Linear Algebra

线性代数

⊙ 何素艳 曹宏举 万丽英 主编

出版社

线性代数

⊙ 何素艳　曹宏举　万丽英　主编

清华大学出版社
北　京

内 容 简 介

本书包含矩阵、行列式、线性方程组、向量、特征值与特征向量、二次型等内容. 各章的每一节后都配有习题，书末附有习题参考答案. 本书还给出了一些比较简单的线性代数应用问题.

本书的读者对象为高等院校非数学专业的学生，也可供教师参考或者自学者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/何素艳，曹宏举，万丽英主编. —北京：清华大学出版社，2016
ISBN 978-7-302-45377-2

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①何… ②曹… ③万… Ⅲ. ①线性代数 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 260181 号

责任编辑：陈　明
封面设计：傅瑞学
责任校对：王淑云
责任印制：王静怡

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市春园印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：170mm×230mm　　**印　　张**：12　　**字　　数**：228 千字
版　　次：2016 年 10 月第 1 版　　**印　　次**：2016 年 10 月第1次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：22.00 元

产品编号：070905-01

前言

线性代数是理工类、经管类等专业学生必修的重要数学基础课之一.在计算机技术日益发展和普及的今天,许多实际问题可以通过离散化的数值计算得到定量的解决,而线性代数则在其中提供了必要的数学基础.

时代的发展,学生的变化,给线性代数教学提出了诸多问题,在多年的教学工作中,很多问题一直萦绕在编者脑际,例如:如何使线性代数学起来容易些?如何让学生体会到线性代数的用途?这样,在对学生的牵挂中,对问题的思考中,这本凝聚集体智慧的教材终于付梓.

和传统的线性代数教材相比,本教材有如下特点:

(1) 由浅入深、由易推难,层层铺垫,注重概念和定理的直观描述,同时也体现了必要的推理.

(2) 以线性方程组为中心,突出了矩阵工具这条主线.

(3) 在教材中每章的开始,以问句的形式体现了这一章的主要内容,既有助于读者在学习中把握重点,统领全章,还起到了一种书与读者之间的沟通作用.

(4) 在例题和习题的选择上,尽量减少计算量,降低抽象,以说明概念和方法为主要目的.

(5) 针对一些内容,给出了一些应用问题,这些问题涉及密码学、化学、人口学、生态学等诸多领域,问题选择难易适度,解答详细.

(6) 每一节后面都设置了思考题,便于学生对一些重要概念及方法的理解.

(7) 每一节的课后习题既是对本节内容的理解与巩固,也为后续内容埋下伏笔,起到承前启后的作用.

(8) 教材后附有主要概念的索引,便于读者查找.

本教材第1、2章由何素艳编写，第3、4章由万丽英编写，第5、6章由曹宏举编写.

本教材的出版得到大连外国语大学校级教材基金项目(2014)、辽宁省教育科学规划项目(JG12DB318)、教育部人文社会科学研究项目(15YJCZH005)等的资助.本教材的出版也得到大连外国语大学软件学院的关心与支持，同时感谢清华大学出版社陈明博士的帮助及建议.

尽管作者力求完美，但由于水平所限，教材中难免会出现一些疏漏，希望读者提出宝贵意见和建议.

编　者

2016年8月

目 录

第 1 章

矩　　阵

线性方程组是线性代数的核心．矩阵是线性代数的重要研究对象和重要工具．矩阵不仅可以用来研究线性方程组，在自然科学、工程技术、社会科学等各个领域还具有非常广泛的应用．

本章主要讨论

1. 什么是线性方程组？
2. 什么是矩阵？矩阵有哪些主要运算？
3. 何谓矩阵的初等变换？何谓初等矩阵？
4. 如何用初等变换求解线性方程组？
5. 何谓逆矩阵？
6. 什么是分块矩阵？

1.1　线性方程组的概念

形如

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b \tag{1.1}$$

的方程称为 n 元**线性方程**(linear equation)，其中 b 及系数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为实数，通常是已知的，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为未知数．

由一个或几个包含相同未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的线性方程构成的方程组称为**线性方程组**(linear system of equations)．含 m 个方程 n 个未知数的线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1.2}$$

其中系数 a_{ij} 是方程组的第 i 个方程中第 j 个未知数 x_j 的系数. 称形如(1.2)式的方程组为 $m\times n$ 的线性方程组. 为方便,本书中的线性方程组也常简称**方程组**. 下面是一些方程组的例子:

$$(1)\begin{cases}2x_1-x_2=1\\ x_1-3x_2=-7\end{cases};\quad (2)\begin{cases}-x_1+2x_2+x_3=-2\\ x_1-x_2=2\end{cases};\quad (3)\begin{cases}x_1+x_2=3\\ x_1+x_2=4.\\ x_1-x_2=1\end{cases}$$

其中线性方程组(1)是 2×2 的,方程组(2)是 2×3 的,方程组(3)是 3×2 的.

定义 1.1 **若将方程组(1.2)中的未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 分别用数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 代替后,所有方程的两边都相等,则称 $x_1=k_1,x_2=k_2,\cdots,x_n=k_n$ 为方程组(1.2)的一个解**(a solution to system(1.2)).

例如,$x_1=2,x_2=3$ 是方程组(1)的一个解. $x_1=-1,x_2=-3,x_3=3$ 为方程组(2)的一个解. 显然,方程组(2)有很多个解,可以验证,对于任意实数 k,$x_1=2-k,x_2=-k,x_3=k$ 都是方程组(2)的解.

注 方程组的解也可以用有序数组来表示,例如方程组(1)的唯一解为(2,3),(−1,−3,3)是方程组(2)的一个解.

方程组的所有解的集合称为方程组的**解集**(solution set). 例如,方程组(1)的解集为$\{(2,3)\}$,方程组(2)的解集为$\{(2-k,-k,k)\mid k\in\mathbb{R}\}$.

显然,方程组(3)无解,即该方程组的解集是空集.

若方程组无解,我们称这个方程组是**不相容的**(inconsistent);若方程组至少有一个解,称这个方程组是**相容的**(consistent). 一般地,线性方程组的解有如下三种情况.

(1)**有唯一解**(exactly one solution);(2)**有无穷多解**(infinitely many solutions);(3)**无解**(no solution).

可以验证,方程组$\begin{cases}2x_1-x_2=1\\ x_1+2x_2=8\end{cases}$和$\begin{cases}2x_1-x_2=1\\ x_1-3x_2=-7\end{cases}$具有相同的解 $x_1=2$, $x_2=3$.

若两个方程组具有相同的解集,则称这两个方程组为**同解方程组**,或者称这两个方程组是**等价的**(equivalent).

定义 1.2 称以下三种变换为线性方程组的初等变换.

(1) 对换变换：交换任意两个方程的顺序.

(2) 倍乘变换：方程两边同乘以一个非零的常数.

(3) 倍加变换：某个方程的倍数加到另一个方程.

显然，当对线性方程组施行有限次初等变换时，得到的方程组与原方程组是同解(或等价)的.

例 1 已知方程组(1) $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=-2 \\ -3x_1-x_2+x_3=5 \\ 3x_1+2x_2+x_3=2 \end{cases}$；(2) $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=-2 \\ x_2+2x_3=7 \\ 2x_3=4 \end{cases}$，

验证这两个方程组是同解的.

解 只要看方程组(1)是否可以通过若干个初等变换变到方程组(2)即可.

首先，方程组(1)和方程组(2)中的第一个方程相同. 方程组(1)中的第三个方程加到第二个方程得

$$\begin{array}{r} 3x_1+2x_2+x_3=2 \\ (+)\ -3x_1-x_2+x_3=5. \\ \hline x_2+2x_3=7 \end{array}$$

而 $x_2+2x_3=7$ 是方程组(2)中的第二个方程. 方程组(1)中的第一个方程乘以 -1 加到第三个方程得

$$\begin{array}{r} -3x_1-2x_2+x_3=2 \\ (+)\ 3x_1+2x_2+x_3=2. \\ \hline 2x_3=4 \end{array}$$

而 $2x_3=4$ 是方程组(2)中的第三个方程. 这样，方程组(1)经过两次初等变换变到了方程组(2)，从而方程组(1)和方程组(2)是同解的，即方程组(1)和(2)的解集是相同的.

显然方程组(2)容易求解，由方程组(2)中的第三个方程得 $x_3=2$，将其代入第二个方程得 $x_2=3$，最后将 $x_2=3$ 及 $x_3=2$ 代入第一个方程，得 $x_1=-2$. 所以方程组(1)和方程组(2)的解都为 $x_1=-2, x_2=3, x_3=2$.

定义 1.3 若 $n\times n$ 的线性方程组第 k 个方程中的前 $k-1$ 个未知数的系数都为零，而未知数 $x_k(k=1,2,\cdots,n)$ 的系数不为零，则称这种形式的线性方程组为**上三角形方程组**(upper triangular system).

例如，例 1 中的方程组(2)就是一个上三角形方程组. 由定义 1.3 知，**上三角形方程组有唯一解.**

若 $n\times n$ 的线性方程组有唯一解，利用线性方程组的初等变换，可以将其变为上三角形方程组. 但一般来说，这个过程是比较复杂的.

思 考

1. 设 k,h 为常数，线性方程组 $\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=1\\ \qquad\quad x_2-x_3=2\\ \qquad\qquad kx_3=h\end{cases}$ 是否为上三角形方程组？

2. 与一 $n\times n$ 的线性方程组等价的上三角形方程组(若存在的话)是否唯一？

习 题 1.1

1. $n\times 2$ 的线性方程组中的每一个方程可以在平面上表示为一条直线，说明下列方程组所表示的直线间的位置关系，并确定方程组解的情况：

(1) $\begin{cases}x_1-2x_2=5\\ 3x_1+x_2=1\end{cases}$；　(2) $\begin{cases}x_1-2x_2=5\\ 3x_1-6x_2=13\end{cases}$；

(3) $\begin{cases}2x_1-x_2=3\\ -4x_1+2x_2=-6\end{cases}$；　(4) $\begin{cases}x_1-x_2=1\\ x_1+x_2=1.\\ -3x_1+x_2=0\end{cases}$

2. 求解下列上三角形方程组：

(1) $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=10\\ \quad 2x_2+x_3=11；\\ \qquad 3x_3=15\end{cases}$　(2) $\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3+x_4=5\\ \quad 3x_2+x_3-2x_4=1\\ \qquad -x_3+2x_4=-1.\\ \qquad\qquad 4x_4=4\end{cases}$

3. 下列线性方程组中，方程组(b)是与方程组(a)同解(或等价)的上三角形方程组，请写出用方程组的初等变换将方程组(a)化为方程组(b)的过程.

(1) (a) $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=0\\ \quad 2x_2-8x_3=8\\ -4x_1+5x_2+9x_3=-9\end{cases}$，　(b) $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=0\\ \quad x_2-4x_3=4；\\ \qquad x_3=3\end{cases}$

(2) (a)$\begin{cases} x_1+2x_2+\ \ x_3=3 \\ 3x_1-\ \ x_2-3x_3=-1, \\ 2x_1+3x_2+\ \ x_3=4 \end{cases}$ (b)$\begin{cases} x_1+2x_2+\ \ x_3=3 \\ \quad\ -7x_2-6x_3=-10. \\ \qquad\qquad\quad\ \ x_3=4 \end{cases}$

4. 应用题(百鸡问题) 一百文铜钱买了一百只鸡，公鸡每只 5 文钱，母鸡每只 3 文钱，小鸡一文钱 3 只. 问：一百只鸡中公鸡、母鸡、小鸡各有多少只？

1.2 矩阵的概念

1.2.1 矩阵的定义

对于线性方程组

$$\begin{cases} -x_1+2x_2+x_3=-2 \\ \ \ \ x_1-\ x_2\qquad\ =2 \end{cases}, \tag{1.3}$$

将每个未知数的系数写在对齐的一列中，并用括号括起来，得到数表

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

若将系数和常数项写在一起，则得到数表

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

我们将数表(1.4)和数表(1.5)都称为**矩阵**(matrix). 称(1.4)式为方程组(1.3)的**系数矩阵**(coefficient matrix)，称(1.5)式为方程组(1.3)的**增广矩阵**(augmented matrix)，它包含了方程组的全部信息.

定义 1.4 由 $m\times n$ 个数排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

称为一个 $m\times n$ 矩阵，其中数 a_{ij} 表示矩阵的位于第 i 行第 j 列的**元素**(entry).

矩阵的记号一般为圆括号( )或方括号[ ]，为方便起见，矩阵(1.6)也可以表示为$(a_{ij})_{m\times n}$或$[a_{ij}]_{m\times n}$.

矩阵通常用大写英文字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$ 表示，例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

这里 $\boldsymbol{A}$ 是 2×3 的，$\boldsymbol{B}$ 是 2×4 的，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 还可以写成 $\boldsymbol{A}_{2\times3},\boldsymbol{B}_{2\times4}$.

1.2.2 几种特殊矩阵

下面介绍几种常用的特殊矩阵.

(1) 零矩阵：元素全为零的矩阵称为**零矩阵**(zero matrix)，一般用 $\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$ 表示. 例如，

$$\boldsymbol{O}_{2\times3}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

(2) 行矩阵和列矩阵：只有一行的矩阵称为**行矩阵**(row matrix)，只有一列的矩阵称为**列矩阵**(column matrix).

例如，$(2,-1,5,7)$ 或 $(2\quad -1\quad 5\quad 7)$ 为行矩阵，$\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ 为列矩阵.

行矩阵常称为**行向量**(row vector)，列矩阵常称为**列向量**(column vector).

(3) 方阵：行数和列数相同的矩阵称为**方阵**(square matrix). 例如

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

为一个 3×3 方阵，通常称为**三阶方阵**或**三阶矩阵**，在这个方阵中，过元素 a_{11}，a_{22}，a_{33} 的直线称为**主对角线**，主对角线上的元素称为**主对角元**. 过元素 a_{13}，a_{22}，a_{31} 的直线称为**副对角线**.

(4) 对角矩阵：主对角线以外的元素全为零的方阵称为**对角矩阵**(diagonal matrix)，即对 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，当 $i\neq j$ 时，$a_{ij}=0$. 例如

$$\begin{pmatrix}a_{11}&&\\&a_{22}&\\&&a_{33}\end{pmatrix}$$

为三阶对角矩阵，主对角线以外的零元素可省略不写，也可记为 $\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},a_{33})$.

(5) 单位矩阵：主对角线上元素全为 1 的对角矩阵称为**单位矩阵**(identity matrix)，一般用大写字母 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{I}$ 表示. 例如

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$$

为三阶单位矩阵.

(6) 三角形矩阵：主对角线下方的元素全为零的方阵称为**上三角形矩阵**(upper triangular matrix)，即对 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，当 $i>j$ 时，$a_{ij}=0$. 例如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22} & a_{23} \\ & & a_{33} \end{pmatrix}.$$

主对角线上方的元素全为零的方阵称为**下三角形矩阵**(lower triangular matrix)，即对 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，当 $i<j$ 时，$a_{ij}=0$. 例如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

例 1　写出下面的方程组对应的系数矩阵和增广矩阵.

(1) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=0 \\ 2x_2-8x_3=8 \\ -4x_1+5x_2+9x_3=-9 \end{cases}$；　(2) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=0 \\ x_2-4x_3=4. \\ x_3=3 \end{cases}$

解　(1) 系数矩阵和增广矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{pmatrix}.$$

(2) 系数矩阵和增广矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

显然，上三角形方程组的系数矩阵为上三角形矩阵.

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的行数、列数分别对应相等，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为**同型矩阵**.

如果两个同型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 对应位置处的元素完全相同，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **相等**，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$. 例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ -1 & b & -5 \end{pmatrix} 与 \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ c & 7 & d \end{pmatrix}$$

是同型矩阵，并且当 $a=6,b=7,c=-1,d=-5$ 时，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

例 2(用矩阵表示航线图)　考虑一张航线图，用点表示城市，两城市之间有直达航班时，就用一条线将两个点连接起来. 图 1-1 中给出的是某航空公司部分城市间的航线图，图中用 C_1,C_2,C_3,C_4 分别表示北京、乌鲁木齐、西安、大连四

个城市.

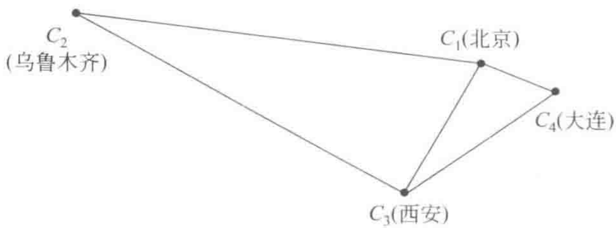

图 1-1

若令 $a_{ij}=\begin{cases}1, & C_i \text{ 与 } C_j \text{ 间有直达航班} \\ 0, & C_i \text{ 与 } C_j \text{ 间无直达航班}\end{cases}$$(i,j=1,2,3,4)$,则图 1-1 中城市间的航线关系可以用矩阵表示为

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{4\times 4}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 C_1,C_2,C_3,C_4 四个城市间的**航线图矩阵**.

思 考

1. 如果一个方阵既是上三角形矩阵又是下三角形矩阵,问该方阵是什么类型的矩阵?

2. 设 $\boldsymbol{A}_{3\times 5}$ 为某线性方程组的增广矩阵,试问该方程组的方程个数和未知数个数分别为多少?

习题 1.2

1. 写出下列线性方程组的系数矩阵和增广矩阵:

(1) $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=3\\ 3x_1-x_2-3x_3=-1;\\ 2x_1+3x_2+x_3=4\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=3\\ -7x_2-6x_3=-10.\\ x_3=4\end{cases}$

2. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & x & 2\\ -6 & 0 & z\\ 7 & y & 9\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ a & b & 8\\ 7 & 6 & c\end{pmatrix}$ 相等,试求 x,y,z,a,b,c