

# 线性代数

◎ 何素艳 曹宏举 万丽英 主编

# 线性代数

◎ 何素艳 曹宏举 万丽英 主编

清华大学出版社  
北京

## 内 容 简 介

本书包含矩阵、行列式、线性方程组、向量、特征值与特征向量、二次型等内容。各章的每一节后都配有习题，书末附有习题参考答案。本书还给出了一些比较简单的线性代数应用问题。

本书的读者对象为高等院校非数学专业的学生，也可供教师参考或者自学者阅读。

版权所有，侵权必究。侵权举报电话：010-62782989 13701121933

### 图书在版编目(CIP)数据

线性代数/何素艳,曹宏举,万丽英主编. —北京：清华大学出版社,2016

ISBN 978-7-302-45377-2

I. ①线… II. ①何… ②曹… ③万… III. ①线性代数 IV. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 260181 号

责任编辑：陈 明

封面设计：傅瑞学

责任校对：王淑云

责任印制：王静怡

出版发行：清华大学出版社

网 址：<http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址：北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编：100084

社 总 机：010-62770175 邮 购：010-62786544

投稿与读者服务：010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈：010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者：三河市春园印刷有限公司

经 销：全国新华书店

开 本：170mm×230mm 印 张：12 字 数：228 千字

版 次：2016 年 10 月第 1 版 印 次：2016 年 10 月第 1 次印刷

印 数：1~3000

定 价：22.00 元

---

产品编号：070905-01

# 前言

线性代数是理工类、经管类等专业学生必修的重要数学基础课之一。在计算机技术日益发展和普及的今天，许多实际问题可以通过离散化的数值计算得到定量的解决，而线性代数则在其中提供了必要的数学基础。

时代的发展，学生的变化，给线性代数教学提出了诸多问题，在多年教学工作中，很多问题一直萦绕在编者脑际，例如：如何使线性代数学起来容易些？如何让学生体会到线性代数的用途？这样，在对学生的牵挂中，对问题的思考中，这本凝聚集体智慧的教材终于付梓。

和传统的线性代数教材相比，本教材有如下特点：

(1) 由浅入深、由易推难，层层铺垫，注重概念和定理的直观描述，同时也体现了必要的推理。

(2) 以线性方程组为中心，突出了矩阵工具这条主线。

(3) 在教材中每章的开始，以问句的形式体现了这一章的主要内容，既有助于读者在学习中把握重点，统领全章，还起到了一种书与读者之间的沟通作用。

(4) 在例题和习题的选择上，尽量减少计算量，降低抽象，以说明概念和方法为主要目的。

(5) 针对一些内容，给出了一些应用问题，这些问题涉及密码学、化学、人口学、生态学等诸多领域，问题选择难易适度，解答详细。

(6) 每一节后面都设置了思考题，便于学生对一些重要概念及方法的理解。

(7) 每一节的课后习题既是对本节内容的理解与巩固，也为后续内容埋下伏笔，起到承前启后的作用。

(8) 教材后附有主要概念的索引，便于读者查找。

本教材第1、2章由何素艳编写,第3、4章由万丽英编写,第5、6章由曹宏举编写.

本教材的出版得到大连外国语大学校级教材基金项目(2014)、辽宁省教育科学规划项目(JG12DB318)、教育部人文社会科学研究项目(15YJCZH005)等的资助.本教材的出版也得到大连外国语大学软件学院的关心与支持,同时感谢清华大学出版社陈明博士的帮助及建议.

尽管作者力求完美,但由于水平所限,教材中难免会出现一些疏漏,希望读者提出宝贵意见和建议.

编 者

2016年8月



# 目 录

第1章 矩阵 .....	1
1.1 线性方程组的概念 .....	1
思考 .....	4
习题 1.1 .....	4
1.2 矩阵的概念 .....	5
1.2.1 矩阵的定义 .....	5
1.2.2 几种特殊矩阵 .....	6
思考 .....	8
习题 1.2 .....	8
1.3 矩阵的运算 .....	9
1.3.1 矩阵的加法 .....	9
1.3.2 数与矩阵的乘法 .....	10
1.3.3 矩阵的乘法 .....	10
1.3.4 矩阵的转置 .....	12
思考 .....	14
习题 1.3 .....	15
1.4 矩阵的初等变换与初等矩阵 .....	16
1.4.1 矩阵的初等变换 .....	16
1.4.2 阶梯形矩阵 .....	19
1.4.3 初等矩阵 .....	23
思考 .....	26
习题 1.4 .....	26
1.5 矩阵的逆 .....	27
1.5.1 逆矩阵的定义 .....	27
1.5.2 矩阵可逆的条件 .....	30
1.5.3 计算逆矩阵的初等行变换法 .....	31
思考 .....	34

习题 1.5 .....	34
1.6 矩阵的分块 .....	35
1.6.1 分块矩阵 .....	35
1.6.2 分块矩阵的运算 .....	36
思考 .....	39
习题 1.6 .....	40
复习题一 .....	40
<b>第 2 章 行列式 .....</b>	<b>43</b>
2.1 行列式的定义 .....	43
2.1.1 二阶行列式 .....	43
2.1.2 三阶行列式 .....	45
2.1.3 二、三阶行列式间的关系 .....	46
2.1.4 $n$ 阶行列式 .....	48
思考 .....	50
习题 2.1 .....	51
2.2 行列式的性质与计算 .....	52
2.2.1 行列式的性质 .....	52
2.2.2 行列式的计算 .....	57
思考 .....	59
习题 2.2 .....	59
2.3 行列式的简单应用 .....	61
2.3.1 矩阵可逆的行列式判别法 .....	61
2.3.2 克莱姆法则 .....	63
思考 .....	67
习题 2.3 .....	67
复习题二 .....	68
<b>第 3 章 矩阵的秩与线性方程组 .....</b>	<b>70</b>
3.1 矩阵的秩 .....	70
3.1.1 矩阵的秩的定义 .....	70
3.1.2 矩阵的秩的计算 .....	72
思考 .....	74
习题 3.1 .....	74
3.2 齐次线性方程组解的讨论 .....	74
思考 .....	78
习题 3.2 .....	78



3.3 非齐次线性方程组解的讨论 .....	79
思考 .....	85
习题 3.3 .....	86
复习题三 .....	87
<b>第 4 章 向量 .....</b>	<b>90</b>
4.1 向量组及其线性相关性 .....	90
4.1.1 $n$ 维向量 .....	90
4.1.2 向量组的线性组合 .....	91
4.1.3 向量组的等价 .....	94
4.1.4 向量组的线性相关性 .....	95
思考 .....	99
习题 4.1 .....	99
4.2 向量组的秩 .....	102
4.2.1 向量组的极大无关组和秩的定义 .....	102
4.2.2 向量组的秩和极大无关组的求法 .....	103
思考 .....	105
习题 4.2 .....	105
4.3 向量空间 .....	107
4.3.1 向量空间的定义 .....	107
4.3.2 向量空间的基与维数 .....	108
4.3.3 向量在基下的坐标 .....	109
4.3.4 过渡矩阵与坐标变换 .....	110
思考 .....	112
习题 4.3 .....	112
4.4 线性方程组解的结构 .....	114
4.4.1 齐次线性方程组解的结构 .....	114
4.4.2 非齐次线性方程组解的结构 .....	118
思考 .....	121
习题 4.4 .....	121
复习题四 .....	122
<b>第 5 章 方阵的特征值与特征向量 .....</b>	<b>124</b>
5.1 特征值与特征向量 .....	124
5.1.1 特征值与特征向量的概念 .....	124
5.1.2 特征值与特征向量的计算 .....	125
5.1.3 特征值与特征向量的性质 .....	128

5.1.4 特征值与特征向量的简单应用.....	129
思考 .....	131
习题 5.1 .....	131
5.2 相似矩阵与矩阵的对角化 .....	132
5.2.1 相似矩阵.....	132
5.2.2 矩阵的对角化.....	133
5.2.3 矩阵对角化的简单应用.....	136
思考 .....	140
习题 5.2 .....	140
复习题五.....	141
<b>第 6 章 向量的内积及二次型.....</b>	<b>144</b>
6.1 向量的内积 .....	144
6.1.1 向量的内积.....	144
6.1.2 正交向量组.....	146
6.1.3 格拉姆-施密特正交化过程 .....	147
6.1.4 正交矩阵.....	149
思考 .....	150
习题 6.1 .....	150
6.2 实对称矩阵的对角化 .....	150
6.2.1 实对称矩阵的特征值与特征向量.....	150
6.2.2 实对称矩阵正交相似于实对角阵.....	151
思考 .....	153
习题 6.2 .....	153
6.3 二次型 .....	154
6.3.1 二次型的基本概念及标准形式.....	154
6.3.2 用正交变换化二次型为标准形.....	156
6.3.3 正定二次型.....	158
思考 .....	160
习题 6.3 .....	160
复习题六.....	161
<b>习题参考答案.....</b>	<b>163</b>
<b>索引.....</b>	<b>180</b>
<b>参考文献.....</b>	<b>182</b>



## 第1章

# 矩 阵

线性方程组是线性代数的核心. 矩阵是线性代数的重要研究对象和重要工具. 矩阵不仅可以用来研究线性方程组, 在自然科学、工程技术、社会科学等各个领域还具有非常广泛的应用.

### 本章主要讨论

1. 什么是线性方程组?
2. 什么是矩阵? 矩阵有哪些主要运算?
3. 何谓矩阵的初等变换? 何谓初等矩阵?
4. 如何用初等变换求解线性方程组?
5. 何谓逆矩阵?
6. 什么是分块矩阵?

## 1.1 线性方程组的概念

形如

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \quad (1.1)$$

的方程称为  $n$  元线性方程 (linear equation), 其中  $b$  及系数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为实数, 通常是已知的,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为未知数.

由一个或几个包含相同未知数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的线性方程构成的方程组称为线性方程组 (linear system of equations). 含  $m$  个方程  $n$  个未知数的线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1.2)$$

其中系数  $a_{ij}$  是方程组的第  $i$  个方程中第  $j$  个未知数  $x_j$  的系数. 称形如(1.2)式的方程组为  $m \times n$  的线性方程组. 为方便, 本书中的线性方程组也常简称方程组. 下面是一些方程组的例子:

$$(1) \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 - 3x_2 = -7 \end{cases}; \quad (2) \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases}; \quad (3) \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 4, \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

其中线性方程组(1)是  $2 \times 2$  的, 方程组(2)是  $2 \times 3$  的, 方程组(3)是  $3 \times 2$  的.

**定义 1.1** 若将方程组(1.2)中的未知数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  分别用数  $k_1, k_2, \dots, k_n$  代替后, 所有方程的两边都相等, 则称  $x_1 = k_1, x_2 = k_2, \dots, x_n = k_n$  为方程组(1.2)的一个解(a solution to system(1.2)).

例如,  $x_1 = 2, x_2 = 3$  是方程组(1)的一个解.  $x_1 = -1, x_2 = -3, x_3 = 3$  为方程组(2)的一个解. 显然, 方程组(2)有很多个解, 可以验证, 对于任意实数  $k$ ,  $x_1 = 2 - k, x_2 = -k, x_3 = k$  都是方程组(2)的解.

**注** 方程组的解也可以用有序数组来表示, 例如方程组(1)的唯一解为  $(2, 3)$ ,  $(-1, -3, 3)$  是方程组(2)的一个解.

方程组的所有解的集合称为方程组的解集(solution set). 例如, 方程组(1)的解集为  $\{(2, 3)\}$ , 方程组(2)的解集为  $\{(2 - k, -k, k) | k \in \mathbb{R}\}$ .

显然, 方程组(3)无解, 即该方程组的解集是空集.

若方程组无解, 我们称这个方程组是不相容的(inconsistent); 若方程组至少有一个解, 称这个方程组是相容的(consistent). 一般地, 线性方程组的解有如下三种情况.

(1) 有唯一解(exactly one solution); (2) 有无穷多解(infinitely many solutions); (3) 无解(no solution).

可以验证, 方程组  $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$  和  $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 - 3x_2 = -7 \end{cases}$  具有相同的解  $x_1 = 2, x_2 = 3$ .

若两个方程组具有相同的解集, 则称这两个方程组为同解方程组, 或者称这两个方程组是等价的(equivalent).

**定义 1.2** 称以下三种变换为线性方程组的初等变换.

- (1) 对换变换: 交换任意两个方程的顺序.
- (2) 倍乘变换: 方程两边同乘以一个非零的常数.
- (3) 倍加变换: 某个方程的倍数加到另一个方程.

显然, 当对线性方程组施行有限次初等变换时, 得到的方程组与原方程组是同解(或等价)的.

例 1 已知方程组(1)  $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ -3x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$ ; (2)  $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ x_2 + 2x_3 = 7 \\ 2x_3 = 4 \end{cases}$

验证这两个方程组是同解的.

解 只要看方程组(1)是否可以通过若干个初等变换变到方程组(2)即可.

首先, 方程组(1)和方程组(2)中的第一个方程相同. 方程组(1)中的第三个方程加到第二个方程得

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &=& 2 \\ (+) - 3x_1 - x_2 + x_3 &=& 5 \\ \hline x_2 + 2x_3 &=& 7 \end{array}$$

而  $x_2 + 2x_3 = 7$  是方程组(2)中的第二个方程. 方程组(1)中的第一个方程乘以  $-1$  加到第三个方程得

$$\begin{array}{rcl} -3x_1 - 2x_2 + x_3 &=& 2 \\ (+) 3x_1 + 2x_2 + x_3 &=& 2 \\ \hline 2x_3 &=& 4 \end{array}$$

而  $2x_3 = 4$  是方程组(2)中的第三个方程. 这样, 方程组(1)经过两次初等变换变到了方程组(2), 从而方程组(1)和方程组(2)是同解的, 即方程组(1)和(2)的解集是相同的.

显然方程组(2)容易求解, 由方程组(2)中的第三个方程得  $x_3 = 2$ , 将其代入第二个方程得  $x_2 = 3$ , 最后将  $x_2 = 3$  及  $x_3 = 2$  代入第一个方程, 得  $x_1 = -2$ . 所以方程组(1)和方程组(2)的解都为  $x_1 = -2, x_2 = 3, x_3 = 2$ .

**定义 1.3** 若  $n \times n$  的线性方程组第  $k$  个方程中的前  $k-1$  个未知数的系数都为零, 而未知数  $x_k (k=1, 2, \dots, n)$  的系数不为零, 则称这种形式的线性方程组为上三角形方程组 (upper triangular system).

例如,例1中的方程组(2)就是一个上三角形方程组.由定义1.3知,上三角形方程组有唯一解.

若  $n \times n$  的线性方程组有唯一解,利用线性方程组的初等变换,可以将其变为上三角形方程组.但一般来说,这个过程是比较复杂的.

### 思 考

1. 设  $k, h$  为常数, 线性方程组  $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 2 \\ kx_3 = h \end{cases}$  是否为上三角形方程组?

2. 与一  $n \times n$  的线性方程组等价的上三角形方程组(若存在的话)是否唯一?

### 习题 1.1

1.  $n \times 2$  的线性方程组中的每一个方程可以在平面上表示为一条直线,说明下列方程组所表示的直线间的位置关系,并确定方程组解的情况:

$$(1) \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 5 \\ 3x_1 + x_2 = 1 \end{cases};$$

$$(2) \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 5 \\ 3x_1 - 6x_2 = 13 \end{cases};$$

$$(3) \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ -4x_1 + 2x_2 = -6 \end{cases};$$

$$(4) \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ -3x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

2. 求解下列上三角形方程组:

$$(1) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_2 + x_3 = 11 \\ 3x_3 = 15 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ -x_3 + 2x_4 = -1 \\ 4x_4 = 4 \end{cases}$$

3. 下列线性方程组中, 方程组(b)是与方程组(a)同解(或等价)的上三角形方程组, 请写出用方程组的初等变换将方程组(a)化为方程组(b)的过程.

$$(1) (a) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases},$$

$$(b) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 4 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

$$(2) \begin{array}{l} \text{(a)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \end{cases} \quad \text{(b)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ -7x_2 - 6x_3 = -10, \\ x_3 = 4 \end{cases} \end{array}$$

4. 应用题(百鸡问题) 一百文铜钱买了一百只鸡, 公鸡每只5文钱, 母鸡每只3文钱, 小鸡一文钱3只. 问: 一百只鸡中公鸡、母鸡、小鸡各有多少只?

## 1.2 矩阵的概念

### 1.2.1 矩阵的定义

对于线性方程组

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases}, \quad (1.3)$$

将每个未知数的系数写在对齐的一列中, 并用括号括起来, 得到数表

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

若将系数和常数项写在一起, 则得到数表

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

我们将数表(1.4)和数表(1.5)都称为矩阵(matrix). 称(1.4)式为方程组(1.3)的系数矩阵(coefficient matrix), 称(1.5)式为方程组(1.3)的增广矩阵(augmented matrix), 它包含了方程组的全部信息.

**定义 1.4** 由  $m \times n$  个数排成的  $m$  行  $n$  列的数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

称为一个  $m \times n$  矩阵, 其中数  $a_{ij}$  表示矩阵的位于第  $i$  行第  $j$  列的元素(entry).

矩阵的记号一般为圆括号()或方括号[], 为方便起见, 矩阵(1.6)也可以表示为  $(a_{ij})_{m \times n}$  或  $[a_{ij}]_{m \times n}$ .

矩阵通常用大写英文字母  $A, B, C, \dots$  表示, 例如

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$



这里  $A$  是  $2 \times 3$  的,  $B$  是  $2 \times 4$  的,  $A, B$  还可以写成  $A_{2 \times 3}, B_{2 \times 4}$ .

## 1.2.2 几种特殊矩阵

下面介绍几种常用的特殊矩阵.

(1) 零矩阵: 元素全为零的矩阵称为零矩阵 (zero matrix), 一般用  $O$  或  $O_{m \times n}$  表示. 例如,

$$O_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) 行矩阵和列矩阵: 只有一行的矩阵称为行矩阵 (row matrix), 只有一列的矩阵称为列矩阵 (column matrix).

例如,  $(2, -1, 5, 7)$  或  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$  为行矩阵,  $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  为列矩阵.

行矩阵常称为行向量 (row vector), 列矩阵常称为列向量 (column vector).

(3) 方阵: 行数和列数相同的矩阵称为方阵 (square matrix). 例如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

为一个  $3 \times 3$  方阵, 通常称为三阶方阵或三阶矩阵, 在这个方阵中, 过元素  $a_{11}, a_{22}, a_{33}$  的直线称为主对角线, 主对角线上的元素称为主对角元. 过元素  $a_{13}, a_{22}, a_{31}$  的直线称为副对角线.

(4) 对角矩阵: 主对角线以外的元素全为零的方阵称为对角矩阵 (diagonal matrix), 即对  $n$  阶方阵  $A = (a_{ij})$ , 当  $i \neq j$  时,  $a_{ij} = 0$ . 例如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{pmatrix}$$

为三阶对角矩阵, 主对角线以外的零元素可省略不写, 也可记为  $\text{diag}(a_{11}, a_{22}, a_{33})$ .

(5) 单位矩阵: 主对角线上元素全为 1 的对角矩阵称为单位矩阵 (identity matrix), 一般用大写字母  $E$  或  $I$  表示. 例如

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

为三阶单位矩阵.

(6) 三角形矩阵：主对角线下方的元素全为零的方阵称为上三角形矩阵 (upper triangular matrix)，即对  $n$  阶方阵  $\mathbf{A} = (a_{ij})$ ，当  $i > j$  时， $a_{ij} = 0$ 。例如

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22} & a_{23} \\ & & a_{33} \end{bmatrix}.$$

主对角线上方的元素全为零的方阵称为下三角形矩阵 (lower triangular matrix)，即对  $n$  阶方阵  $\mathbf{A} = (a_{ij})$ ，当  $i < j$  时， $a_{ij} = 0$ 。例如

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & \\ a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

**例 1** 写出下面的方程组对应的系数矩阵和增广矩阵。

$$(1) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases}; \quad (2) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 4 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

**解** (1) 系数矩阵和增广矩阵分别为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{bmatrix}.$$

(2) 系数矩阵和增广矩阵分别为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

显然，上三角形方程组的系数矩阵为上三角形矩阵。

如果矩阵  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  的行数、列数分别对应相等，则称  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  为同型矩阵。

如果两个同型矩阵  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  对应位置处的元素完全相同，则称矩阵  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  相等，记作  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ 。例如

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ -1 & b & -5 \end{pmatrix} \text{ 与 } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ c & 7 & d \end{pmatrix}$$

是同型矩阵，并且当  $a=6, b=7, c=-1, d=-5$  时， $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ 。

**例 2** (用矩阵表示航线图) 考虑一张航线图，用点表示城市，两城市之间有直达航班时，就用一条线将两个点连接起来。图 1-1 中给出的是某航空公司部分城市间的航线图，图中用  $C_1, C_2, C_3, C_4$  分别表示北京、乌鲁木齐、西安、大连四

个城市.

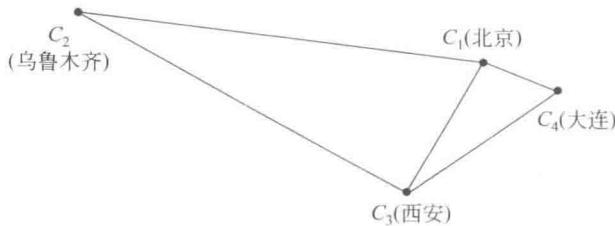


图 1-1

若令  $a_{ij} = \begin{cases} 1, & C_i \text{ 与 } C_j \text{ 间有直达航班} \\ 0, & C_i \text{ 与 } C_j \text{ 间无直达航班} \end{cases} (i, j = 1, 2, 3, 4)$ , 则图 1-1 中城市间的航线关系可以用矩阵表示为

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

称矩阵  $\mathbf{A}$  为  $C_1, C_2, C_3, C_4$  四个城市间的航线图矩阵.

### 思 考

- 如果一个方阵既是上三角形矩阵又是下三角形矩阵, 问该方阵是什么类型的矩阵?
- 设  $\mathbf{A}_{3 \times 5}$  为某线性方程组的增广矩阵, 试问该方程组的方程个数和未知数个数分别为多少?

### 习题 1.2

- 写出下列线性方程组的系数矩阵和增广矩阵:

$$(1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ -7x_2 - 6x_3 = -10 \\ x_3 = 4 \end{cases}$$

$$2. \text{ 设矩阵 } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x & 2 \\ -6 & 0 & z \\ 7 & y & 9 \end{bmatrix} \text{ 与 } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ a & b & 8 \\ 7 & 6 & c \end{bmatrix} \text{ 相等, 试求 } x, y, z, a, b, c$$