文都教育®

高等院校数学经典教材

同步辅导及考研复习用书

线性代数
解题方法技巧归纳

（与同济大学数学系编·六版配套）

⊙毛纲源 编著

▲专题讲解 涵盖重点难点

▲通俗易懂 帮助记忆理解

▲同步学习 深入辅导指点

▲复习迎考 获益效果明显

买书送课：配套精品课程讲解

華中科技大學出版社

http://www.hustp.com

文都教育®

高等院校数学经典教材

同步辅导及考研复习用书

线性代数解题方法技巧归纳

（与同济大学数学系编·六版配套）

◎毛纲源 编著

華中科技大學出版社
http://www.hustp.com

图书在版编目(CIP)数据

线性代数解题方法技巧归纳 /毛纲源编著.—武汉：华中科技大学出版社，2017.2

ISBN 978-7-5680-2600-0

Ⅰ.①线…　Ⅱ.①毛…　Ⅲ.①线性代数-研究生-入学考试-题解　Ⅳ.①O151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 034158 号

线性代数解题方法技巧归纳　　毛纲源　编著

Xianxing Daishu Jieti Fangfa Jiqiao Guina

策划编辑：王汉江
责任编辑：王汉江
特约编辑：陈文峰　李　焕
封面设计：杨　安
责任监印：周治超
出版发行：华中科技大学出版社(中国·武汉)　　电话：(027)81321913
武汉市东湖新技术开发区华工科技园　　邮编：430223
录　　排：世纪文都教育科技集团股份有限公司
印　　刷：北京市兴城福利印刷厂
开　　本：787mm×960mm　1/16
印　　张：28.75
字　　数：527 千字
版　　次：2017 年 2 月第 1 版第 1 次印刷
定　　价：48.00 元

郑重声明

买正版图书　听精品课程

毛纲源编著的《高等数学解题方法技巧归纳(上册)》《高等数学解题方法技巧归纳(下册)》《线性代数解题方法技巧归纳》《概率论与数理统计解题方法技巧归纳》等系列图书因其通俗易懂、解题方法技巧独特而深受广大考生欢迎。

但当前某些机构和个人非法盗印毛纲源老师的图书,这类图书印制质量差,错误百出,不仅使考生蒙受金钱与精力的损失,而且误导考生,甚至毁掉考生的研究生考试前程。

为了保障考生、作者及出版社等多方的利益,文都教育特发如下郑重声明:

1. 对制作、销售盗版图书的网店、个人,一经发现,文都教育将严厉追究其法律责任;

2. 凡文都图书代理商、合作单位参与制作、销售盗版图书的,立即取消其代理、合作资格,并依法追究其法律和相关经济责任;

3. 对为打击盗版图书提供重要线索、证据者,文都图书事业部将给予奖励;若举报者为参加考研的考生,文都图书事业部将免费提供考研图书资料和考前预测试卷;

4. 全国各地举报电话:010－88820419,13488713672
电子邮箱:tousu@ wendu. com

为方便考生使用考研数学系列正版图书,特提供网上增值服务,考生登录文都教育在线(www. wendu. com)可听取文都名师精品课程。

华中科技大学出版社
世纪文都教育科技集团股份有限公司
授权律师:北京市安诺律师事务所
刘　岩
2017年2月

前　言

本书自出版以来，一直受到广大读者的厚爱，多次重印，畅销全国．对于广大读者的支持和关心，在此表示深切感谢．根据读者对本书的使用情况及其意见反馈，特作进一步的修改．为突出重点和难点，对其内容进行了调整、充实和删改，但保持全书原有的特色：按问题分类，通过引例，剖析各类题目的解题思路，归纳、总结其解题方法和技巧．

本书例题丰富而又典型，类型广、梯度大，通俗易懂，便于自学．此外，不少例题还给出了一题多解，从多角度详细分析，深入浅出地进行讲解，希望收到举一反三、化难为易的效果．

本书对同济大学数学系编的《线性代数》(第六版)中较难解的典型习题和历届全国硕士研究生入学考试数学试卷一、二中的试题，都作了详细的解答，供学习线性代数和备考硕士研究生的读者阅读、参考．如需查找同济大学数学系编的《线性代数》(第六版)中的习题解答，请参考书末附录．

【体例说明】　例 1[1.2(2),(5)]表示该例是同济大学数学系编的《线性代数》(第六版)中习题一第 2 题的第 2、第 5 小题．例 2[2010 年 1]表示该例是 2010 年全国硕士研究生入学考试数学试卷一的试题．

通过对本书的学习，有助于加强对线性代数基本内容的理解和掌握，提高读者分析问题和解决问题的能力．另外，准备考研的朋友，可选用本人编写、华中科技大学出版社出版的一套考研书籍：

◎考研数学常考题型解题方法技巧归纳(数学一)

◎考研数学常考题型解题方法技巧归纳(数学二)

◎考研数学常考题型解题方法技巧归纳(数学三)

◎考研数学历年真题分题型详解(数学一)

◎考研数学历年真题分题型详解(数学二)

◎考研数学历年真题分题型详解(数学三)

由于水平有限，书中难免有不妥之处，恳请同行、读者批评指正．

毛纲源
2017 年 2 月

目　录

第1章 行列式计算

1.1 如何用定义计算行列式及其部分项

1. 排列逆序数的算法

任一 n 元排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 可用下述两种方法计算.

$$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) = i_1 \text{ 后面比 } i_1 \text{ 小的数的个数} + i_2 \text{ 后面比 } i_2 \text{ 小的数的个数} + \cdots + i_{n-1} \text{ 后面比 } i_{n-1} \text{ 小的数的个数};$$

或 $$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) = i_1 \text{ 前面比 } i_1 \text{ 大的数的个数} + i_2 \text{ 前面比 } i_2 \text{ 大的数的个数} + \cdots + i_{n-1} \text{ 前面比 } i_{n-1} \text{ 大的数的个数}.$$

例 1[1.2(2),(5)]* 按自然数从小到大为标准次序,求下列各排列的逆序数:(1) 4 1 3 2;(2) 1 3 … $(2n-1)$ 2 4 … $(2n)$.

解 (1) **解一** 4 后面比 4 小的数有 3 个,1 后面没有比它小的数,3 后面比它小的数只有 1 个,故 $\tau(4\ 1\ 3\ 2) = 3+0+1+0 = 4$.

解二 4 前面比 4 大的数没有,1 前面比 1 大的数只有 1 个,3 前面比 3 大的数只有 1 个,2 前面比 2 大的数有 2 个,因而

$$\tau(4\ 1\ 3\ 2) = 0+1+1+2 = 4.$$

(2) 该排列中的前 n 个数 $1,3,5,\cdots,2n-1$ 之间不构成逆序,后 n 个数 $2,4,6,\cdots,2n$ 之间也不构成逆序,只有前 n 个数与后 n 个数之间才构成逆序.显然 1 后面没有比它小的数,3 后面仅有一个数 2 比 3 小;5 后面仅有 2 个数 2,4 比 5 小;…;$2n-1$ 后面比它小的数有 $n-1$ 个,即 $2,4,6,\cdots,2n-2$;因而 $\tau[1\ 3 \cdots (2n-1)\ 2\ 4 \cdots (2n)] = 0+1+2+\cdots+(n-1) = n(n-1)/2$.

例 2 求 n 元排列 $n(n-1)\cdots 2\ 1$ 的逆序数,并确定它们的奇偶性.

解 $\tau[n(n-1)(n-2)\cdots 21] = (n-1)+(n-2)+\cdots+2+1 = n(n-1)/2$. 由于 $n(n-1)/2$ 的奇偶性与 n 的取值有关,故应作如下讨论:

当 $n=4k$ 时,$n(n-1)/2 = 2k(4k-1)$ 为偶数;

当 $n=4k+1$ 时,$n(n-1)/2 = 2k(4k+1)$ 为偶数;

当 $n=4k+2$ 时,$n(n-1)/2 = (2k+1)(4k+1)$ 为奇数;

当 $n=4k+3$ 时,$n(n-1)/2 = (2k+1)(4k+3)$ 为奇数.

---

* [1.2(2),(5)]表示该例(或习题)是同济大学数学系编《线性代数》(第六版)中习题一第 2 题的第 2、第 5 小题.下同.

综上所述，当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时，此排列为偶排列；当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3$ 时，此排列为奇排列，其中 k 为任意非负整数.

例 3　选择 i 和 k 使 9 元排列 $1274i56k9$ 为偶排列.

解　显然 i 与 k 只能取 3 和 8 两个数. 若取 $i=3,k=8$，由于排列的逆序数为 $\tau(1\ 2\ 7\ 4\ 3\ 5\ 6\ 8\ 9)=0+0+4+1+0+0+0+0+0=5$，故该排列为奇排列. 因对换改变排列的奇偶性，故取 $i=8,k=3$ 时的排列 1 2 7 4 8 5 6 3 9 为偶排列.

例 4[1.7]　设 n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$（元素为 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 的 n 阶行列式也可记作 $D=\det(a_{ij})$），把 D 上下翻转、或逆时针旋转 $90°$、或依副对角线翻转，依次得

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix}.$$

证明 $D_1=D_2=(-1)^{n(n-1)/2}D, D_3=D$.

证　(1) 先计算 D_1. 为此通过行的交换将 D_1 变换成 D，从而找出 D_1 与 D 的关系.

D_1 的最后一行是 D 的第 1 行，把它依次与前面的行变换，直至换到第 1 行，共进行 $n-1$ 次行的交换. 这时新行列式的最后一行是 D 的第 2 行，把它依次与前面的行交换，直至换到第 2 行，共进行 $n-2$ 次行的变换……直到最后一行是 D 的第 $n-1$ 行，只需经过一次行的交换即可将其换到第 $n-1$ 行，这样就把 D_1 经行的交换变为 D，共进行

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+3+2+1=n(n-1)/2$$

次行的交换，故 $D_1=(-1)^{n(n-1)/2}D$.

(2) 为理解将 D 逆时针旋转 $90°$ 的结果，先以三阶行列式为例说明 D 经过逆时针旋转 $90°$ 后的结果，即

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{旋转 }90°]{\text{经逆时针}} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} \end{vmatrix}=\widetilde{\Delta}_3.$$

逆时针旋转 $90°$ 后所得的行列式 $\widetilde{\Delta}_3$ 的第 1 行、第 2 行、第 3 行恰好是 Δ_3 的第 3 列、第 2 列、第 1 列.

一般情况也是如此，逆时针旋转 $90°$ 后所得行列式 D_2 的第 $1,2,\cdots,n$ 行分别为原行列式 D 的第 $n,n-1,\cdots,1$ 列. 若把 D_2 再上下翻转得 $\widetilde{D}_2$，则 $\widetilde{D}_2$ 的第 $1,2,\cdots,n$ 行依次是 D 的第 $1,2,\cdots,n$ 列，即 $\widetilde{D}_2=D^{\mathrm{T}}$. 于是由(1)得

$$D_2=(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)n}\widetilde{D}_2=(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)n}D.$$

(3) 注意到若把 D_3 逆时针旋转 $90°$ 得 $\widetilde{D}_3$，则 $\widetilde{D}_3$ 的第 $1,2,\cdots,n$ 列恰好是 D

的第 $n,n-1,\cdots,1$ 列，于是再把 $\widetilde{D}_3$ 左右翻转（其结果与上下翻转一样）就得到 D. 于是由(1)，(2)得到

$$D_3=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\widetilde{D}_3=D.$$

注意 上例的结论要理解，记住. 即对行列式 D 作转置、依副对角线翻转、旋转 180° 所得行列式不变，但作上下、左右翻转，逆（顺）时针旋转 90° 所得行列式为 $(-1)^{n(n-1)/2}D$.

尤其是对行列式作上下、左右翻转时经常用到上述结论. 特用命题表述如下.

命题 1.1.1 设 n 阶行列式 $D_n=|a_{ij}|_{n\times n}$，将 D_n 上下或左右翻转，依次得到

$$D_n^{(1)}=\begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix},\quad D_n^{(2)}=\begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{11} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nn} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix},$$

则 $\quad D_n^{(1)}=(-1)^{n(n-1)/2}D_n,\quad D_n^{(2)}=(-1)^{n(n-1)/2}D_n.$

2. 行列式展开式中某项所带符号的确定方法

调换项中元素位置，使每项所对应的行下标（即第一个下标）为自然排列，然后求其列下标所组成的排列的逆序数. 根据行列式定义，由其奇偶性确定该项所带符号.

或者直接分别计算该项行下标和列下标所组成的排列的逆序数，由这两个逆序数之和的奇偶性，确定该项所带符号。

例 5 在六阶行列式 $D_6=|a_{ij}|_{6\times 6}$ 中证明 $a_{51}a_{32}a_{13}a_{44}a_{65}a_{26}$ 是 D_6 中的一项，并求这项应带的符号.

解 调换项中元素位置，使其行下标为自然排列，得到

$$a_{51}a_{32}a_{13}a_{44}a_{65}a_{26}=a_{13}a_{26}a_{32}a_{44}a_{51}a_{65}.$$

此时右端的行下标排列为自然排列，列下标排列为 362415，为 6 元排列. 因而右端是位于 D_6 的不同行、不同列的 6 个元素的乘积，故它是 D_6 的一项.

该项所带符号既可由右端列下标排列的逆序数的奇偶性，也可由左端行下标排列与列下标排列的逆序数之和的奇偶性确定.

因 $\tau(362415)=8$ 或 $\tau(531462)+\tau(123456)=8+0=8$，故所给项应带正号.

3. 用定义计算行列式的方法

对于含零元素较多的行列式用定义计算较简便. 因行列式的项中有一因数为零时，该项的值为零，故只需求出所有非零项即可. 如何求出呢? 常用下述两法.

法一 求出位于不同行、不同列的非零元素乘积的所有项.

当行列式含大量零元素，尤其是行列式的非零元素乘积项只有不多的几项

时，用此法计算比较简便.

例 6 用行列式定义计算

$$D_5=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} \begin{array}{l}(a_{ij}\neq 0;i=k,j=k+1,\\ \qquad k=1,2,3,4;\\ a_{5t}\neq 0,t=1,2,3,4,5).\end{array}$$

解 由行列式定义知，每一非零项由不同行、不同列的 5 个非零元素乘积所组成. 第 1 行的非零元素只有 a_{12}，它位于第 2 列，于是该项第 2 行的非零元素不能在第 2 列，那只有 a_{23}. 同法可求第 3,4 两行中不同行、不同列的非零元素只能取 a_{34}，a_{45}. 第 5 行虽有 5 个非零元素，但与前面 4 个元素不同列的只有 a_{51}，于是该项 5 个非零元素的乘积为 $a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}a_{51}$.

再确定该项所带符号. 由于行下标已按自然顺序排列，而列下标的排列为 2 3 4 5 1，且该排列的逆序数 $\tau(2\ 3\ 4\ 5\ 1)=4$，故带正号. 因除这一项外，其他不同行、不同列的元素乘积全等于零，所以 $D_5=a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}a_{51}$.

注意 用上法求非零元素乘积项时，不一定从第 1 行开始，哪一行的非零元素最少(最好只有一个)就从哪一行开始，例如可以从最后一行开始计算习题1.1 第 3(1)题.

例 7 一个 n 阶行列式中等于零的元素个数如果比 n^2-n 多，则此行列式等于零.

解 根据行列式定义，该行列式展开后都是 n 个元素相乘，而 n 阶行列式中共有 n^2 个元素，若等于零的元素个数大于 n^2-n，那么不等于零的元素个数就会小于 $n^2-(n^2-n)=n$ 个，因而该行列式的每项都至少含一个零元素，所以每项必等于零，故此行列式等于零.

法二 求出非零元素乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的列下标 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 的所有 n 元排列，即可求出行列式的所有非零项.

根据 n 阶行列式的定义

$$|a_{ij}|_{n\times n}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n} \quad (1.1.1)$$

可知，非零项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的列下标 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 的 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 有多少个，相应的该行列式就含多少个非零项；如果一个也没有，则不含非零项，行列式等于零，这里 $\sum\limits_{j_1\cdots j_n}$ 表示对数码 $1,2,\cdots,n$ 的所有 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和.

为求出非零项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的列下标 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 的所有 n 元排列，先由第 1 行的非零元素及其位置写出 j_1 可能取的数码；再由第 $2,3,\cdots,n$ 行的非零元素及其位置分别写出 $j_2,j_3,\cdots,j_n$ 可能取的数码. 在所有可能取的数码中，求出 j_1，$j_2,\cdots,j_n$ 的所有 n 元排列.

例 8 用定义计算 $D_4=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ a_2 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & d_2 \end{vmatrix}$ $(a_i,b_i,c_i,d_i\neq 0,i=1,2)$.

解 设 $D_4=|a_{ij}|_{4\times 4}$，则 D_4 中第 1 行的非零元素为 $a_{11}=a_1$，$a_{13}=b_1$，故 $j_1=1,3$. 同法可求：$j_2=2,4$；$j_3=1,3$；$j_4=2,4$. 因 j_1,j_2,j_3,j_4 能组成四个 4 元排列：

$$1\ 2\ 3\ 4;\quad 1\ 4\ 3\ 2;\quad 3\ 2\ 1\ 4;\quad 3\ 4\ 1\ 2,$$

故 D_4 中相应的非零项共有四项，它们分别为

$$(-1)^{\tau(1\,2\,3\,4)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=a_1\,c_1\,b_2\,d_2,$$
$$(-1)^{\tau(1\,4\,3\,2)}a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}=-a_1\,d_1\,b_2\,c_2,$$
$$(-1)^{\tau(3\,2\,1\,4)}a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}=-b_1\,c_1\,a_2\,d_2,$$
$$(-1)^{\tau(3\,4\,1\,2)}a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}=b_1\,d_1\,a_2\,c_2,$$

其代数和即为 D_4 的值，整理后得

$$D_4=(a_1b_2-a_2b_1)(c_1d_2-c_2d_1).$$

例 9 设在五阶行列式中 $a_{12}=0$，问展开式中为零的项至少有多少个？

解 因在五阶行列式 $D_5=|a_{ij}|_{5\times 5}$ 的展开式中含 a_{12} 的项为

$$a_{12}\ a_{2j_2}\ a_{3j_3}\ a_{4j_4}\ a_{5j_5},$$

其中 $j_2j_3j_4j_5$ 是 1,3,4,5 的一个排列，共有 4! =24 个，故至少有 24 项为零.

例 10 用定义计算 $D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1985 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1986 \end{vmatrix}$.

解 为求 D 的值，只需求出 D 中所有非零项.

D 中第 1 行的非零元素只有 $a_{1,1985}$，因而 j_1 只能取 1985，即 $j_1=1985$. 同理 $j_2=1984,j_3=1983,\cdots,j_{1985}=1,j_{1986}=1986$，于是 $j_1,j_2,\cdots,j_{1985},j_{1986}$ 在可能取的数码中，$j_1j_2\cdots j_{1985}j_{1986}$ 只能组成一个 1986 元排列：

$$1985\quad 1984\cdots 2\quad 1\quad 1986,$$

故 D 中非零项只有一项，即

$$D=(-1)^{\tau(1985,1984,\cdots,2,1,1986)}a_{1,1985}a_{2,1984}\cdots a_{1985,1}a_{1986,1986}.$$

因 $\tau(1985,1984,\cdots,2,1,1986)=1984+1983+\cdots+2+1=1985\times 992$ 为偶数，故

$$D=(-1)^{1985\times 992}1\times 2\times 3\times\cdots\times 1985\times 1986=1986!.$$

例 11 用定义计算行列式 $D_5=\begin{vmatrix}0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35}\\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0\\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0\end{vmatrix}$，其中第 2,3 行及第 2,3 列上的元素都不等于零.

解 由 D_5 中第 1,2,3,4,5 行的非零元素分别得到

$$j_1=2,3;\quad j_2=1,2,3,4,5;\quad j_3=1,2,3,4,5;$$
$$j_4=2,3;\quad j_5=2,3.$$

因 j_1,j_2,j_3,j_4,j_5 在上述可能取的数码中，一个 5 元排列也不能组成，故 $D_5=0$.

注意 一个 n 阶行列式 D 中如果存在某些非零元素 $a_{i_1j_1},a_{i_2j_2},\cdots,a_{i_sj_s}$ $(2\leqslant s\leqslant n)$，其列下标 $j_1,j_2,\cdots,j_s$ 所能取的不同数码个数小于行数 s，则 $D=0$. 这是因为 D 中非零元素的列下标 $j_1,j_2,\cdots,j_s,j_{s+1},\cdots,j_n$ 连一个 n 元排列也不能组成，即 D 中没有 n 个非零元素相乘的项，从而 $D=0$. 例如，在五阶行列式

$$D_5=\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & a_{13} & 0 & 0\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35}\\ a_{41} & 0 & a_{43} & 0 & 0\\ a_{51} & 0 & a_{53} & 0 & 0\end{vmatrix}$$

中，第 1,4,5 行的非零元素的列下标取值为

$$j_1=1,3;\quad j_4=1,3;\quad j_5=1,3.$$

因它们所取的不同数码只有两个(1 与 3)，其个数小于行数($s=3$)，故 $D_5=0$.

上述 $D=0$ 的结论如从 D 中所含零元素个数来看，则可说成：若 n 阶行列式 D 中位于某 s 行 k 列交叉处元素全为 0，且 $s+k>n$，则此行列式 $D=0$.

4. 行列式中含特定元素的所有项的求法

一般用行列式的定义求出.

例 12[1.3] 写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

解 设四阶行列式为 $D_4=|a_{ij}|_{4\times 4}$，D_4 中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的所有项数为四元排列 $13j_3j_4$ 的个数，而 $13j_3j_4$ 能组成的 4 元排列共两个，即 1 3 2 4 与 1 3 4 2，其相应的项分别为

$$(-1)^{\tau(1\,3\,2\,4)}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}=-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44},$$
$$(-1)^{\tau(1\,3\,4\,2)}a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}=a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}.$$

因而,四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项只有上述两项.

例 13　试求 $f(x)$中 x^4 的系数,已知 $f(x)=\begin{vmatrix} -x & 3 & 1 & 3 & 0 \\ x & 3 & 2x & 11 & 4 \\ -1 & x & 0 & 4 & 3x \\ 2 & 21 & 4 & x & 5 \\ 1 & -7x & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

解　$f(x)$中含 x 因子的元素有

$$a_{11}=-x,\quad a_{21}=x,\quad a_{23}=2x,\quad a_{32}=x,$$
$$a_{35}=3x,\quad a_{44}=x,\quad a_{52}=-7x.$$

因而,含有 x 因子的元素 a_{ij_n} 的列下标只能取

$$j_1=1;\quad j_2=1,3;\quad j_3=2,5;\quad j_4=4;\quad j_5=2.$$

于是,含 x^4 的项中元素 a_{ij_n} 的列下标只能取 $j_1=1,j_2=3,j_3=2,j_4=4$ 与 $j_2=1$, $j_3=5,j_4=4,j_5=2$;相应的5元排列只有 1 3 2 4 5,3 1 5 4 2,含 x^4 的相应项为

$$(-1)^{\tau(1\,3\,2\,4\,5)}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}a_{55}=4x^4,\quad (-1)^{\tau(3\,1\,5\,4\,2)}a_{13}a_{21}a_{35}a_{44}a_{52}=21x^4,$$

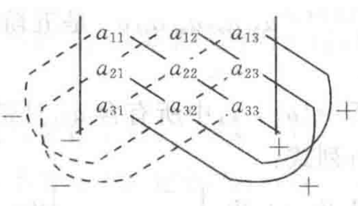
故 $f(x)$中 x^4 的系数为 $21+4=25$.

5. 计算三阶行列式

用行列式的定义式(1.1.1)不难求得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{32}a_{21}$$
$$+a_{22}a_{13}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{33}a_{12}a_{21}. \tag{1.1.2}$$

式(1.1.2)常称为对角线法则.该法则可用下列图示的对角线法记忆.



其中各实线连接的三个元素在主对角线上或在与主对角线平行的实线上,其乘积都是式(1.1.1)右端中带正号的项,各虚线连接的三个元素在次对角线上或在与次对角线平行的虚线上,其乘积都是式(1.1.1)右端中带负号的项.

计算含零元素的三阶行列式可用式(1.1.2)简化计算,因这时式(1.1.2)的右端至少有两项等于零.

例 14[1.1(1),(2)]　利用对角线法则计算下列三阶行列式:

$$(1)\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix};\qquad (2)\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}.$$

解　利用计算三阶行列式的对角线法则,由式(1.1.2)得到

$$(1)\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}=2\times(-4)\times3+1\times1\times8+0\times(-1)\times(-1)$$
$$-1\times(-4)\times(-1)-2\times(-1)\times8-3\times1\times0$$
$$=-24+8-4+16=-4.$$

$$(2)\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}=abc+abc+abc-c^3-b^3-a^3=3abc-a^3-b^3-c^3.$$

例 15　当 x 取何值时,$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}\neq0$.

解　利用计算三阶行列式的对角线法则,由式(1.1.2)得到

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}=3\times x\times x+4\times0\times x+1\times1\times0-x\times x\times1-0\times0\times3-x\times1\times4$$
$$=3x^2-x^2-4x=2x^2-4x=2x(x-2),$$

故当 $x\neq0$ 且 $x\neq2$ 时,所给行列式不等于零.

习　题　1.1

1. 若 $(-1)^{\tau(1\,k\,4\,l\,5)+\tau(1\,2\,3\,4\,5)}a_{11}a_{k2}a_{43}a_{l4}a_{55}$ 是五阶行列式 $|a_{ij}|_{5\times5}$ 的一项,求 k,l 之值及该项所带符号.

2. 写出四阶行列式 $D=|a_{ij}|_{4\times4}$ 中所有含 a_{13} 且带负号的项.

3. 用定义计算下列行列式:

$$(1)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix};\qquad (2)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

4. 求出 $f(x)$ 中 x^4 与 x^3 的系数：$f(x)=\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & x & 3 \\ x & x & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -3x \end{vmatrix}$.

5. 由计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$ 证明奇偶排列各半.

6. [1.1(3),(4)]　利用对角线法则，计算下列三阶行列式：

(1) $\Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$；　(2) $\Delta_2=\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

7. 按定义求下列 n 阶行列式的值：

$$D_n=\begin{vmatrix} n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

8. [1.2(6)]　按自然数从小到大为标准次序，求下列排列的逆序数：

$$1\ 3 \cdots (2n-1)\ (2n)\ (2n-2) \cdots 2.$$

1.2　如何计算一行(列)与另一行(列)的分行(分列)成比例的行列式

为方便起见，以 r_i 表示行列式(或矩阵)的第 i 行，以 c_i 表示其第 i 列，k 为不等于0的常数.

(i) 交换第 i,j 两行(列)，记作 $r_i\leftrightarrow r_j$ $(c_i\leftrightarrow c_j)$.

(ii) 第 i 行(列)乘以 k(不等于0)，记作 kr_i (kc_i).

(iii) 第 j 行(列)乘以 k 加到第 i 行(列)上，记作 r_i+kr_j (c_i+kc_j).

所谓一行(列)与另一行(列)的分行(分列)成比例是指，该行(列)元素与另一行(列)的分行(分列)的对应元素成比例.

一个行列式的第 i 行(列)元素乘以常数 k 加到第 j 行(列)$(i\neq j)$上，消掉第 j 行(列)中的一分行(分列)，下称在第 j 行(列)中去掉与第 i 行(列)成比例的分行(分列)，即