中学解题思路与技巧三千例丛书

数学300例

主编 李峰 金怡弟

中学解题思路与技巧三千例丛书

数学300例（附题解）

主　　编　李　峰　金怡弟

编　　者　顾宁先　王福庆　张佩云

特约审订　周朋寿

My ~~father~~ son Liang

陕西人民教育出版社

You father son X Y Z

中学解题思路与技巧三千例丛书
数学300例（附题解）
主　编　李　峰　金怡弟
编　者　顾宁先　王福庆　张佩云
陕西人民教育出版社出版
（西安市和平门外标新街2号）
陕西省新华书店发行　陕西省汉中地区印刷厂印刷
787×1092毫米　1/32开本　11印张　230千字
1986年8月第1版　1986年8月第1次印刷
印数：1—115,400
统一书号：7387·95　定价：1.75元

目录

代数

三　　角

立体几何

平面解析几何

综 合 训 练 题

代　数

本学科的内容比较庞杂，涉及的基本概念、法则比较多，灵活运用基础知识的要求比较高，一些综合题的难度也较大，所以，它在中学数学中占有极重要的地位。复习时，要进行系统的归纳整理，综合概括来揭示其内在的联系和基本规律，并能较灵活地加以运用。

数

一、要重视有关概念的理解，要熟练运算的技能，特别要注意复数与各个不同部分知识的联系

〔示例〕

（1）①m为什么实数时，$z=m^2(1+i)-m(1-i)-2i$ 是实数？虚数？纯虚数？

②满足$|z-1|=2$的实数z、纯虚数z、复数z的条件是什么？

〔解〕①原式整理得：$z=m(m-1)+(m-1)(m+2)i$

当$m=1$或$m=-2$时，z为实数；

当$m\neq 1$或$m\neq -2$时，z为虚数；

当$m=0$时，z为纯虚数；

②令$z=x+yi$　(x、$y\in R$)　$\because |z-1|=2$,

$\therefore |(x-1)+yi|=2$,　　$\therefore (x-1)^2+y^2=4$,

若z为实数，则$y=0$ $\therefore x=3$或$x=-1$， $\therefore z=3$或$z=-1$；

若z为纯虚数，则$x=0$且$y\neq 0$ $\therefore y=\pm\sqrt{3}$，

$\therefore z=\pm\sqrt{3}i$；

若z为复数，则z所对应的点，在以（1,0）为圆心，2为半径的圆上运动，其轨迹方程为$(x-1)^2+y^2=4$。

（2）P、Q点所对应的复数为z，$2z+3-4i$，若P在以原点为圆心，r为半径的圆上移动，求点Q的轨迹方程。

〔**解**〕∵P在以原点为圆心，r为半径的圆上移动，令P所对应的复数$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$。

设$z_Q=x+yi=2z+3-4i=2(r\cos\theta+ir\sin\theta)+3-4i$

$=(2r\cos\theta+3)+(2r\sin\theta-4)i$，

$$\therefore \begin{cases} x=2r\cos\theta+3 \\ y=2r\sin\theta-4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x-3=2r\cos\theta \\ y+4=2r\sin\theta \end{cases}$$

消去参数θ，得：$(x-3)^2+(y+4)^2=4r^2$

（3）求出满足$|z|^2-2zi+2a(1+i)=0$的所有复数z（$a\geqslant 0$）

〔**解**〕设$z=x+yi$ （$x, y\in R$），

$\therefore x^2+y^2-2(x+yi)i+2a+2ai=0$

$(x^2+y^2+2y+2a)+(-2x+2a)i=0$。

$$\therefore \begin{cases} x^2+y^2+2y+2a=0 \cdots\cdots ① \\ -2x+2a=0 \cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$ 由②得：$x=a$代入①整理

得： $y^2+2y+a^2+2a=0$。

$\because y\in R$，$\therefore \Delta=4-4(a^2+2a)\geqslant 0$，$\therefore a^2+2a-1\leqslant 0$，

$\therefore -1-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant -1+\sqrt{2}$；$\because a\geqslant 0$，$\therefore 0\leqslant a\leqslant -1+\sqrt{2}$。

当$a=0$时，则$x=0$，$y^2+2y=0$，$\therefore y=0$或$y=-2$，

$\therefore\quad z=0$或$z=-2i$；

当$0<a<-1+\sqrt{2}$时：$y=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-4(a^2+2a)}}{2}$

$=-1\pm\sqrt{1-a^2-2a}$

$\therefore z=a+(-1\pm\sqrt{1-a^2-2a})i$；

当$a=-1+\sqrt{2}$时：$x=-1+\sqrt{2}\quad y=-1$

$\therefore\quad z=-1+\sqrt{2}-i$；

当$a>-1+\sqrt{2}$时：无解。

（4）设$R(z)$表示复数z的实部，在复平面内画出满足$|z|+R(z)\leqslant 1$的z的区域，并用阴影表示。

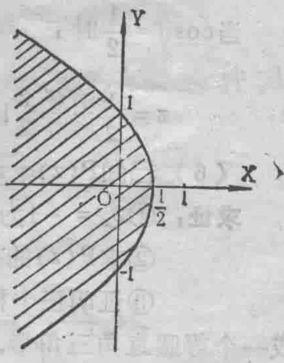

图1—1

〔解〕设$z=x+yi$，$(x, y\in R)$

$\because |x+yi|+R(x+yi)\leqslant 1$，

$\therefore\quad \sqrt{x^2+y^2}+x\leqslant 1$，

$\therefore\quad \sqrt{x^2+y^2}\leqslant 1-x$，解无理不等式：

$$\begin{cases}1-x\geqslant 0\\ x^2+y^2\leqslant(1-x)^2\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x\leqslant 1\\ y^2\leqslant 1-2x\end{cases}$$

$\because\quad y^2\geqslant 0$，$\therefore 1-2x\geqslant 0$，$\therefore x\leqslant\dfrac{1}{2}$，

$\therefore$复数z所对应的点在

$y^2\leqslant 1-2x\ (x\leqslant\frac{1}{2})$的区域内（见图1—1中阴影部分）。

（5）已知复数z的模是1，求：$|z^2-z+1|$的最大值与最小值，并写出取得这些值的复数z。

〔解〕设$z=\cos\theta+i\sin\theta$　（$\because |z|=1$），

$\therefore |z^2-z+1|=|(\cos\theta+i\sin\theta)^2-(\cos\theta+i\sin\theta)+1|$

$=|\cos\theta(2\cos\theta-1)+i\sin\theta(2\cos\theta-1)|$

$=\sqrt{\cos^2\theta(2\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta(2\cos\theta-1)^2}$

$=|2\cos\theta-1|$。　　$\because -1\leqslant\cos\theta\leqslant1$，

$\therefore$当$\cos\theta=-1$小时：$|z^2-z+1|$的最大值为3，此时

$z=-1$；

当$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$时：$|z^2-z+1|$的最小值为0，此时

$z=\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$。

（6）已知$P(z)=z^3+(3-2i)z^2+(1-4i)z-(2i+1)$，

求证：①$z_0=-1$为$P(z)$的根；

②求$P(z)$的另二个根z_1、z_2；

③证明三个根在复平面上相应的点z_0，z_1，z_2构成一个等腰直角三角形。

〔证明〕①　$\because z_0=-1$，

$\therefore P(-1)=(-1)^3+(3-2i)\cdot(-1)^2+(1-4i)(-1)$

$-(2i+1)=-1+(3-2i)-(1-4i)-(2i+1)$

$=0$，

$\therefore$　$z_0=-1$是$P(z)$的根。

② $\begin{cases} z_0+z_1+z_2=-3+2i \\ z_0\cdot z_1\cdot z_2=2i+1 \end{cases} * \Longrightarrow \begin{cases} z_1+z_2=-2+2i \\ z_1\cdot z_2=-1-2i \end{cases}$。

z_1，z_2为方程$z^2+(2-2i)z-(2i+1)=0$的二根，

$[z-(2-i)]\cdot[z-i]=0$； $\therefore z_1=i, z_2=-2+i$。

($z_0=-1$，$z_1=i$，$z_2=-2+i$同时满足$z_0z_1+z_1z_2+z_2z_0$
$=-1+4i$)

③ $\because |z_0-z_1|=|-1-i|=\sqrt{2}$，

$|z_0-z_2|=|-1-(-2+i)|=|1-i|=\sqrt{2}$，

$|z_2-z_1|=|(-2+i)-i|=2$，

$\therefore |z_0-z_1|=|z_0-z_2|$且$|z_0-z_1|^2+|z_0-z_2|^2$
$=|z_1-z_2|^2$

$\therefore z_0$，z_1，z_2构成等腰直角形。

• 注：此系一元n次方程的根与系数关系

（7）设z为虚数，求证：$z+\frac{1}{z}$为实数的充要条件是$|z|=1$。

〔证明〕设　$z=a+bi$，(a，$b\in R$，$b\neq 0$)

$$z+\frac{1}{z}=a+bi+\frac{1}{a+bi}$$

$$=(a+\frac{a}{a^2+b^2})+(b-\frac{b}{a^2+b^2})i。$$

充分性：若$|z|=1$，则$a^2+b^2=1$，$\therefore b-\frac{b}{a^2+b^2}=0$，

$$z+\frac{1}{z}=2a,\quad \therefore\quad z+\frac{1}{z}为实数。$$

必要性：若$z+\frac{1}{z}$为实数，则$b-\frac{b}{a^2+b^2}=0$。$\because b\neq 0$，

$$\therefore a^2+b^2=1,\ \therefore |z|=1。$$

故$z+\frac{1}{z}$为实数的充要条件是$|z|=1$。

（8）已知复数z、a、x有关系式$x=\dfrac{a-z}{1-\bar{a}z}$，

证明：如果$|z|=1$，则$|x|=1$。

〔**证明**〕 利用$z\cdot\bar{z}=|z|^2=|\bar{z}|^2$。$\because |z|=1$，

$$\therefore z\cdot\bar{z}=1,$$

$$x\cdot\bar{x}=\frac{a-z}{1-\bar{a}z}\cdot\overline{\frac{a-z}{1-\bar{a}z}}=\frac{a-z}{1-\bar{a}z}\cdot\frac{\bar{a}-\bar{z}}{1-a\bar{z}}$$

$$=\frac{a\bar{a}-\bar{a}z-a\bar{z}+z\bar{z}}{1-a\bar{z}-\bar{a}z+a\bar{a}z\bar{z}}=\frac{a\bar{a}-\bar{a}z-a\bar{z}+1}{1-a\bar{z}-\bar{a}z+a\bar{a}}$$

$$=1,\quad \therefore |x|=1.$$

（9）设等比数列z_1，z_2，$\cdots z_n$，$\cdots$。其中$z_1=1$，$z_2=a+bi$，$z_3=b+ai$，$(a,b\in R,\ a>0)$

求：①a、b，并将z_2用三角式表示；

②试求满足$z_1+z_2+\cdots+z_n=0$的最小n值，并对此值计算积z_1。z_2。$z_3\cdots z_n$。

〔**解**〕 $\because z_1\cdot z_2\cdots z_n\cdots$成等比数列，$\therefore z_2^2=z_1\cdot z_3$，

$\therefore (a+bi)^2=1\cdot(b+ai)$； $\therefore \begin{cases} a^2-b^2=b & ① \\ 2ab=a & ② \end{cases}$

从②： $\because a>0$，$\therefore b=\dfrac{1}{2}$。代入①：解得$a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$（负值舍去）。

$$\therefore z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}.$$

$\boxed{\because z_1\cdot z_2\cdots z_n=0,}$? $\therefore \dfrac{1-q^n}{1-q}=0$，

其中　$q=a+bi=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$。

$\therefore 1-(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})^n=0$，$\therefore \cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6}=1$

$\therefore \begin{cases}\cos\frac{n\pi}{6}=1\\ \sin\frac{n\pi}{6}=0\end{cases}$ 。$\because n\in N$，　$\therefore n$的最小值为12，

$$\therefore z_1\cdot z_2\cdots z_{12}=1\cdot(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})\cdot(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})^2\cdots$$

$$\cdots(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})^{11}=(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})^{1+2+\cdots+11}$$

$$=(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})^{66}=\cos 11\pi+i\sin 11\pi=-1.$$

〔训练题〕

1.填充

（1）已知复数$z=m^2-2m+(2-m)i$，其中$m\in R$，当z是实数时，$m=$________；z为纯虚数时，$m=$________，z是虚数时，m应满足的条件是________；z在复平面上对应的曲线方程是________。

（2）已知对应复数z_1，z_2的两点在复平面上关于原点对称，且满足等式$3z_1+(z_2-2)i=2z_2-(1+z_1)i$，则复数$z_1=$________，$z_2=$________。

（3）若$\frac{1}{3}+bi=\frac{x+i}{x-i}$则实数$b=$____，$x=$____。

若 $a+bi=\dfrac{x+i}{x-i}(x,\ a,\ b\in R)$，则a、b的关系是$\underline{a^2+b^2=1}$。

（4）若$n\in N$，$\dfrac{\sqrt{3}}{\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n}$是实数，则n的最小值＝______.此时实数为______，若是纯虚数，则n的最小值＝______，此时纯虚数为______。

（5）$-\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\sin\dfrac{5\pi}{3}$的模为____，幅角的主值为______，$1-\cos\alpha+i\sin\alpha(0<\alpha<\pi)$的模为____，幅角的主值为____。

（6）计算①$(1-i)(1-i)^2(1-i)^3\cdots(1-i)^{100}=$____；

②$1+i+i^2+\cdots+i^{100}=$______；

③$\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{9}+i\sin\dfrac{\pi}{9}\right)\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{27}+i\sin\dfrac{\pi}{27}\right)\cdots\left(\cos\dfrac{\pi}{3^n}+i\sin\dfrac{\pi}{3^n}\right)\cdots=$______。

（7）已知：$x=\csc 10°-\sqrt{3}\sec 10°$，则$\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{4x}=$______。

（8）x、$y\in R$，$x^4-8x^2+|y-2|+16+xi+yi$为纯虚数，则$\log_{\sqrt{2}}(2x^2-y^2)=$______。

（9）满足$|z-1|=|z-2|=|z-i|$的复数$z=$______。

（10）已知：$f(z)=|1-z|+\bar{z}$，若$f(x)=3$，则实数$x=$ $\underline{2,\ -1}$。

2. 设z为复数，满足下列条件的点z的集合各构成什么图形？

①$1<|z+2-3i|<2$，②$|z-5i|-|z+5i|=8$；

③$\log_{\frac{1}{2}}|z-2|>\log_{\frac{1}{2}}|z|$，④$\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{|z-1|+4}{3|z-1|-2}>1$。

3. ①设$|z|=a(a>0)$，求证：表示$\dfrac{1}{2}(z+\dfrac{a^2}{z})$的点都在x轴上，且以原点为中点，长度为2a的线段上。

②在图1—2中，标出了复平面上的几个复数，其中圆是圆心在原点的单位圆，在这些数中，哪一个是F的倒数，并说明理由。

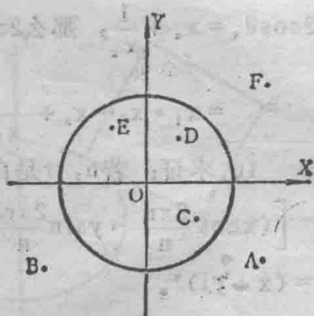

图1—2

4. 设z为复数，且$|z-\sqrt{2}-\sqrt{2}i|\leqslant 1$，求$|z|$的最大值与最小值；幅角主值的最大值与最小值。

5. ①设$|z|=1$，$z\neq\pm i$，求证：$\dfrac{z}{1+z^2}$是实数；

②若x为虚数而$\dfrac{x}{x^2+4}$为实数，求证：$|x|=2$；

③若$|z|=1$，证明对于任意复数W有$|z-W|=|1-\overline{W}z|$。

6. 已知：$z=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$，求，$1+z^4+z^8+z^{12}+z^{16}$的值。

7. 设α、β是方程$x^2-\sqrt{2}x+1=0$的两个根，求以α^{13}，β^{13}为根的二次方程。

8. 若$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$，

求：$|z_1-z_2|^2$，并证明$|1-\overline{z_2}\cdot z_1|^2-|z_1-z_2|^2$
$=(1-r_1^2)(1-r_2^2)$。

9. 证明：如果$2\cos\theta_1=x_1+\dfrac{1}{x_1}$，$2\cos\theta_2=x_2+\dfrac{1}{x_2}\cdots$，

$2\cos\theta_n=x_n+\dfrac{1}{x_n}$，那么$2\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots\theta_n)$

$$=x_1\cdot x_2\cdots x_n+\frac{1}{x_1\cdot x_2\cdots x_n}.$$

10. 求证：若n，r是自然数，则

$$\left[\left(x\cos\frac{2\pi r}{n}-y\sin\frac{2\pi r}{n}\right)+i\left(x\sin\frac{2\pi r}{n}+y\cos\frac{2\pi r}{n}\right)\right]^n$$
$=(x+yi)^n$。

11. 利用复数证明：$\cos\dfrac{\pi}{11}+\cos\dfrac{3\pi}{11}+\cdots+\cos\dfrac{9\pi}{11}=\dfrac{1}{2}$，

$$\sin\frac{\pi}{11}+\sin\frac{3\pi}{11}+\cdots+\sin\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{22}.$$

12. 已知$z=\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}i$，复数$z$，$z^2$，$z^3$，…，$z^n$…在复平面上所对应的点分别为$P_1$，$P_2$，$P_3$，…，$P_n$…，记$S_K$为$\Delta OP_KP_{K+1}$的面积，O为原点，求$\sum\limits_{k=1}^{n}S_K$。

13. 设$A=\cos x+C_n^1\cos 2x+C_n^2\cos 3x+\cdots+C_n^n\cos$
$\cdot(n+1)x$，

$B=\sin x+C_n^1\sin 2x+C_n^3\sin 3x+\cdots C_n^n\sin$ $(n+1)x$，$x\in R$，化复数$A+Bi$成三角式。

14. 复数$z_1=a+bi(a, b\in R)$将z_1绕着原点逆时针旋转$\frac{2\pi}{3}$得z_2，将z_2绕着原点逆针时旋转$\frac{2\pi}{3}$得z_3，求：$z_1+z_2+z_3$。

15. 设一定点$A(L, O)$，在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b}=1$上有一动点Q，以AQ为一边的正方形AQPR（如图1—3），试求点P、R的轨迹方程。

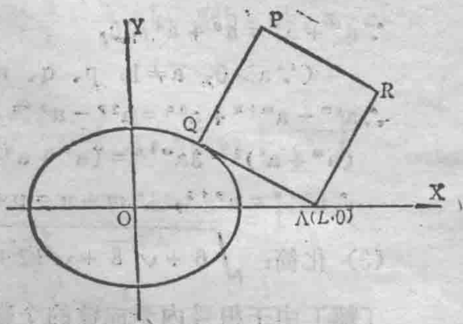

图1—3

16. 实系数方程$x^3-3x^2+px-2=0$的三个根在复平面上恰好是三角形的三个顶点，求p的值，并解此方程。

式

〔**示例**〕

（1）试用语言叙述下列各式所确定的实数a、b、c之间的关系或数值的范围：

① $ab\neq 0$；　②$ab=0$；　③$a^2+b^2>0$；

④ $a^2+b^2=0$；　⑤$(a-b)(b-c)(c-a)=0$；

⑥ $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2>0$；

⑦ $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$。

〔**解**〕①a、b都不是0；②a、b中至少有一个为0；