一部用怀疑眼光探究高等数学的手边书

高数笔谈

谢绪恺 编著

GAO SHU BI TAN

数学问题工程化 工程问题数学化

東北大學出版社
Northeastern University Press

高数笔谈

谢绪恺　编著

东北大学出版社
·沈　阳·

图书在版编目（CIP）数据

高数笔谈 / 谢绪恺编著. —沈阳：东北大学出版社，2016.12
ISBN 978-7-5517-1493-8

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①谢… Ⅲ. ①高等数学—高等学校——教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 314524 号

内容提要

本书是作者根据自己在高校多年执教的积累，用怀疑的眼光探究高等数学中的一些基本问题而写成的，其中的论述与现今通用的中外高等数学教材迥然不同，可供相关专业的青年教师或学生参考、评论和指正。

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路三号巷 11 号
邮编：110819
电话：024-83687331（市场部） 83680267（社务部）
传真：024-83680180（市场部） 83687332（社务部）
网址：http：//www.neupress.com
E-mail：neuph@neupress.com
印 刷 者：沈阳中科印刷有限责任公司
发 行 者：东北大学出版社
幅面尺寸：170mm×240mm
印 张：12
字 数：222 千字
出版时间：2016 年 12 月第 1 版
印刷时间：2016 年 12 月第 1 次印刷
责任编辑：向 阳 潘佳宁
责任校对：叶 子
封面设计：刘江旸
责任出版：唐敏志

ISBN 978-7-5517-1493-8 定 价：42.00 元

前　言

从1950年我走上高等学校讲台，到2005年走下讲台，屈指算来，整整55年。年复一年，高等数学我不知教过多少遍，还编写过讲义，出版过教材。

偶然翻阅一本高等数学教材，令我十分惊诧，自己对其中的许多理论证明虽似曾相识，却已茫然。联想教过的学生，他（她）们还能留存几许？作为老师，总觉不安。

原因是多方面的，主要在于：我国现行的高等数学教材品种单一，且偏重演绎推理，很难兼顾工科学生的特点。因此，常事倍而功半。有鉴于此，为了安心，竟不自量力，决定写本高等数学参考资料，其主旨是“数学问题工程化，工程问题数学化”。直白地说，就是使工科数学通俗化，接地气，成为“下里巴人”。所以，本书多是树根，少有枝蔓，不分开闭区间，罔视左右导数，用到的函数不但连续、而且光滑，如此等等。目的是避免工科读者误入歧途，以便早日登堂入室。

本书第一步是希望读者知晓工科数学的主要内容其实际涵义是什么；第二步是启发读者去怀疑并思考这是为什么；第三步是盼望读者敢为人先做点什么。坦诚地讲，作者也正在前行，三步并未走全，愿与大家共勉！

在本书的编写过程中，作者不断得到东北大学杨佩祯教授的关怀和支持，对此表示衷心地感谢。同时，北京航空航天大学李心灿教授、哈尔滨工业大学吴从炘教授、东北大学张国范教授对书中部分章节提供了许多宝贵意见，作者对此一并深致谢意。

本书得以出版，除了东北大学张庆灵教授、天津大学张国山教授的帮助外，东北大学出版社的向阳副社长应该是功不可没的。因此，希望读者看过本书之后，多提修改意见，促使作者不断前进，以免辜负本书所有参与者的期望。

作　者

2016年10月

目 录

第1章 微分学

在17世纪中期，牛顿和莱布尼茨分别在研究物体的瞬时速度和曲线的切线的基础上，并总结前人经验，逐渐创立了微积分学。微分学是其中的一个分科，主要论述极限、函数的导数、导数的应用以及与导数相关的内容。

1.1 极 限

极限是微积分中一个基本而又重要的概念，比较抽象，但不难理解。它的踪迹比比皆是，只要留心，便能识破其中的来龙去脉。

一个婴儿自呱呱坠地，日复一日，吸吮乳汁，逐渐成长。但有史以来，尚未出现过高于4米的人。就是说，任何人的身高都有极限，比如说H米。到了H米后则不会再长，而且随着年纪增加，还会变矮。

在百米赛场上，个个争先，奋勇冲刺。但有史以来，尚未出现过每秒能跑15米的选手。就是说，任何人的速度都有极限，比如说每秒V米。到了V米后则不会再快，而且随着时间推移，还会变慢。像上述的例子俯拾皆是，读者不妨枚举一二，加深印象。

1.1.1 量 化

上面的例子在于让我们对极限产生直观的认识，便于将其量化，予以定义，形成正确的概念。两个例子尽管陈述的事实互异，主旨却是一致的：各有一个常数，H和V；各有一个变量，年龄和时间。婴儿的身高是随着年龄变化的，选手的速度是随着时间变化的。而且，变量始终按一定规律无限地趋近于一个常量。

综上所述，根据极限的实际意义，厘清变量与常量之间的关系，问题自然就化解了。为具体起见，仍以婴儿成长为例，假想一个婴儿逐步长高，到20岁时身高已至1.8米，达到极限，此后不再上长。换句话说，婴儿是一天一天地趋近于其极限身高1.8米的。这就是极限的实际意义，但还不够，因未量化。

以上所述用数学语言表示，就成为

$$\lim_{t \to 20} h(t) = 1.8$$

式中，h 代表婴儿的身高，t 代表时间，符号 lim（读作 limit）代表取极限，这里表示：当时间 t 逐渐趋近于 20（岁）时，婴儿的身高 h 就逐渐趋近于 1.8（米），当 $t=20$ 时，$h=1.8$。

如果函数 $h(t)$ 是已知的，知道时间 t，就能算出身高 h，则上式可以进一步理解为：不论要求身高 h 与极限值 1.8 之差如何之小，比如 0.1 米，即 $1.8-h<0.1$，总能算出时间 t 来，比如过了 19 岁，即 $|20-t|<1$，便能满足 $1.8-h<0.1$ 的要求。

1.1.2 极限定义

定义 1.1 设有函数 $f(x)$ 并常数 C，且对任意给定的正数 $\varepsilon>0$，总能算出一个正数 $\delta>0$，使得只要 $0<\left|x-x_0\right|<\delta$，便有

$$\left|f(x)-C\right|<\varepsilon, \tag{1-1}$$

则称函数 $f(x)$ 当 x 趋近于 x_0 时的极限为 C，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = C \tag{1-2}$$

或称 $f(x)$ 在 x_0 处存在极限 C。

上面只是函数极限的一个典型定义，不同的条件下，还存在其他的定义，非本书重点，毋庸引述。但必须指出，一个变量无限趋近于一个常数分为两种情况：最后等于极限，如婴儿成长，其身高能等于极限；不等于极限，设想有块蛋糕，头天吃它的一半，次日吃余下的一半，日复一日，蛋糕余量的极限显然是零，但蛋糕永远是有的。其实，正是后一种情况才是值得深思的。为此，请看下面的论述。

1.2 两个重要极限

在证明下述的重要极限时要用到一个引理，其含义如下。

引理 任何的单调增加数列或减小数列，若有界，则存在极限。

例 1.1 设有数列

$$\sqrt{2},\ \sqrt{2+\sqrt{2}},\ \cdots,\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ \cdots$$

试证其为单调增加，并求极限。

解 容易看出，上面的数列是单调增加的。现证其有界。简记此数列为 a_1，a_2，…，a_n…。由于

$$a_1 = \sqrt{2} < 2$$

因此

$$a_2 = \sqrt{2 + a_1} < 2$$
$$a_3 = \sqrt{2 + a_2} < 2$$
$$\vdots$$
$$a_n = \sqrt{2 + a_{n+1}} < 2$$

从上式可知，数列有界。设其极限为 C，则参照上式有

$$C = \sqrt{2 + C}$$

得

$$C = 2$$

其实，将数列中的2换成比2大的正数，也有类似的结果，读者可以一试。

1.2.1 重要极限一

一人放贷，期限一年，利率100%。设本金为1，则一年后本利之和为 $x_1 = 2$。后来期限改成半年，利率50%，则一年后本利之和为

$$x_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2$$

再后来改成三个月，利率25%，则一年后本利之和为

$$x_3 = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4$$

如此以往，便导出如下的极限

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{1-3}$$

上述极限是否存在？显然，导致此极限的数列 x_1，x_2，…，x_n 是单调增加的，关键是要判断是否有界。利用二项式展开定理，有

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\frac{1}{n^4} + \cdots + \frac{n!}{n!}\frac{1}{n^n} \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &< 3\end{aligned}$$

从上式可以看出：

（1）数列 x_1，x_2，…，x_n 存在上界 x_∞，且有 $2.5 < x_\infty < 3$；

（2）仔细检测上式右边的取值，会发现它是随 n 而递增的。就是说，所论

数列单调增加。

总结以上的推证，可以断言，数列存在极限，习惯上用e表示，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$$

极限e非常重要，出身也不平凡。从放贷的例子可以推知，当利率固定时，本金的增长数即本金的利息，是同本金成正比的，本金越多，利息就越多。抽象地说，本金的变化率正比于本金。因此，极限e理所当然地被选作自然对数的底。

以前讲过，$2.5<\mathrm{e}<3$，其实

$$\begin{aligned}\mathrm{e}&=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots\\&=2.7182\cdots\end{aligned}$$

是个无理数，也是超越数，即不满足任何整系数代数方程的实数。

顺便指出，上式是式（1-3）右边取极限的结果。另外，极限e之所以重要还在于等式

$$\mathrm{e}^{i\pi}=-1$$

将4个最重要的数1、π、e和i合成一体。上式是欧拉公式

$$\mathrm{e}^{ix}=\cos x+i\sin x$$

当$x=\pi$时的特例。

在参阅上文时，读者可能会想，既然已知$2.5<\mathrm{e}<3$，那么取其平均值，猜测

$$\mathrm{e}=\frac{2.5+3}{2}=2.75$$

是否可行？从本例看，误差很小。应该肯定，培养猜想的习惯不但促进思维，而且实用。另外，还可以对下式

$$f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

就n求导，看得到什么结果，以加深理解。

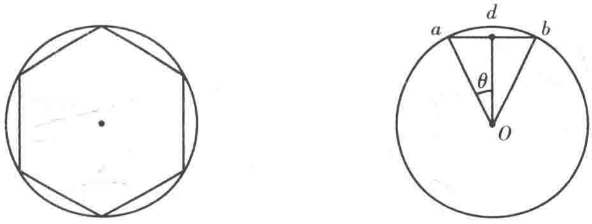
1.2.2 重要极限二

上节论述了一个重要极限，现在将要研究另一个重要的极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

为便于理解，同时增加对上述极限的直观认识，下面首先来计算圆内接正多边形边数不断增多时其周长的极限，此情况如图1-1所示。设圆半径为1，记正多边形边数等于n时的周长为C_n，则参照图1-1不难求出

$C_4=4\sqrt{2}$，$C_6=6$，$C_{12}=6.2112$，$C_{24}=6.2652$，$C_{48}=6.2787$，$C_{96}=6.2821$，…



（a） （b）

图1-1

在推算过程中，容易发现上面的数列为单调增加，根据几何意义，还可肯定它是有界的。因此，此数列存在极限。

事实上，从几何意义抑或计算过程都能轻快地作出判断：其极限就是圆周长 $2\pi\approx 6.2832$。空说无据，请看下面的证明。

按照极限的定义，先选 $\varepsilon=0.1$，根据数列 C_n，可得

$$|2\pi-C_n|<0.1,\ n\geqslant 12$$

再选 $\varepsilon=0.01$，同理可得

$$|2\pi-C_n|<0.01,\ n\geqslant 48$$

再选 $\varepsilon=0.001$，同理可得

$$|2\pi-C_n|<0.001,\ n\geqslant 96$$

总而言之，无论所选的 ε 多么小，都能求出相应的 n，使之满足如上的不等式，从而完全符合极限的定义，因此

$$\lim_{n\to\infty}C_n=2\pi$$

其次，将上式改写为极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{C_n}{2\pi}=1$$

并逐步来展示此极限的具体含义。其中 C_n 是多边形的周长，但在计算 C_n 时，已经发现它和正弦函数有内在的联系，如图1-1（b）所示。图上 ab 代表正 n 边形的一条边，记其中心为 d，$\angle aOd=\theta$，则

$$\sin\theta=|ad|$$

经过简单计算，可知

$$\theta=\frac{\pi}{n},\ |ad|=\frac{C_n}{2n}$$

据此得

$$\frac{\sin\theta}{\theta}=\frac{C_n}{2\pi}$$

取极限，并借助上述结果，最后得

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

这个极限之所以称为重要极限，归因于它是不少结论的基础。习惯上喜欢用 x 作变量，即

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

从以上的论述应该想到，此重要极限的几何意义是，圆内接正多边形当边数不断增加时，其周长的极限等于圆的周长。这个结果很有启发性，如能将实际中两件本来有内在联系的事物加以量化，写成数学公式，则或许就是一项创新，而下述中值定理恰好是这种观点一个绝妙的附注。

作为练习，读者请利用图 1-1（b）探讨摸索，$\sin x$ 的导数为什么是 $\cos x$，且反之亦然，只是符号不同。

1.3 中值定理

前节说道，如能将两件有内在联系的事物加以量化，或有所发现。不信，请看下面的例子。

例 1.2 将一小球从台上向高处抛出，不久，小球落到台上。试问小球的运动过程如何？问题不难，开始时小球向上运动，因地心引力，速度逐渐降低，直至为零，然后下落，速度逐渐升高，最后坠落台上。其中有关键两处，一是小球必然有速度为零的时候，二是当小球速度为零时其所在位置有无特点。

此外，当小球下落时，再次或多次将它上抛，上述的两处关键依然存在。图 1-2 所示就是小球运动的示意图。

(a)　　(b)

图 1-2

上面的例子众所周知。重点在于，一是注意到小球的速度有时必然等于零，二是加以量化。试设想，小球上抛后，因受地心引力作用，速度是不断降低的，直至落在台上。习惯上，取向上时的速度为正，向下时为负，就是说，小球从开始向上的正速度逐渐减小，然后转变为向下的负速度。结论于是出来了：由正逐渐变负，必然经过零点，即小球的速度有时必然等于零。

现在，将对零速度予以量化。为具体起见，用函数 $h=f(t)$ 表示小球的运动过程，其中 h 代表小球的高度，t 代表时间。设 $t=t_0$ 时，小球的速度等于零。在此，速度就是高度变化同时间变化之比，即

$$v=\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} \tag{1-4}$$

其中，v 代表速度，并不是时刻 t 或 t_0 的速度，只是其近似值。当时间 t 无论是从大于或小于 t_0 的方向趋近于 t_0 时，速度 v 总是趋近于零的。因此，最后得

$$\lim_{t\to t_0}\frac{h(t)-h(t_0)}{t-t_0}=f'(t_0)=0$$

上式的意义在于，证实了本例中速度等于零与导数等于零是相互对应的，进而赋予下述定理，即罗尔定理，一种物理解释。

前面讲过，在小球运动过程中还有一关键之处：当其速度为零时所在的位置。请读者留意，以后在讨论函数的极值时尚有下文。

1.3.1 罗尔定理

在上述例 1.2 中，论证了小球速度为零与其速度函数导数为零的本质联系，归纳起来，则得如下的定理。

罗尔定理 设函数 $f(x)$

（1）在区间端点 a 和 b 处相等，即 $f(a)=f(b)$；

（2）在 $[a, b]$ 上可导，

则 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$f'(\xi)=0$$

此定理的证明在上例中事实上已经有了，希读者自行整理，不再复述。但与此相关的一个问题却值得思考。请想一下，式（1-4）中的速度 v 能不能等于区间（t, t_0）内某一时刻 ξ 的速度，并说明理由。这同下述定理是密切相关的。

1.3.2 拉格朗日定理

现在将要阐述的定理实际上是罗尔定理的推广，寓意较深，理解不易。为分散难点，并有助于初学者掌握要点，先介绍一个龟兔赛跑的故事。

例 1.3 运动场上，龟兔赛跑。一声号令，乌龟奋勇向前，一路领先，兔子不慌不忙，东张西望，眼见乌龟快到终点，不得不惊恐狂追。勉强与乌龟同时到达终点。出现这样的结局也带来了一个问题，谁应该得奖？裁判意见不

一，下面是相互辩论的综述。

一位裁判说，兔子跑得快，应该得奖；一位裁判说，乌龟多数时间领先于兔子，应该得奖，一位智者说，兔子和乌龟的平均速度是相同的，应该并列第一。此言一出，众人折服。

以前在论述重要极限一时，用过平均值，上例中体现为平均速度。这是个很有用的概念，需要细说几句。单就兔子而论，设它在时刻 $t=a$ 起跑，时刻 $t=b$ 到达终点，其路程函数为 $f(t)$，则兔子在（$b-a$）时间跑过的路程等于 $f(b)-f(a)$，平均速度自然是

$$\bar{v}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

其中，$\bar{v}$ 表示平均速度。具体地说，如 $b-a=10$ 秒，$f(b)-f(a)=100$ 米，则兔子的平均速度 $\bar{v}=10$ 米/秒。容易想到，兔子速度不能一直大于10或小于10。否则，与事实相悖，矛盾。这就是说，兔子的速度有时大于10，有时小于10。请静心思考片刻，速度从大于10连续变化到小于10，或从小于10连续变化到大于10，是不是必然在至少某一瞬间等于10？答案是肯定的，这是关键，也是我们所希望的。

综上所述，兔子在奔跑过程 $[a,\ b]$ 中，至少在某一时刻 $\xi\in[a,\ b]$，其速度等于平均速度 $\bar{v}$，因为路程函数 $f(t)$ 的导数 $f'(t)$ 便是速度，据此得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\ \xi\in[a,\ b] \tag{1-5}$$

或

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

以上就是拉格朗日定理，其具体陈述请见下文。

例 1.4 改日，龟兔重逢，再次比赛。这一回，兔子决心要取得完胜独占鳌头，刚听到发令枪响，就尽力奔跑，到达终点时，乌龟才爬至全程的十分之一。

本例是例 1.3 的推广，更加复杂，更富想象，但两者的本质是基本一样的。下面将逐步来显示其深刻的内涵。

乌龟见此结果，心中不服，嘴上嘟哝：你兔子跑的路程是我的10倍，但要是比速度的话，我有时就会比你兔子快。兔子一听，马上应战说：咱俩就比速度吧！

兔子的路程函数已知是 $f(t)$，速度函数是 $f'(t)$。设乌龟的路程函数为 $g(t)$，则速度函数为 $g'(t)$，而两者的速度之比为 $f'(t):g'(t)$。此比值在什么时

候小于1，则乌龟在什么时候确实比兔子快。龟兔之争，我们不必介入，但乌龟说的“要比速度”乃金玉之言，使人眼前一亮，一个重要定理立刻就将现身了。

上面刚讲过，兔子和乌龟所跑过的路程之比为

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=10$$

其中，a 和 b 分别是赛跑的起始时刻和终止时刻。写到这里，请读者回忆并思考一下：在上文论述拉格朗日定理时的推理。扼要地说，龟兔两者速度之比不可能一直大于10，或一直小于10，必至少在某一时刻 $\xi\in[a,\ b]$，等于10，即

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)},\ \xi\in[a,\ b]$$

上式所表示的就是柯西中值定理。

几点附注：

（1）两个定理的具体内容在每本高数教材中都有，本文不再引述。其实，按英文原意，这两个定理宜分别译为拉格朗日平均值定理和柯西平均值定理，更能展现平均值与定理之间的关系。

（2）试以龟兔赛跑为例，说明拉格朗日平均值定理是柯西平均值定理的特例，而罗尔定理又是拉格朗日定理的特例。

（3）拉格朗日公式

$$f(b)=f(a)+f'(\xi)(b-a)$$

可理解为，一物体作直线运动，其所经历的路程等于其平均速度 $f'(\xi)$ 乘以时间 $(b-a)$。试问，当物体存在加速度 $f''(t)$ 时，此公式应如何推广，以便将加速度的作用体现出来。

（4）柯西定理中是速度之比等于路程之比。能否在某种条件下，出现加速度之比等于路程之比？

1.3.3 柯西中值定理

由罗尔定理到拉格朗日定理，由拉格朗日定理到现在的柯西中值定理，表明人们认识客观事物的过程是逐步深化的，还能否再深化？

柯西中值定理，设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$

（1）在区间 $[a,\ b]$ 上可导，且 $g'(x)\neq 0$；

（2）$g(b)>g(a)$；