东北师范大学物理函授教材

理 论 力 学

（下 册）

东北师范大学函授教育处

1 9 8 2 . 7 · 长春

目　　录

（下　册）

第四章　转 动 参 照 系

我们知道，牛顿运动方程只适用于惯性系。然而，在实际上为方便起见往往需要从非惯性系来研究物体的运动，因而就需要有从非惯性系来描述物体运动规律的运动方程。在普通物理中，我们已解决了从相对惯性系作平动的非惯性系描述质点运动规律的问题。在本章，我们就要解决从相对惯性系作一般运动的非惯性系描述质点运动规律的问题，重点研究从相对惯性系作转动的非惯性系描述质点运动规律的问题。这就是本章的目的。

本章的研究方法与解决平动非惯性系质点的运动规律类同，即先讨论惯性系与非惯性系间质点加速度的关系，然后从惯性系建立牛顿运动方程，最后引入惯性力的概念，从而把牛顿运动方程转化为非惯性系的运动方程。

本章主要内容是：先研究惯性系与非惯性系速度、加速度间之关系，然后讨论非惯性系的质点运动方程，最后讨论几个实际问题。

§4.1　惯性系与非惯性系的速度及加速度

本节要讨论从惯性系和从相对惯性系作一般运动的非惯性系观察同一质点在同一时刻的速度及加速度之间的关系，

并为导出非惯性系质点运动方程作准备。

（一）速　　度

思路：和在第一章中讨论惯性系与平动非惯性系的速度、加速度之间的关系类同，我们从质点在任一时刻相对惯性系及非惯性系的位矢关系出发，按速度、加速度定义进行运算即得。

需要指出的是：在第§1.3中，由于非惯性系只相对惯性系作**平动**，因而非惯性系坐标轴的单位矢量是常矢，它们对时间的导数为零。而现在非惯性系可作**一般运动**，故其坐标轴的单位矢量尽管数值不变，但**方向则可改变**，因而它们对时间的导数一般不为零。

为叙述方便，以下用“s_0系”代表惯性系；用“s系”代表相对惯性系作一般运动的非惯性系。

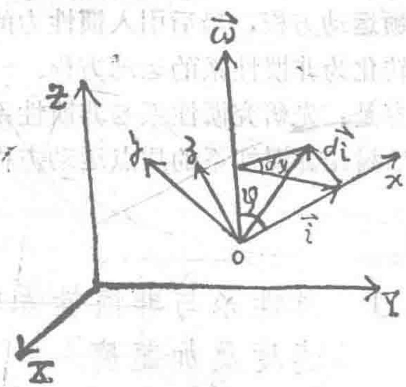

图　4.1.1

先讨论 s 系坐标轴的单位矢量随时间的变化率即对时间

的导数。设 s 系坐标原点为 o，坐标轴之单位矢量分别为 $\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$。由于 s 系相对 s_0 系的一般运动可看成以 o 为代表的平动与绕 o 点转动的合成，故讨论坐标轴单位矢量随时间的变化率只需讨论任一时刻 s 系绕通过 o 之转轴的转动即可。

如图（4.1.1）所示，设 t 时刻 s 系转动角速度为 ω，则由图（4.1.1）可看出：

$$di = i\sin\varphi d\theta$$

故有

$$\frac{di}{dt} = i\sin\varphi\ \frac{d\theta}{dt} = i\sin\varphi\omega$$

而 $\frac{d\mathbf{i}}{dt}$ 的方向则垂直于 $\boldsymbol{\omega}$ 与 $\mathbf{i}$ 所组成之平面，指向由 $\boldsymbol{\omega}$ 转向 $\mathbf{i}$ 之右螺旋方向。写成矢量式便有：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{i}\\ &\frac{d\mathbf{j}}{dt}\boldsymbol{\omega} = \times\mathbf{j},\quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{k}\end{aligned}\right\}\qquad(4.1.1)$$

同理有：

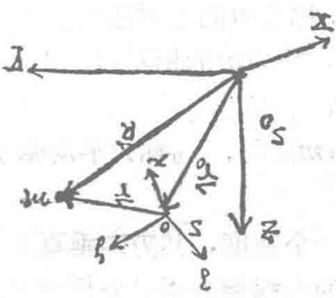

图 4.1.2

现在，我们来讨论 s_0 系与 s 系的速度关系。设 s_0 系坐标轴的单位矢量分别为 $\mathbf{I}$、$\mathbf{J}$、$\mathbf{K}$，由图知，在任一时刻有：

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}$$

这里 $\mathbf{r}_0 = X_0\mathbf{I} + Y_0\mathbf{J} + Z_0K$ 为 S 系坐标原点 o 在 s_0 系中之位矢。$\mathbf{R} = X\mathbf{I} + Y\mathbf{J} + Z\mathbf{K}$、$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ 分别为质点 m 在 s_0 系及 s 系中之位矢。根据速度定义有：

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{R}}{dt}=\frac{d\mathbf{r}_0}{dt}+\frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

因为**I**、**J**、**K**为常矢量，故：

$$\frac{d\mathbf{r}_0}{dt}=\frac{d}{dt}(X_0\mathbf{I}+Y_0\mathbf{J}+Z_0\mathbf{K})=(\dot{X}_0\mathbf{I}+\dot{Y}_0\mathbf{J}+\dot{Z}_0\mathbf{K})$$

$$=\mathbf{v}_0$$

因为**i**、**j**、**k**为变矢量，故由微分运算及(4.1.1)式有：

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{d}{dt}(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})=(\dot{x}\mathbf{i}+\dot{y}\mathbf{j}+\dot{z}\mathbf{k})$$

$$+(x\dot{\mathbf{i}}+y\dot{\mathbf{j}}+z\dot{\mathbf{k}})=$$

$$=\mathbf{v}'+[x(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{i})+y(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{j})+z(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{k})]$$

$$=\mathbf{v}'+\boldsymbol{\omega}\times(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})=\mathbf{v}'+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$$

所以

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_0+\mathbf{v}'+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}=\mathbf{v}'+\mathbf{v}_0+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} \qquad (4.1.2)$$

讨论：

1．(4.1.2) 式中各项之物理含义：

$\mathbf{v}$为质点m相对s_0系之速度，称为m的绝对速度。

$\mathbf{v}'$为质点m相对s系之速度，称为m的相对速度。

$\mathbf{v}_0$为S系之坐标原点O相对s_0系之速度，由于我们把O点视为S系之平动代表点，故对质点m而言，$\mathbf{v}_0$称为平动牵连速度。

$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$：从 (4.1.2)式知也是一个速度，其方向垂直于$\boldsymbol{\omega}$与$\mathbf{r}$所组成之平面，指向由$\boldsymbol{\omega}$到$\mathbf{r}$的右螺旋方向。分析此表达形式知：只要s系相对s_0系存在转动即$\boldsymbol{\omega}\neq 0$，则不论质点是否相对$s$系运动，此项即不为零，除非$\mathbf{r}$与$\boldsymbol{\omega}$同（反）向，即质点位于$s$系之转轴上。因而$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$实质是由于$s$系转动

而引起的附加速度。故对质点m而言，$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$称为转动牵连速度。

设用$\mathbf{v}_t$表牵连速度，且$\mathbf{v}_t=\mathbf{v}_0+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$，则（4.1.2）式可写成：

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}'+\mathbf{v}_t$$

2.（4.1.2）式之物理意义：它表达了从惯性系和非惯性系描述质点运动任一时刻速度间之关系，即：质点m在任一时刻的绝对速度等于相对速度与牵连速度（平动牵连加转动牵连）的矢量和。当s系相对s_0系没有转动即$\boldsymbol{\omega}=0$时，则牵连速度只有平动牵连速度这一部分。当S系相对s_0系没有平动只有转动时，则$\mathbf{v}_0=0$，只有转动牵连速度。

（二）加速度。

现在，我们将（4.1.2）式各项对时间求导，则有：

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d\mathbf{v}'}{dt}+\frac{d\mathbf{v}_0}{dt}+\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$$

因为由导出（4.1.2）式过程知$\mathbf{v}'=(\dot{x}\mathbf{i}+\dot{y}\mathbf{j}+\dot{z}\mathbf{k})$，故：

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{v}'}{dt}&=\frac{d}{dt}(\dot{x}\mathbf{i}+\dot{y}\mathbf{j}+\dot{z}\mathbf{k})=(\ddot{x}\mathbf{i}+\ddot{y}\mathbf{j}+\ddot{z}\mathbf{k})\\&\quad+(\dot{x}\dot{\mathbf{i}}+\dot{y}\dot{\mathbf{j}}+\dot{z}\dot{\mathbf{k}})=\\&=\mathbf{a}'+[\dot{x}(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{i})+\dot{y}(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{j})+\dot{z}(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{k})]\\&=\mathbf{a}'+\boldsymbol{\omega}\times(\dot{x}\mathbf{i}+\dot{y}\mathbf{j}+\dot{z}\mathbf{k})=\\&=\mathbf{a}'+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}'\end{aligned}$$

而

$$\frac{d\mathbf{v}_0}{dt}=\frac{d}{dt}(\dot{X}_0\mathbf{I}+\dot{Y}_0\mathbf{J}+\dot{Z}_0\mathbf{K})=\ddot{X}_0\mathbf{I}+\ddot{Y}_0\mathbf{J}+\ddot{Z}_0\mathbf{K}$$

$$=\mathbf{a}_0$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})=\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\mathbf{r}+\boldsymbol{\omega}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\mathbf{r}$$

$$+\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{v}'+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})=$$

$$=\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\mathbf{r}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}'+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$$

所以

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}'+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}'+\mathbf{a}_0+\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\mathbf{r}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}'+\boldsymbol{\omega}$$

$$\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})=$$

$$=\mathbf{a}'+\mathbf{a}_0+\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\mathbf{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})+2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}' \quad (4.1.3)$$

讨论：

1.（4.1.3）式中各项之物理含义：

$\mathbf{a}$为质点m相对s_0系之加速度，称为m的绝对加速度。

$\mathbf{a}'=(\ddot{x}\mathbf{i}+\ddot{y}\mathbf{j}+\ddot{z}\mathbf{k})$为质点$m$相对$s$系之加速度，称为$m$的相对加速度。

$\mathbf{a}_0=\ddot{X}_0\mathbf{I}+\ddot{Y}_0\mathbf{J}+\ddot{Z}\mathbf{K}$为$s$系之坐标原点相对$s_0$系运动之加速度。与$\mathbf{v}_0$同样看法，由于$o$点被看作是$s$系之平动代表点，故对质点$m$而言，$\mathbf{a}_0$称为平动牵连加速度。

$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\mathbf{r}$：由于$\mathbf{r}$一般不为零，且一般不与$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$平行，故此项是由于$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\neq 0$即$s$系的变速转动而引起的。因而这是一项牵连加速度，可称之为变转速牵连加速度。

$\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$：可以看出，不论质点$m$相对$s$系是否运

动，只要 s 系有转动，则此项便不为零。因而这也是一项牵连加速度，可称之为转动牵连加速度。其方向由图4.1.3可看出是垂直并指向转动轴的，其值为$\omega^2 Q$。此项也可称为向轴牵连加速度（也有称法向牵连加速度）。

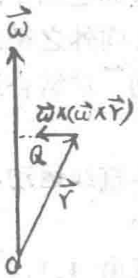

图 4.1.3

$2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}'$：此项加速度则是由非惯性系的转动与质点相对非惯性系的运动以矢乘的方式相互“作用”而共同引起的。因而它不是牵连加速度，我们称为科里奥利加速度，简称为科氏加速度，并以$\mathbf{a}_c$表之。它的方向垂直于$\boldsymbol{\omega}$与$\mathbf{v}'$组成的平面，指向由$\boldsymbol{\omega}$到$\mathbf{v}'$的右螺旋方向。当$\mathbf{v}'$与$\boldsymbol{\omega}$平行时，则$\mathbf{a}_c=0$。

设用$\mathbf{a}_t$表总的牵连加速度，即：

$$\mathbf{a}_t=\mathbf{a}_0+\frac{d\,\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\mathbf{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$$

则（4.1.3）式可写成：

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}'+\mathbf{a}_t+\mathbf{a}_c$$

2.（4.1.3）式之物理意义，它表达了从惯性系和非惯性系描述质点运动任一时刻加速度之间的关系，即：质点m在任一时刻的绝对加速度等于相对加速度、牵连加速度（平动牵连加速度、变转速牵连加速度、转动牵连加速度）和科氏加速度之矢量和。当非惯性系无转动即$\omega=0$时，则：

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}'+\mathbf{a}_0$$

而当非惯性系只有转动而无平动时，则$\mathbf{a}_0=0$。

以上我们用分析的方法，导出了惯性系与非惯性系速度和加速度间之关系。下面通过例题结合矢量图法，进一步加

深理解。

〔例1〕有一圆盘，绕通过盘心并垂直于盘面之轴作匀速转动，转轴相对地面静止。盘面上有一自盘心向外之径向直槽，今有一质量为m之小球在槽中沿径向运动。试结合速度矢量图，分析小球的速度及加速度。

〔解〕：从圆盘这一非惯性系来看，小球作直线运动，因而只有相对圆盘的直线运动之速度及加速度。

若以地面为惯性系来看，则小球之绝对速度由(4.1.2)式为：

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}'+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$$

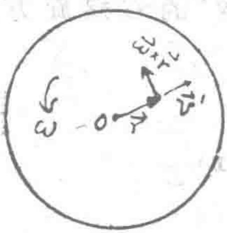

图 4.1.4

$\mathbf{v}_0=0$ 是因转轴对地无平动，其矢量图见图（4.1.4）。可以看出：相对速度方向沿圆盘径向；转动牵连速度$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$的方向垂直于$\boldsymbol{\omega}$及$\mathbf{r}$而在盘面内。

从地面来看小球之绝对加速度由（4.1.3）式为：

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}'+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})+2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}' \qquad (1)$$

这里平动牵连加速度$\mathbf{a}_0$显然也为零；由于圆盘作匀速转动故变转速牵连加速度$\dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\mathbf{r}=0$。

现在，用速度矢量图法来分析并计算小球之加速度。为此，取两个时刻小球位于盘面A、B，二点之速度作图，然后令$\Delta t\to 0$以求出小球的加速度。

图4.1.5，给出小球在点A及点B之相对速度和转动牵连速度矢量图以及相对速度增量$\Delta\mathbf{v}'$及转动牵连速度增量$\Delta\mathbf{v}_t$之矢量图。由图可看出：

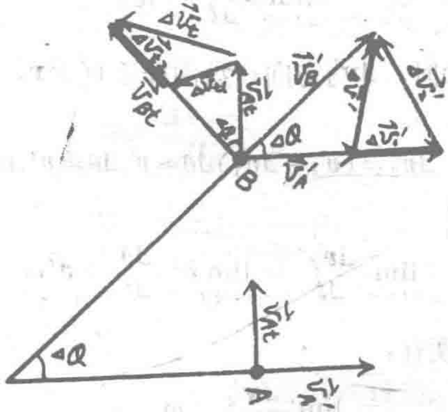

图 4.1.5

$$\Delta \mathbf{v}' = \Delta \mathbf{v}_1' + \Delta \mathbf{v}_2', \qquad \Delta \mathbf{v}_t = \Delta \mathbf{v}_{t1} + \Delta \mathbf{v}_{t2}$$

其中$|\Delta \mathbf{v}_1'|$是质点m在B及A点相对速率之差；$|\Delta \mathbf{v}_{t2}|$是质点m在B及A点牵连速率之差。因此，质点m在点A的绝对加速度应为：

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}'}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_1'}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_2'}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_{t1}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_{t2}}{\Delta t} \qquad (2)$$

下面结合图4.1.4来计算上式右端各项加速度。

当$\Delta t \to 0$时，$\Delta \mathbf{v}_1'$方向沿圆盘面径向。因其值为相对速率之差，故第一项应为相对加速度，即：

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}'_1}{\Delta t} = \mathbf{a}'$$

当$\Delta t \to 0$时，$\Delta \mathbf{v}'_2$方向在盘面并垂直于$\mathbf{r}$。而其值由图知为：

$$\Delta v'_2 = (v'_A + \Delta v'_1)\Delta\theta \approx v'_A \Delta\theta = v' \Delta\theta$$

故

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v'_2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} v' \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = v'\omega$$

写成矢量式便有：

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}'_2}{\Delta t} = \omega \times \mathbf{v}'$$

这是科氏加速度$\mathbf{a}_C$的一部分。

当$\Delta t \to 0$时，$\Delta \mathbf{v}_{t1}$的方向反径向而指向转轴。其值由图知为：

$$\Delta v_{t1} = v_{At}\Delta\theta = v_t \Delta\theta$$

故

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_{t1}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} v_t \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = v_t\omega = r\omega^2$$

写成矢量式便有：

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_{t1}}{\Delta t} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_t = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

这正是转动牵连加速度。

当$\Delta t \to 0$时，$\Delta \mathbf{v}_{t2}$方向在盘面，并垂直于$\mathbf{r}$。其值由图知为：

$$\Delta v_{t2} = v_{Bt} - v_{At} = \omega r_B - \omega r_A = \omega \Delta r$$

故

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v_{t2}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\omega\frac{\Delta r}{\Delta t}=\omega\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t}=\omega v'$$

写成矢量式便有：

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \mathbf{v}_{t2}}{\Delta t}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}'$$

这正是科氏加速度的另一部分。

将上述四部分代入（2）式便有：

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}'+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})+2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}'$$

这正与（1）式同。

〔例2〕半径为r的齿轮由曲柄OA带动，沿半径为R的固定齿轮滚动。如曲柄OA以等角速度ω_0绕O轴转动，求动齿轮上点M（在OA的延长线上）的速度和加速度。

〔解〕：题中所要求的M点之速度和加速度．是指相对地之绝对速度及加速度。

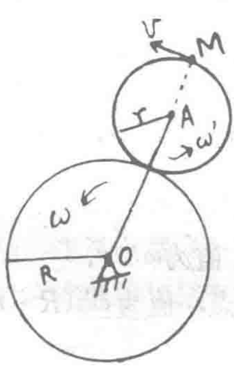

图 4.1.6

在此题中，取地为惯性系，设坐标原点在点O，而非惯性系坐标原点则取在点A。可以有两种看法：非惯性系只有以点A代表的平动而无转动，点M相对非惯性系作匀速圆周运动；或非惯性系除了以点A代表之平动外，还有绕过点A垂直纸面之轴以ω作匀速转动，点M相对非惯性系静止（即非惯性系与动齿轮固结）。

下面根据上述两种看法来求解：

点M的速度由（4.1.2）式有：

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}'+\mathbf{v}_0+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$$

第一种看法有

$$\mathbf{v}'=\boldsymbol{\omega}'\times\mathbf{r},\quad \mathbf{v}_0=\boldsymbol{\omega}_0\times(R+r);\quad \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}=0 \tag{1}$$

可以看出：$\mathbf{v}'$与$\mathbf{v}_0$同方向，且两齿轮相对运动之约束方程为：

$$(R+r)\omega_0=r\omega' \tag{2}$$

这是因为在同一时间内，点A所走过的弧长与两轮啮合过的弧长相等。因而有

$$\begin{aligned}v&=v'+v_0=\omega' r+\omega_0(R+r)\\&=\frac{(R+r)\omega_0}{r}r+\omega_0(R+r)=2\omega_0(R+r)\end{aligned} \tag{3}$$

方向沿切向如图。

第二种看法则相对速度$\mathbf{v}'=0$；平动牵连速度$\mathbf{v}_0$不变；转动牵连速度$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}=\boldsymbol{\omega}'\times\mathbf{r}$，与第一种看法中之相对速度相同。故结果必与第一种同。

点M的加速度由（4.1.3）式有：

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}'+\mathbf{a}_0+\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\mathbf{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})+2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}'$$

第一种看法有：

$\mathbf{a}'=\boldsymbol{\omega}'\times(\boldsymbol{\omega}'\times\mathbf{r})$ 方向指向A点，值为$\omega'^2 r$，

$\mathbf{a}_0=\boldsymbol{\omega}_0\times(\boldsymbol{\omega}_0\times R+r)$方向指向$O$点，值为$\omega_0^2(R+r)$

后三项因非惯性系无转动而为零。

由于$\mathbf{a}'$与$\mathbf{a}_0$同向，皆指向点O，所以：

$$a=\omega'^2 r+\omega_0^2(R+r)=\left[\frac{(R+r)\omega_0}{r}\right]^2 r+\omega_0^2(R+r)=$$

$$=\left(3R+2r+\frac{R^2}{r}\right)\omega_0^2$$

第二种看法有：

$\mathbf{a}'=0$

$\mathbf{a}_0=\boldsymbol{\omega}_0\times(\boldsymbol{\omega}_0+\mathbf{R}+\mathbf{r})$ 与第一种看法中的$\mathbf{a}_0$同。

$\dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\mathbf{r}$因非惯性系作匀速转动而为零。

$\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})=\boldsymbol{\omega}'\times(\boldsymbol{\omega}'\times\mathbf{r})$ 与第一种看法的$\mathbf{a}'$同。

$2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}'$因相对运动$\mathbf{v}'=0$而为零。

故结果与第一种看法同。

通过以上例题可看出，在计算这类问题时确定非惯性系及其运动状态是一个关键。

§4.2 非惯性系中的质点动力学方程、惯性力

导出从非惯性系描述质点运动的动力学方程（也称相对运动微分方程）。

非惯性系中之质点动力学方程

思路：将（4.1.3）式代入惯性系中之牛顿第二定律，然后进行移项即得。

具体即：

$$\mathbf{F}=m\mathbf{a}=m\mathbf{a}'+m\mathbf{a}_0+m\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\mathbf{r}\right)$$

$$+m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})+2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}' \qquad (4.2.1)$$

将等式右端第一项以后全部移至左端，则得：

$$\mathbf{F}+(-m\mathbf{a}_0)+\left[-m\left(\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\mathbf{r}\right)\right]\right.$$

$$+[-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})]$$

$$+(-2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}')=m\mathbf{a}' \qquad (4.2.2)$$

设等式左端第二、三、四项以$\mathbf{F}_t$表之，第五项以$\mathbf{F}_c$表之，则上式可写成：

$$\mathbf{F}+\mathbf{F}_t+\mathbf{F}_c=m\mathbf{a}' \qquad (4.2.3)$$

此即非惯性系的质点动力学方程。

讨论：

1. 式（4.2.2），（4.2.3）中各项物理含义：

$m\mathbf{a}'$：$\mathbf{a}'$为从非惯性系观察的质点加速度，因而$m\mathbf{a}'$即在非惯性系中之质量乘加速度。

$\mathbf{F}$：作用在质点m上之真正作用力。

$(-m\mathbf{a}_0)$：称为平动牵连惯性力，其方向与$\mathbf{a}_0$相反。

$-m\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\mathbf{r}\right)$：称为变转速牵连惯性力，方向垂直于$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$与$\mathbf{r}$所组成之平面，指向由$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$到$\mathbf{r}$的**左螺旋**方向。

$-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$：称为转动牵连惯性力。由于$\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$垂直并指向转轴，故$-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$指向**离去垂直于轴**的方向。一般称为离心惯性力（实为**离轴**惯性力），或惯性离心力。

以上三项又合称为牵连惯性力，以$\mathbf{F}_t$表之。

$-2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}'$：称为科氏惯性力，方向垂直于$\boldsymbol{\omega}$与$\mathbf{v}'$所组成之平面，指向由$\boldsymbol{\omega}$到$\mathbf{v}'$之**左螺旋**方向，以$\mathbf{F}_c$表之。

2．式（4.2.2）或（4.2.3）之物理意义：它从非惯性系定量地表达了质点运动时状态的变化及引起变化的原因间的关系。即：在非惯性系中，质点的质量乘加速度等于质点所受的真实力与牵连惯性力、科氏惯性力之矢量和。

3．惯性力：由上述可知，惯性力只不过是为**从非惯性系建立牛顿第二定律而引入的假想力**从非惯性系看，找不到与惯性力相应的施力物体，因而也找不到与惯性力相应的什么反作用力，故牛顿第三定律对惯性力不成立。要注意，从惯性系来研究物体运动时，是没有惯性力这一概念的。

惯性力的实质是什么呢？我们通过下述几例来看看。

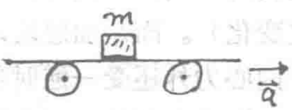

图　4.2.1

〔例1〕如图4.2.1所示，有一平板小车，在其光滑板面上放一小物m。原来小车相对地面静止，小物也相对地静止。如果在某一时刻给小车水平加速度$\mathbf{a}$，则从地面看，小物m**由于惯性**将仍相对地面而静止。但从小车这一非惯性系来看，小物将相对小车以$-\mathbf{a}$向左运动，然而却找不到对小物向左的作用力，因此，为解释此现象只有引入惯性力来说明。此例中惯性力为$-m\mathbf{a}$，即（4.2.2）式中之平动牵连惯性力。

〔例2〕如图4.2.2所示，有一表面光滑之圆盘，周边有光滑挡板。圆盘可绕过圆心垂直纸面之轴相对地面转动。当圆盘以匀角速度ω转动时，可使小球相对盘静止而随之转动。从地面观察者看，小球受盘边挡板一向心力作用而作匀速圆运动。如果没有此向心力作用，小球将**因惯性**而不随盘转动。而从转动圆盘这一非惯性系来看，小球虽受一指向中