

线性离散周期系统的 鲁棒控制

吕玲玲 著



科学出版社

线性离散周期系统的鲁棒控制

吕玲玲 著



科学出版社

北京

内 容 简 介

本书讨论线性离散周期系统的鲁棒分析和设计问题,内容包括相关的理论基础、设计算法和应用。本书是作者近年来在线性离散周期系统的鲁棒控制领域研究与实践工作的总结与提炼。全书共9章。第1章阐述线性离散周期系统的研究背景、研究进展及存在的问题。第2章侧重于线性离散周期系统的基本理论。第3章重点介绍和线性离散周期系统相关的一些矩阵方程的求解方法,包括耦合矩阵方程、周期 Sylvester 矩阵方程、周期调节矩阵方程的数值迭代解法和参数化解法。第4、5、6章分别具体设计线性离散周期系统的极点配置算法,即周期状态反馈、周期输出反馈、周期动态反馈下的参数化极点配置算法和鲁棒极点配置算法。第7章考虑鲁棒观测器的设计问题和基于观测器的控制器设计问题。第8章研究利用周期状态反馈控制律对系统进行模型匹配的问题。第9章以卫星姿态控制为例说明所述鲁棒控制算法在工程实践中的应用。

本书可供从事控制理论与应用相关专业领域研究和开发工作的科技人员参考,也可作为高等学校相关专业高年级本科生和研究生的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性离散周期系统的鲁棒控制/吕灵芝著.—北京:科学出版社,2017.3
ISBN 978-7-03-052228-3

I. ①线… II. ①吕… III. ①线性系统-离散系统-鲁棒控制 IV. ①TP273

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第054814号

责任编辑:陈构洪 赵微微/责任校对:郭瑞芝

责任印制:张 倩/封面设计:铭轩堂

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

文林印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017年3月第一版 开本:720×1000 1/16

2017年3月第一次印刷 印张:14 1/4

字数:270 000

定价:96.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

作者简介

吕灵灵，女，1983年1月生，河南偃师人。2010年4月获得哈尔滨工业大学工学博士学位。现就职于华北水利水电大学电力学院，副教授，硕士生导师，华北水利水电大学创新培育团队带头人。2013年入选河南省优秀青年骨干教师，2016年入选河南省高校科技创新人才支持计划和华北水利水电大学教学名师培育对象。致力于周期系统、鲁棒控制和智能电网等领域的研究。自2013年以来，主持国家自然科学基金4项及其他层次项目若干项。参加过国家自然科学基金重大创新群体、国家自然科学基金重点项目、教育部长江学者创新团队项目以及国家863项目等多个项目。在 *SIAM Journal on Control and Optimization*、*Journal of Global Optimization* 等国内外学术期刊上发表学术论文30余篇。

前 言

作为连接线性时不变系统和时变系统的桥梁，线性周期时变系统是一类非常重要的系统。一般来说，线性周期系统的来源可以大致分为三类：第一类是来源于非线性系统的线性化，而非线性系统比线性系统能够更加真实地反映现实世界；第二类来源于一些本质上属于周期时变的系统，如数字取样系统、多级速度系统、滤波器组和取样反馈控制系统；最后一类来源于线性时不变系统采用周期控制律得到的闭环系统，因为在时不变控制律失效的情况下，周期控制律往往能够胜任，而且线性时不变系统采用周期控制律往往能够使系统的性能得到改善。近几十年来，随着电子计算机的迅猛发展，很多连续周期系统在实际应用时需要离散化处理，这就使得线性离散周期系统得到了更多的关注。但是由于线性离散周期系统本身固有的时变特性，它的讨论和研究远不及线性时不变系统完善和深刻，成果也远不及时不变系统丰富，许多问题有待于进一步研究。在这种研究需求的推动下，作者团队进入并专注于该领域的研究，深入挖掘实际问题的内在机理并开展理论与方法研究，并将理论研究成果应用于实践问题的解决。本书即为这些年来相关领域研究工作的总结与提炼。

在本书的写作中，作者致力于将理论与实践结合并注重解决实际问题。在研究中，侧重于理论分析，并同时通过仿真手段，利用实际应用系统模型对提出来的新方法进行检验。所以我们的总体研究方案为“理论研究”+“仿真研究”。在对相关矩阵方程的求解问题研究中，分别给出了解析解和迭代解的求解算法两种方案。第一种方案是通过一些矩阵分析方法和代数技巧，将一组周期时变矩阵方程转化为一个普通的时不变矩阵方程，并给出待求解的未知周期矩阵和该时不变矩阵方程的解集之间的数学关系。第二种方案拟采用基于梯度的搜索算法来求解约束矩阵具有时变维数的周期矩阵方程。采用的参数化设计和递推迭代设计相结合的研究方法，既便于离线设计控制器，又便于在线设计控制器，可以满足多样化的设计需求。在对线性离散周期的控制器设计问题的研究中，利用周期系统单值性矩阵的性质，运用矩阵分析工具，找到周期系统矩阵和一类特殊的时不变矩阵方程之间的联系，然后求解这类特殊的矩阵方程，并对方程的解进行分析和推导，以显式参数化的形式给出实现参数化控制的一组周期状态反馈增益。对于该类系统的鲁棒控制器设计问题，通过扰动分析的方法，运用大量的不等式技巧来给出一个能够刻画系统特征值对于潜在扰动的灵敏度指标。然后根据这个灵敏度指标，提出一个鲁棒性能指标，结合一般控制问题的参数化解，将相应的鲁棒控

制问题转化为一个约束优化问题,进一步使用 MATLAB 优化工具箱进行求解。所提出的控制器设计算法简单有效,具有良好的时间复杂度和空间复杂度。

全书共 9 章。第 1 章阐述了线性离散周期系统的研究背景,在系统归纳和评述相关研究成果的基础上,综述了相关问题的研究进展及存在的问题。第 2 章介绍了线性离散周期系统领域的一些基本概念和经典理论。第 3 章重点介绍了和线性离散周期系统相关的一些矩阵方程的求解方法,涉及的方程包括耦合矩阵方程、周期 Sylvester 矩阵方程、周期调节矩阵方程等。该章分别给出了便于在线计算的数值迭代解法和便于离线计算,并能提供充分设计自由度的参数化解析解法。第 4 章考虑了通过周期状态反馈对线性离散周期系统进行极点配置的问题,给出了参数化和鲁棒极点配置算法。第 5 章和第 6 章分别研究了通过周期输出反馈和周期动态补偿器的方式进行极点配置的问题,设计了参数化形式的解析控制器和鲁棒控制器。第 7 章以周期观测器设计为主线,研究了鲁棒观测器的设计问题和基于观测器的控制器设计问题。第 8 章研究了利用周期状态反馈控制律对系统进行模型匹配的问题,介绍了线性离散时不变系统和线性离散周期系统在周期状态反馈控制律下实现模型匹配的控制器的设计算法。基于磁控卫星的滚动和偏航通道的动力学模型是一个线性周期系统的事实,第 9 章将本书前述控制算法应用到卫星姿态控制,阐述了鲁棒控制算法在工程实践中的应用。

在该领域过去多年的研究中,作者得到了尊敬的导师段广仁教授和师兄吴爱国教授、周彬教授等的指导和帮助。在本书的写作过程中,作者的研究生岳金明、张哲和韩超飞为此付出了辛勤的汗水;同时,华北水利水电大学电力学院的领导和同事为本书的写作创造了条件并给予关心,在此一并向他们致以诚挚的谢意。感谢我的父母、爱人和女儿,他们在我多年的教学和科研工作中给予了许多理解和支持,感谢他们在生活中的陪伴和体谅。

国家自然科学基金(11501200, U1604148)、河南省创新型科技团队(C20140038)对本书的研究工作提供了持续的支持,并对本书的出版给予了资助,科学出版社对本书出版给予了全方位的帮助,谨借此机会表达深切的谢意。

作者尽管做出最大努力,但因学术水平有限,书中可能存在不足或疏漏之处。敬请广大读者不吝赐教,作者将不胜感激。

吕灵灵

2016 年 10 月于华北水利水电大学

目 录

前言

第 1 章 绪论	1
1.1 线性离散周期系统的研究对象	1
1.2 线性离散周期系统的发展	4
1.2.1 系统分析	5
1.2.2 系统综合	9
1.2.3 存在的问题和发展趋势	12
1.3 本书的主要内容和安排	13
第 2 章 线性离散周期系统的基本理论	15
2.1 周期模型	15
2.2 单值性矩阵和稳定性	17
2.2.1 单值性矩阵	17
2.2.2 Floquet 理论	21
2.2.3 稳定性	25
2.3 线性周期系统的结构属性	32
2.3.1 基本定义	32
2.3.2 可达性和能控性	33
2.3.3 可达和能控 Grammians	35
2.3.4 能观性和能重构性	36
2.3.5 对偶性	39
2.4 时不变提升重构	40
2.4.1 标准提升重构	41
2.4.2 循环提升重构	44
2.5 本章小结	46
第 3 章 相关矩阵方程的求解	47
3.1 引言	47
3.2 求解耦合矩阵方程的迭代算法	47
3.2.1 问题提出	47
3.2.2 主要结果	48
3.2.3 数值算例	59

3.3	周期 Sylvester 矩阵方程的迭代算法	60
3.3.1	问题提出	60
3.3.2	主要结果	61
3.3.3	数值算例	67
3.4	周期 Sylvester 矩阵方程的参数化解	68
3.4.1	问题提出	68
3.4.2	主要结果	70
3.4.3	数值算例	76
3.5	周期调节矩阵方程的参数化解	78
3.5.1	问题提出	78
3.5.2	主要结果	81
3.5.3	数值算例	86
3.6	本章小结	88
第 4 章	周期状态反馈极点配置	89
4.1	引言	89
4.2	准备工作	89
4.3	参数化极点配置	91
4.3.1	问题提出	91
4.3.2	参数化控制器设计	97
4.4	鲁棒和最小范数极点配置	99
4.4.1	问题提出	99
4.4.2	主要结果	99
4.5	数值算例	106
4.6	一些相关方法的讨论	113
4.7	本章小结	114
第 5 章	周期输出反馈极点配置	115
5.1	引言	115
5.2	准备工作	115
5.3	参数化输出反馈极点配置	117
5.3.1	问题提出	117
5.3.2	参数化输出反馈控制器设计	118
5.3.3	数值算例	124
5.4	鲁棒输出反馈极点配置	127
5.4.1	问题提出	127
5.4.2	鲁棒输出反馈控制器设计	129
5.4.3	数值算例	130

5.5	一些相关方法的讨论	133
5.6	本章小结	133
第 6 章	周期动态反馈极点配置	135
6.1	引言	135
6.2	参数化动态反馈极点配置	135
6.2.1	问题提出	135
6.2.2	参数化动态补偿器设计	137
6.3	鲁棒动态反馈极点配置	139
6.3.1	问题形成	139
6.3.2	鲁棒动态补偿器设计	140
6.4	数值算例	144
6.5	本章小结	149
第 7 章	基于周期观测器的鲁棒镇定	150
7.1	引言	150
7.2	周期鲁棒全维观测器设计	151
7.2.1	问题提出	151
7.2.2	主要结果	153
7.2.3	数值算例	158
7.3	周期 Luenberger 观测器设计	162
7.3.1	准备工作	162
7.3.2	Luenberger 观测器成立条件	162
7.3.3	Luenberger 观测器增益的参数化表示	165
7.3.4	数值算例	168
7.4	基于观测器的控制系统设计	170
7.4.1	准备工作	170
7.4.2	分离原理	174
7.4.3	数值算例	175
7.5	本章小结	177
第 8 章	周期控制律下的模型匹配研究	178
8.1	引言	178
8.2	LTI 系统在周期控制律下的模型匹配	178
8.2.1	问题提出	178
8.2.2	控制器设计	180
8.2.3	数值算例	182
8.3	线性离散周期系统的模型匹配	185

8.3.1	问题提出	185
8.3.2	控制器设计	186
8.3.3	数值算例	189
8.4	本章小结	191
第 9 章	鲁棒周期控制方法在卫星姿态控制中的应用	192
9.1	卫星姿态的线性周期模型	193
9.2	卫星姿态镇定控制器设计	196
9.3	仿真结果	203
9.4	本章小结	208
参考文献	209

第1章 绪 论

1.1 线性离散周期系统的研究对象

作为连接线性时不变系统和线性时变系统乃至一般的非线性系统的桥梁,线性离散周期时变(linear discrete periodic varying, LDPV)系统无论在理论上还是在实践上都发挥着重要的作用。LDPV 系统适用于绝大多数的具有周期属性的模型。在工程实践中,很多机械系统在周期策略驱动下的动态行为,都可以建模为“小扰动”下的线性周期系统。目前,LDPV 系统的各种不同控制策略已经广泛应用于卫星姿态控制^[1, 2]、硬盘驱动伺服系统^[3]、风力涡轮机^[4]、汽车发动机^[5]等。尤其值得一提的是,研究线性离散周期系统的一个重要的动机在于信号处理领域。通过多级速度数字采样得到的系统往往能建模成线性离散周期系统。而多级速度滤波器与滤波器组被广泛应用于天线系统、通信系统、图像压缩系统、语音处理和保密系统以及数字音频领域^[6, 7]。在理论层面,除了被用于分析线性和非线性问题,有不少学者还发现对于一些定常反馈控制律不能控制的系统,周期控制律往往能够胜任,而且对线性时不变系统采用周期控制律可以提高闭环系统的鲁棒性。正是由于诸多应用需求的出现和不断增长,促使 LDPV 系统不断发展,国内外对该领域的研究也日益活跃。

下面是两个实际的例子。首先看一个卫星姿态控制问题^[1]。

例 1.1 利用磁偶极矩和地磁场的相互作用原理,卫星绕地球轨道运动的姿态稳定性常常通过安装在卫星上的磁力矩器来实现。由于地磁场在轨道上周期变化,所以卫星的动力学方程是一个线性周期系统。在不考虑干扰力矩的情况下,滚动/偏航轴的动力学方程可以用下面的状态方程表示:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)m$$

式中, m 是磁力矩器产生的磁偶极矩在星体坐标系中俯仰轴方向上的坐标,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \phi \\ \varphi \\ \dot{\phi} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{31} & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}(t) = b_m \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \sin \omega_0 t / I_1 \\ -\cos \omega_0 t / I_3 \end{bmatrix}$$

其中, ϕ 和 φ 分别代表滚动角和偏航角; ω_0 是轨道角速率; b_m 是磁场强度; I_1 、 I_2 、 I_3 是卫星相对于星体坐标系主轴的转动惯量; a_{31} 、 a_{34} 、 a_{42} 、 a_{43} 是由 ω_0 和 I_1 、 I_2 、 I_3 决定的常数。

再看一个直升机传动系统的振动衰减问题^[8]。

例 1.2 直升机的传动系统由复杂的齿轮组成, 它的振动是典型的周期振动问题, 其振动衰减研究是非常有意义的。振动的衰减可通过主动控制方法来解决。这一问题可由下述线性周期系统模型来描述:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{K}(t) \\ -\mathbf{K}(t) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} u$$

式中, $\mathbf{K}(\cdot)$ 表示系统的刚度矩阵, 具有周期性; \mathbf{D} 表示系统的阻尼矩阵; \mathbf{M} 表示系统的质量矩阵; \mathbf{f} 表示系统施加的主动动力矩阵; d_i 表示对系统的干扰; u 表示主动施加力; \mathbf{x} 表示系统的状态变量; \mathbf{y} 表示测量系统的位移。

线性时不变系统的很多结论在时变系统中往往并不成立。因此, 一般的时变系统不得不独立对待。为一种类型的系统设计的技术一般情况下不能推广应用到其他类型的系统。但是, 线性周期系统是一个例外, 因为它们具有相似的性质, 形成了统一的一类系统。而且, Floquet-Lyapunov 理论展示了线性连续周期系统和线性时不变系统之间的相似性; 提升系统理论则展示了线性离散周期系统和线性时不变系统的相似性。因此, 利用线性时不变系统丰富的成果来研究线性周期系统是可以期待的。

线性离散周期系统的应用可以大致分为三类: 一类是来源于非线性系统的线性化, 因为线性周期系统往往被看作连接线性时不变系统和一般的非线性系统的桥梁, 而后者能够更加真实地反映现实世界; 第二类来源于一些本质上属于周期时变的系统, 如数字取样系统、多级速度系统、滤波器组和取样反馈控制系统; 第三类来源于线性时不变系统采用周期控制律得到的闭环系统。

(1) 虽然对非线性系统的控制有很多手段, 但是将其在某些平衡点轨迹附近线性化是一个基本的技巧, 而且得到了广泛的应用。连续非线性系统离散化后一般具有如下形式:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k) \end{cases} \quad (1-1)$$

假设非线性系统(1-1)的状态处于某一给定的标称解 $\mathbf{x}_{\text{nom}}(k)$ 的邻域中, 且函数 f 和 g 都是关于 $\mathbf{x}_{\text{nom}}(k)$ 和标称输入 $\mathbf{u}_{\text{nom}}(k)$ 可微的。那么, 该非线性系统可以通过下面的一阶泰勒展开来进行线性逼近:

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{x}(k+1) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_{\text{nom}}(k), \mathbf{u}_{\text{nom}}(k))\Delta \mathbf{x}(k) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_{\text{nom}}(k), \mathbf{u}_{\text{nom}}(k))\Delta \mathbf{u}(k) \\ \Delta \mathbf{y}(k) = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_{\text{nom}}(k), \mathbf{u}_{\text{nom}}(k))\Delta \mathbf{x}(k) + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_{\text{nom}}(k), \mathbf{u}_{\text{nom}}(k))\Delta \mathbf{u}(k) \end{cases} \quad (1-2)$$

逼近系统是线性时不变的当且仅当逼近轨迹恰好是稳定的。如果它是不稳定的, 但是以一种周期的方式变化, 线性化后的逼近系统将是一个线性周期时变系统。一般来说, 逼近系统是一个线性时变系统, 它可以被当作线性周期系统的极端例子来对待, 也就是相当于一个周期趋于无穷大的线性周期系统。

(2) 除了被用于分析非线性问题, 线性周期系统也适用于大部分具有周期属性的模型, 如季节现象和有节奏的生物运动。但是很大一部分研究这类系统的动机来源于多级速度数据采样。在信号处理领域, 多级速度数字滤波器和滤波器组可以应用于通信、语音处理、图像压缩、天线系统、模拟语音保密系统和数字音频工业^[6,7]。在控制理论中, 多级速度取样广泛应用于多级速度反馈系统(multirate feedback system), 文献里也称其为取样数字控制系统(sampled-data control system)。

多级速度数字取样过程的基本元件是抽取器和插补器。图 1-1 展示了两者的方框图。

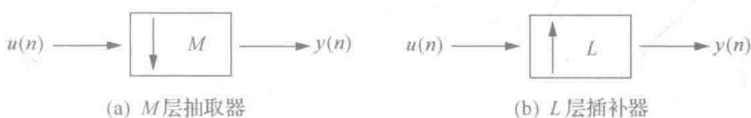


图 1-1 抽取器和插补器方框图

M 层抽取器可以由下列输入输出关系刻画:

$$y_D(n) = u(Mn) \quad (1-3)$$

该关系表明时刻 n 的输出等于时刻 Mn 的输入。因此, 仅仅取样数等于 M 或者是 M 的倍数的输入取样被保持了。 L 层插补器可以由如下输入输出关系刻画:

$$y_I(n) = \begin{cases} u\left(\frac{n}{L}\right), & n \text{ 是 } L \text{ 的整数倍} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1-4)$$

也就是说, 通过在 $x(n)$ 的两次相邻取样之间插入 $L-1$ 个零值取样来获得输出

$y_I(n)$ 。

容易看出抽取器和插补器都是简单的时变系统，一般来说，他们都不是周期的。但是，当一个抽取器和一个插补器以相同的取样速度串联，甚至被其他取样器或者滤波器分离开，它们总体形成一个线性周期时变系统。这是正交镜式滤波器组和具有周期时变取样速度的取样数字控制系统的基础规则。

(3) 对于如下形式的线性离散时不变系统：

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (1-5)$$

施加周期控制律 $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t)$ ，其中 $\mathbf{K}(t+T) = \mathbf{K}(t)$ ，则可以得到

$$\mathbf{x}(t+1) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}(t))\mathbf{x}(t) \quad (1-6)$$

显然这个闭环系统是一个以 T 为周期的时变系统。有不少学者发现对于一些定常反馈控制律不能控制的系统，周期控制律往往能够胜任，而且对线性时不变系统采用周期控制律可以提高闭环系统的鲁棒性。因此，这也是线性离散周期系统的重要应用之一。

1.2 线性离散周期系统的发展

具有周期系数的常微分方程具有较长的研究历史，最早可以追溯到 19 世纪 30 年代。到了 19 世纪下半叶，系统与控制理论的发展以及数字控制和信号处理取得的巨大成就为线性连续和离散周期系统的研究注入了新的动力。这个时期出现了许多理论成果，如概括性的书籍^[9-11]和综述性的文献^[12]等。随后线性周期系统在工程应用方面的研究也有了很大进展，尤其是在航空航天领域^[13-15]、工业过程的计算机控制^[16]和通信系统^[17]。

一般而言，LDPV 系统的状态空间模型可表示为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (1-7)$$

式中， $t \in \mathbf{Z}$ ， $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ 为状态变量； $\mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}^m$ 为输出变量； $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^r$ 为输入变量； $\mathbf{A}(t)$ 、 $\mathbf{B}(t)$ 、 $\mathbf{C}(t)$ 、 $\mathbf{D}(t)$ 都是实矩阵，且以 T 为周期。下面将对 LDPV 系统在一些主要领域的研究进展进行分别讨论。

1.2.1 系统分析

1.2.1.1 时不变重构

LDPV 系统由于其自身的线性周期特性,很容易和线性离散时不变系统联系起来。人们对系统的状态变量以及输入、输出变量按照某种规律进行重新排列和组合,就会形成一个线性时不变系统,而原来系统的一些特性也往往会反映在新生成的时不变系统中。因此,时不变重构是研究 LDPV 系统的一个非常重要的工具,很多理论结果是基于两类提升技巧,通过提升将周期系统中的控制问题转化为一个等价的高维时不变系统的相应问题。提升方法导致的结果或是处理 T (T 是系统周期)个矩阵的乘积矩阵,或是处理一个具有稀疏和大结构的标准系统。提升的数学本质是通过特普利茨算子将原状态空间 l_2 等距同构到一个新的空间上。

时间提升重构或许是最经典的一类时不变重构,它将一个周期上的输入输出信号打包成一个新的放大的信号,而状态信号则是每隔一个周期取样一次。这种思想最早起始于对多级速度反馈系统的研究。文献[18]在对多级速度反馈系统的输入输出关系的分析中,利用等价的单级速度系统重新表示了这类系统。1959年, Jury 等^[19]利用周期时变取样分析了取样数字控制系统。随后, Riedland 发现多级速度系统属于一般的离散周期时变系统^[20]。基于前人的成果, Meyer 等于 1975 年将多级速度和周期时变数字滤波器统一起来用线性时不变系统描述^[21]。一般地,人们称 Meyer 等构建的提升系统为标准提升时不变系统。自此以后,时间提升重构在 LDPV 系统的分析和设计中常常被用到,比如在周期零点的定义、能达性和能观性等结构属性、极点配置、优化控制器的设计中均能找到它的影子。

Park 等^[22]和 Flamm^[23]提出了 LDPV 系统的另外一种时不变表示,即循环时不变重构。循环操作是随时间推移,每次挑选一个周期的信号取样,而该取样信号是以一个增广向量的形式来表示的。将这种操作应用到周期动态系统的外部变量,得到一个时不变的动态过程。在这种表示里,重构的线性时不变模型保持了原始周期系统的步长。循环重构算法相对于标准提升算法的优势在于原始离散周期系统的因果律被保留在重构后的线性时不变系统中,而且二者的步长是一致的。缺点是它不仅放大了输入空间和输出空间的维数,而且放大了状态的维数。循环重构算法也得到了广泛的应用,人们在检验周期系统中的一些重要概念的合理性时,往往会对比标准提升重构和循环提升重构各自所得结果是否一致,如周期系统的零点、极点、 L_2 范数、 L_∞ 范数等都被证明是有意义的。此外, LDPV 系统的模型匹配问题也是循环重构算法的一个重要用武之地^[24]。

以上两类重构都是基于状态空间描述的,文献[25]从周期系统的输入输出描述角度出发,首先提出了周期传递函数的概念,并在此基础上给出了周期系统的

频域响应。该文还从输入输出角度讨论了四类重构：时间提升重构、循环提升重构、频率重构、傅里叶重构，并通过解析形式阐明了几种重构之间的相互关系。由于该文是从周期传递函数方面来论述的，人们对于线性周期系统的时不变重构的频域解释有了更深刻的认识。这在传统的状态空间描述占主导地位的情形下构成了一个新的亮点。

1.2.1.2 系统的结构属性

系统的结构属性可分为能控性、能观性、能达性和能重构性。能控性研究系统在外在控制作用下从任意非零状态达到零状态的可能性。能达性的概念类似于能控性，反映了系统在外在控制作用下能从零状态达到状态空间中任意非零状态的一种性能。对于连续性的线性定常系统，能达性和能控性是完全等价的，两者的判别条件也相同。只有在研究离散系统和线性时变系统时，能达性和能控性的区别才变得有意义，而且一般它们的判别条件也是不相同的。并非所有状态变量都是可测量或有物理意义的，因此提出能否通过可测量的输出量获得系统的状态量，这便是系统的能观性问题；能否通过未来的观测输出量估计系统的当前状态量，这便是系统的能重构性问题。在周期系统的框架下，这些属性也得到了充分的研究。

文献[26]根据这几个结构属性对系统进行了标准分解。通过寻找结构子空间的相互关系来确立离散系统的对偶原理，然后推导了标准分解存在的充分条件，并给出了一个基于能达性和能重构性的标准分解。对于离散周期系统而言，能达性和能控性指标不再是固定的，而是依赖于时间 t 的，文献[27]对这个问题进行了探讨，并指出时刻 t 和区间 $(t - \mu_{rt}T, t)$ 有共同的能达子空间，和时间区间 $(t, t + \mu_{ct}T)$ 有共同的能控子空间。

文献[12]对能达性和能观性推导了一个非常简单易行的秩判据，给出了 t 时刻 k 步能达和能观测的充分必要条件。

在文献中，能达性 Grammian 矩阵和能观性 Grammian 矩阵的概念也得到了充分的关注。文献[27]和文献[28]利用 Grammian 矩阵的概念讨论了能控性和能重构性，并据此定义了相应的能控子空间、不可控子空间、能重构子空间、不可重构子空间。进而，根据系统的不可控部分是否是稳定的，将系统分为可稳的和不可稳的；根据系统的不可重构部分是否是稳定的，将系统分为可检测的和不可检测的。

1.2.1.3 稳定性分析

稳定性是一切动态系统所要解决的首要问题。在离散周期系统中，稳定性分

析和综合得到了充分的研究,取得了丰硕的成果。系统(1-7)的稳定性取决于它的单值性矩阵 $\Phi_A(t) = A(t+T-1)A(t+T-2)\cdots A(t)$ 的所有极点是否位于单位圆内。文献[26]中称这些极点为系统的特征乘子(characteristic multiplier),并证明了它们与时间 t 无关。

在稳定性分析中,一个最重要的方法自然是 Lyapunov 方法。文献[29]分别对连续和离散周期系统给出了周期 Lyapunov 不等式与周期 Riccati 方程,据此推导了线性周期系统稳定的充分必要条件。文献[30]给出了 Lyapunov 引理的周期时变系统版本。基于该引理,并假设系统完全能观测,将系统的渐近稳定性归结为与其相应的周期 Lyapunov 方程的正定解的存在性。将能观性假设放松到系统能检测,得到一个扩展版本的引理。在这个扩展的引理中,系统的稳定性取决于周期 Lyapunov 方程的周期半正定解的存在性。文献[31]利用一个周期差分 Riccati 矩阵方程的解刻画了 LDPV 系统输出稳定的充分必要条件。

1.2.1.4 零点

对于线性时不变系统,零点的重要性广为人知。很多学者都讨论过并定义了各种零点,如不变零点、传输零点、输入和输出解耦零点,并给出了不同零点概念之间的区别和联系,如文献[32]~文献[35]等。在线性周期系统领域,对零点也进行了广泛深入的探讨,很多学者都做出了较大的贡献,如 Bolzern、Grasselli 和 Longhi 等。

文献[36]考虑了单输入单输出(single input single output, SISO)线性离散周期系统的零点,将该类系统的零点与其提升线性时不变(linear time invariant, LTI)系统的零点联系起来。该文通过一个性质对零点进行刻画,该性质是 LTI 传函块属性在周期系统中的延伸,同时也是对周期系统的零点定义是否合理的验证。文献[37]研究了 LDPV 系统的传输零点、不变零点和结构零点,阐明了各自的含义,解释了相互之间的关系。该文证明了不变零点与结构零点是相同的,且非零不变零点和非零传输零点是独立于时间的。在推导过程中利用了系统的结构属性,因此这些结果也可以看作是 LDPV 系统在几何理论方面的进一步深化。文献[38]将输入和输出解耦零点的概念推广到了线性离散周期系统,并对不变零点和传输零点引入了一种全新的、更简单的描述,介绍了它们的结构指标的周期有序集。该文证明了这几种类型的非零零点的结构指标有序集是不依赖时间的,但是零不变零点、零传输零点、零输入和零输出解耦零点的结构指标有序集是随时间变化的,该文进一步指出,不能通过周期反馈来改变不变零点的有序集。在时不变系统中,不变零点具有如下的属性:对于任何一个零点,都存在一个适当的初始状态和一个指数类型的输入函数使得输出恒等于零。文献[12]指出离散周期系统的零点也