierstrass 更是因为他们对 Abel 函数的研究工作而获得他们的名声和职位[9].

特殊函数的完全单调以及对数完全单调在解析函数理论、概率论[10]、凸分析、数值分析[11]、物理[12]、不等式理论等领域取得广泛和重要的应用.

因此, 本书选择特殊函数作为研究课题具有坚实的理论和应用背景, 并且有重要的理论意义和应用价值.

1.2　国内外研究综述

经典椭圆函数的模拟与推广源于 Ramanujan, 他给出了三种不同基 q 的很多公式, 但没有细节证明[13]. 1916 年, Fricke 也独立地发展了椭圆函数的推广. 重要的进展是 Borwein 和 Borwein[14, 15] 从 Gauss 的 AGM 迭代出发, 模拟得到三次椭圆函数. Ramanujan 的大部分公式的系统研究和分析是由 Berndt、Bhargava 和 Garvan[16] 完成的. Chan[17]、Shen[18]、Liu 等[19-24] 很多学者沿着模形式理论、Hecke 理论、自守形式等不同路线, 从不同角度讨论了 Ramanujan 的椭圆函数论及模拟, 丰富了椭圆函数论的研究.

完全单调的概念源于德国数学家 Hausdorff[25] 于 1921 年研究矩问题 (moment problem) 时提出的完全单调序列. 之后, 俄国的 Bernstein 和美国的 Widder 研究推广并证明了具有奠基意义的 Beirnstein-Widder 定理, 指出了完全单调函数可以表示为测度的 Laplace 变换, 即完全单调函数是正测度的 Laplace 变换. 2004 年, Qi 等重新发现“对数完全单调函数”的概念, 它具有这样的性质: Stieltjies 变换之集合是对数完全单调函数之集合的子空间, 对数完全单调函数之集合是完全单调函数之集合的子空间[26]. Widder 阐述了很多完全单调函数的性质和特点[27]. Feller 讨论了完全单调与概率统计中定义 Levy 过程的无限可分测度之间的关系[10]. 丹麦的 Berg 等指出, 对数完全单调函数还可以刻画为无限可分的完全单调函数[28]. MathSciNet 显示自 1932 年起, 特别是 2006 年后, Polygamma 及相关函数引起很多研究者的兴趣, 研究特殊函数完全单调理论及其应用的学者越来越多[31−37]. 例如, 德国的 Alzer, 丹麦的 Berg, 美国的 Anderson、Ismail、Neuman, 加拿大的 Lorch、Muldoon 和 Srivastava, 国内的 Qi、Qiu 等. 数学家改进和推广了已有的许多结论, 获得了很多有趣的新的性质和不等式, Gamma 函数与 Polygamma 函数的完全单调等结论也被应用到概率论等学科中. Alzer 等数学家用 Polygamma 函数也建立了很多涉

及经典特殊函数函数的逼近和重要不等式. “考虑到完全单调函数的重要性 …… 研究和揭示更多函数的完全单调应该是有趣和必要的”[34].

特殊函数与渐近分析源于 18 世纪早期. Stirling[38] 首先发现了 Gamma 函数的渐近展开:

$$\Gamma(x)=\mathrm{e}^{-x}x^{x-\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{1}{2}}\left[1+\frac{1}{12x}+\frac{1}{288x^2}-\frac{139}{51840x^3}-\frac{571}{2488320x^4}+O\left(\frac{1}{x^5}\right)\right]$$

1732 年, Euler 发现了 Euler-Maclaurin 公式, 于 1736 年把公式写信告诉给 Stirling, 但 Stirling 称自己的公式已作为特例包含在内并告诉 Euler, 此时 Maclaurin 已经发现了这个更一般的公式. 1738 年 Euler 发表了他的公式. 从 18, 19 世纪开始, 在 Euler、Laplace、Fourier、Poincare 等数学家的努力下, 渐近分析与特殊函数有了很大的发展. 20 世纪很长一段时间内, 数学家更喜欢抽象的数学研究, 但 Ramanujan 例外. Ramanujan 于 1911~1919 年在印度数学会会刊上提出很多涉及发散级数、渐近逼近等问题. 1999 年, Berndt 等[39] 搜集并整理了 Ramanujan 的几乎所有问题. 20 世纪末, 由于在数论、微分方程、概率论等数学诸领域以及在理论物理、力学等非数学领域的广泛应用, 渐近分析与特殊函数的研究又开始有了复兴趋势.

均值概念和方法在数学理论中扮演着基础作用, 它与特殊函数论也有着密切关系. Gauss 超几何函数与均值有着密切的关系. 1799 年, Gauss 利用算术几何平均 (AG mean, AGM) 迭代构造了一个数列, 证明此数列极限存在并得到著名的恒等式:

$$\mathrm{AG}(1,r)=\frac{1}{{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;1-r^2\right)} \tag{1.2.1}$$

开创了椭圆函数论的起源. 20 世纪, Borwein 兄弟推广 Gauss 的思想, 把算术几何平均迭代用在 π 的逼近算法和计算复杂性理论中[14], 又把 AGM 应用到 Jacobi 恒等式的三次模拟等领域[15]. 1938 年, Gini(1883~1965) 引进一类均值; 1965 年起, Carlson 先后研究了超几何平均[40] 与超几何函数不等式[41], 并且建立了与椭圆积分、Gauss 和 Kummer 超几何函数之间的联系. 1975 年, Stolarsky 在推广对数平均时提出另一个重要的双参量均值. Lehmer[42] 指出 $G_{(s,s-1)}(x,y)$ 和 $E_{(r,2r)}(x,y)$ 共有的均值仅有算术平均、几何平均、调和平均. 他的证明中采用 $G_{(s,s-1)}(1,1-t)$ 关于 t 的 Maclaurin 级数展开. 1984 年, Gould 和 Mays[43] 指出这两类均值之间的“强模拟”性, 并用同样的方法和思路推广证明得到 $G_{(s,s-1)}(x,y)$ 和 $E_{(r,s)}(x,y)$ 共同包含的均值也是三类经典的均值, 且它们都是关于参变量递增的函数. 他们的工作使得均值在更广的领域发挥了作用.

1.3 结构导引

本书核心内容主要分为以下五个方面.

(1) 介绍已经很少提及但是非常有用的 Plana 求和公式, 首先重新给出一个简单的公式证明. 然后利用 Plana 求和公式, 将借助合流超几何函数给出 Hurwitz-Lerch Zeta 函数的积分表示, 并证明 Hurwitz-Zeta 函数与 Riemann-Zeta 函数的函数方程是等价性的. 最后讨论 Kubert 函数的乘积公式及其应用.

(2) 从新的角度讨论和揭示超几何函数 ${}_2F_1\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3};1;z\right)$ 与经典椭圆函数和模形式中的 Eisenstein 级数之间的关系. 首先, 从微分方程和共形映射理论的角度, 基于 ${}_2F_1\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3};1;z\right)$ 重新构建椭圆函数的三次模拟并得到很多有趣的性质. 其次, 由 Jacobi Theta 函数构造新的椭圆函数, 重新证明一个恒等式, 并利用此恒等式得到 Theta 函数对数导数的有趣的结论.

(3) 讨论 Polygamma 函数及其相关函数的完全单调性, 改进和加强已有的一些结论, 并建立一些新的不等式. 首先, 基于 Stirling、Ramanujan 等数学家对于阶乘函数的对数逼近的理论和方法的分析, 受文献 [44] 的启示, 本书将加强 Polygamma 函数的双向不等式并且推广 Digamma 函数不等式到 Polygamma 的情形, 以提供更好更强的逼近并获得几个有趣的不等式. 其次, 在文献 [45]~[47] 的启发下, 利用综合分析法, 提供一个比式 (5.2.15) 更简单的证明和更好的下界, 并且给对应函数一个双向有理函数逼近, 得到一个简单的上界, 进而证明相关函数的完全单调性. 最后, 讨论 Trigamma 的 q-模拟及其完全单调性.

(4) 讨论几类超越函数的逼近问题. 由 Ramanujan 在印度数学会会刊上提出的关于 Gamma 函数和指数函数的两个逼近问题, 由 Carlson 研究不完全椭圆积分的逼近时产生的问题以及相关的不等式的改进, 本书将根据问题特征构造特殊的辅助函数, 应用构造性分析的方法研究其解析性质, 给出特殊函数的逼近并改进和加强相关的不等式, 分析比较其结果和应用. 首先, 考虑 Ramanujan 关于 Gamma 函数的双向逼近不等式. 受文献 [48] 和 [49] 的启发, 构造一个新的辅助函数, 综合利用解析函数技巧, 研究其分析性质, 改进和加强双向不等式 (6.1.13), 提高不等式的界并且推广到一般情况. 其次, 借鉴 Ramanujan 关于指数函数余项估计的研究思路, 考虑 Becker-Stark 对正切函数的有理函数逼近. 受文献 [50]、[51] 中采用的思路和方法的启发, 分析和比较了文献 [50] 和 [52] 中对于函数 $\frac{\tan x}{x}$ 的逼近分析, 改进了文献 [50] 中的证明. 最后, 考虑 Carlson 关于反余弦函数的双向逼近. 受文献

[53]、[54] 的启发, 构造一个含有两个参量的特殊函数, 研究并讨论其解析性质, 推广 Carlson 型双向不等式到更一般的情形. 作为特例, 改进和加强了 Carlson 不等式, 并确定了其最好可能的界.

(5) 关注 Gini 均值, 它是多参量均值中一类重要的均值, 包含幂平均等经典平均作为特例. 文献 [55] 和 [56] 给出了 Gini 均值的一些重要性质. 受文献 [57] 的启发, 提供了不同的视角重新简洁明了地证明 Gini 均值单调性和对数凸性, 利用这些性质可直接得到 Hermite-Hadamard 型的 Gini 均值不等式[58]. 进而, 推广双参量 Gini 均值到三个参量并得到了很多新的有趣的性质, 包含文献 [59] 等单参量和双参量的结论作为特例.

1.4 相关概念

1. 完全单调概念及性质

为了方便后续讨论, 先给出一些基本概念、性质和结论.

定义 1.1[27,60] 函数 f 被称为区间 I 上的完全单调函数, 如果 f 在区间 I 上的各阶导数满足对任意 $x \in I$ 且 $n \geqslant 0$, 有

$$(-1)^n f^{(n)}(x) \geqslant 0 \tag{1.4.1}$$

定理 1.1 (Bernstein-Widder 定理) 函数 f 是 $[0,\infty)$ 上的完全单调函数当且仅当

$$f(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-xs}\,\mathrm{d}\mu(s) \tag{1.4.2}$$

对于所有 $x > 0$ 都是收敛的. 其中, μ 是 $[0,\infty)$ 上的有限非负 Borel 测度且满足式 (1.4.2). 这就意味着 $(0,\infty)$ 上的完全单调函数 f 是测度 μ 的 Laplace 变换.

在文献 [27] 中, Widder 对此定理的证明简化, 推广了 Hausdorff 关于完全单调序列的证明, 并给出了两个关于完全单调函数常用的性质.

命题 1.1 (1) 非负有限多个完全单调函数的线性组合仍是完全单调函数.

(2) 有限个完全单调函数的乘积仍然是完全单调函数.

完全单调函数的更多的例子和性质及常用判定技巧请参见文献 [61].

定义 1.2[26,62] 对数完全单调函数是指函数 f 在区间 $I(I \subseteq \mathbb{R})$ 上存在各阶导数, 且其对数 $\ln f$ 满足

$$(-1)^k [\ln f(x)]^{(k)} \geqslant 0 \tag{1.4.3}$$

其中, $k \in \mathbb{N}$.

定义 1.3　区间 I 上的 k 阶对数完全单调函数是指函数 f 在 I 上存在各阶导数, 如果对于非负整数 k 有 $[\ln f(x)]^{(k)}$ 是 I 上的完全单调函数, 但是 $[\ln f(x)]^{(k-1)}$ 不是区间 I 上完全单调函数.

注 1　"对数完全单调函数"概念第一次出现在文献 [62], 但没有明确的定义. 之后似乎被数学界忽略. 2004 年, 这个概念被重新发现[26] 且立刻被引用[63] 并引起研究者关注.

定义 1.4　区间 I 上的绝对单调函数 f 是指对于其所有阶导数有

$$f^{(k-1)}(t) \geqslant 0 \tag{1.4.4}$$

其中, $t \in I$ 且 $k \in \mathbb{N}$.

定义 1.5　区间 I 上的 k-阶对数绝对单调函数是指函数 f 存在各阶导数, 如果对于非负整数 k 有 $[\ln f(x)]^{(k)}$ 是绝对单调的, 但是 $[\ln f(x)]^{(k-1)}$ 绝对单调的, 那么就称 f 是在区间 I 上的 k-阶对数绝对单调函数.

定义 1.6　区间 I 上的对数绝对凸函数是指函数 f 存在各阶导数, 满足

$$[\ln f(x)]^{(2k)} \geqslant 0 \tag{1.4.5}$$

其中, $x \in I$ 且 $k \in \mathbb{N}$.

注 2　在文献 [26] 中, 证明所有对数完全单调函数也是完全单调函数, 反之不然. 这个结果被研究和挖掘[30, 64]. 进一步, 在文献 [30] 中, 作者指出, 区间 $(0,\infty)$ 上的对数完全单调函数被作为无限可分的完全单调函数, 而且 $(0,\infty)$ 上所有 Stieltjes 变换是对数完全单调.

2. 一些特殊函数的完全单调

本小节简单介绍几类常见特殊函数的完全单调性的结论作为导引, 说明特殊函数的完全单调讨论的必要性. 2001 年, Miller 和 Samko 利用完全单调函数的积分变换, 得到很多重要特殊函数的完全单调性.

定理 1.2 [61]　(1) 合流超几何函数 (Kummer 函数) ${}_1F_1(a,c;-x)$, $c>a>0$;

(2) Gauss 超几何函数 ${}_2F_1(a,b;c;-x)$, $c>b>0, a>0$;

(3) $J_\nu^2+Y_\nu^2$, 其中 J_ν, Y_ν 是第一类, 第二类 Bessel 函数;

(4) $\mathrm{e}^{\frac{x^2}{4}}D_\mu(x)$, 其中 $D_\mu(x)$ 是抛物柱函数, $\mu<0$;

(5) $x^{-\beta}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}W_{\alpha,\beta}(x)}$, 其中 $W_{\alpha,\beta}(x)$ 是 Wittaker 函数, 当 $\alpha<\beta+\dfrac{1}{2}$ 时是完全单调函数.

下面列举一些书中要用到的常用符号、定义和公式等.

定义 1.7　Pochhammer 升阶乘符号 $(a)_n$:

$$(a)_n = \begin{cases} a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1), & n\in\mathbb{N} \\ 1, & n=0; a\neq 0 \end{cases} \tag{1.4.6}$$

特别地, $(1)_n = n!$.

定义 1.8　q-移位阶乘:

$$(a;q)_n = \begin{cases} (1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1}), & n \in \mathbb{N} \\ 1, & n=0; a \neq 0 \end{cases} \tag{1.4.7}$$

一般地, $(a;q)_\infty = (1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^n)\cdots, |q|<1$.

显然, 有 $(a;q)_n = \dfrac{(a;q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty}$.

1812 年, Gauss 定义经典超几何级数为

$$_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{n!(c)_n} z^n \tag{1.4.8}$$

其中, $c \neq 0,-1,-2,\cdots, |z|<1$.

1846 年, Heine 引进经典基本超几何级数 (q-级数):

$$_2\phi_1(a,b;c;q,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n(b;q)_n}{(q;q)_n(c;q)_n} z^n \tag{1.4.9}$$

其中, $c \neq q^{-n}(n=0,1,2,\cdots), |z|<1, |q|<1$.

显然, 两者的关系为

$$\lim_{q\to 1^-} {}_2\phi_1(q^a,q^b;q^c;q,z) = {}_2F_1(a,b;c;z) \tag{1.4.10}$$

q-二项式定理

$$\frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n} z^n \tag{1.4.11}$$

定义 1.9　Bernoulli 数 $B_k(k=0,1,2,\cdots)$ 由以下函数生成:

$$\frac{t}{\mathrm{e}^t-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!} = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} B_{2j} \frac{x^{2j}}{(2j)!}, \quad |x|<2\pi \tag{1.4.12}$$

前六个 Bernoulli 数分别为

$$B_0 = 1,\quad B_1 = -\frac{1}{2},\quad B_2 = \frac{1}{6},\quad B_4 = -\frac{1}{30},\quad B_6 = \frac{1}{42},\quad B_8 = -\frac{1}{30} \tag{1.4.13}$$

定义 1.10　Bernoulli 多项式 $B_k(x)(k=0,1,2,\cdots)$ 由以下函数生成:

$$\frac{t\mathrm{e}^{xt}}{\mathrm{e}^t-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k(x)}{k!} t^k \tag{1.4.14}$$